

INGENIERÍA MECÁNICA

# ESTÁTICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN



R. C. HIBBELER

## Prefijos SI

| *Múltiplo* | *Forma exponencial* | *Prefijo* | *Símbolo SI* |
|---|---|---|---|
| 1 000 000 000 | $10^9$ | giga | G |
| 1 000 000 | $10^6$ | mega | M |
| 1 000 | $10^3$ | kilo | k |
| *Submúltiplo* | | | |
| 0.001 | $10^{-3}$ | mili | m |
| 0.000 001 | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| 0.000 000 001 | $10^{-9}$ | nano | n |

## Factores de conversión (FPS) a (SI)

| *Cantidad* | *Unidad de medición (FPS)* | *Es igual a* | *Unidades de medición (SI)* |
|---|---|---|---|
| Fuerza | lb | | 4.4482 N |
| Masa | slug | | 14.5938 kg |
| Longitud | pie | | 0.3048 m |

## Factores de conversión (FPS)

1 pie = 12 pulgadas
1 mi (milla) = 5280 pies
1 kip (kilolibra) = 1000 lb
1 ton = 2000 lb

INGENIERÍA MECÁNICA

# ESTÁTICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

## RUSSELL C. HIBBELER

TRADUCCIÓN
**Jesús Elmer Murrieta Murrieta**
Maestro en investigación de operaciones
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Morelos

REVISIÓN TÉCNICA
**Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos**
Departamento de Ingeniería Mecánica
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Monterrey

**Prentice Hall**

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

HIBBELER, R. C.

**Ingeniería mecánica - Estática**
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-442-561-1
Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 672


ISBN 978013607790-9



**Edición en español**
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2010



ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-442-561-1
ISBN E-BOOK: 978-607-442-661-8

PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

**Prentice Hall**
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.com ISBN: 978-607-442-561-1

## Al estudiante

Con la esperanza de que este trabajo estimule
un interés en la ingeniería mecánica
y proporcione una guía aceptable para su comprensión.

# PREFACIO

El propósito principal de este libro es proporcionar al estudiante una presentación clara y completa de la teoría y las aplicaciones de la ingeniería mecánica. Para alcanzar dicho objetivo, la obra se ha enriquecido con los comentarios y las sugerencias de cientos de revisores que se dedican a la enseñanza, así como muchos de los alumnos del autor. Esta decimosegunda edición ha sido mejorada significativamente en relación con la anterior, por lo que se espera que tanto el profesor como el estudiante se beneficien en gran medida de estas mejoras.

## Características nuevas

**Problemas fundamentales.** Se localizan justo después de los problemas de ejemplo. Ofrecen a los estudiantes aplicaciones simples de los conceptos y, por ende, la oportunidad de desarrollar sus habilidades para resolver ciertas dificultades antes de intentar solucionar algunos de los problemas estándar que siguen. Estos problemas pueden considerarse como ejemplos extendidos puesto que *todos tienen soluciones parciales y respuestas* en la parte final del libro. De manera adicional, los problemas fundamentales ofrecen a los estudiantes un excelente medio para repasar antes de los exámenes; y pueden usarse también como una preparación para el examen de certificación en ingeniería, en Estados Unidos.

**Modificaciones al contenido.** Cada sección del texto se revisó con cuidado y, en muchas áreas, el material se desarrolló de nuevo a fin de explicar de mejor manera los conceptos. Esto ha incluido agregar o cambiar varios de los ejemplos para dar más énfasis a las aplicaciones de los conceptos importantes.

**Problemas conceptuales.** A lo largo del texto, por lo general al final de cada capítulo, se incluye una serie de problemas que involucran situaciones conceptuales relacionadas con la aplicación de los principios de mecánica vistos en el capítulo. Estos problemas de análisis y diseño están planteados para que los estudiantes razonen sobre una situación de la vida real, en donde una fotografía ejemplifica el escenario. Los problemas pueden asignarse después de que los estudiantes hayan desarrollado cierta experiencia en el tema.

**Fotografías adicionales.** La relevancia de conocer el tema estudiado se refleja mediante las aplicaciones en el mundo real que se ilustran en más de 60 fotografías nuevas y actualizadas a lo largo del libro. Estas fotografías se usan generalmente para explicar cómo se aplican los principios de mecánica en situaciones reales. En algunas secciones, las fotografías se utilizan para mostrar que los ingenieros deben crear primero un modelo idealizado para su análisis, y después proceder a dibujar un diagrama de cuerpo libre a partir de él con el fin de aplicar la teoría.

**Problemas nuevos.** En esta edición se han agregado aproximadamente 800 problemas nuevos, 50% del total, incluyendo aplicaciones en biomecánica e ingeniería aeroespacial y petrolera. Asimismo, esta nueva edición contiene alrededor de 17% más problemas que la edición anterior.

## Características particulares

Además de las características nuevas que se acaban de mencionar, hay otras que destacan el contenido del texto, entre ellas las siguientes.

**Organización y enfoque.** Cada capítulo está organizado en secciones bien definidas que contienen una explicación de temas específicos, problemas de ejemplo ilustrativos y conjuntos de problemas de tarea. Los temas dentro de cada sección se colocan en subgrupos definidos por títulos en letras negritas. El propósito de esto es presentar un método estructurado para introducir cada nueva definición o concepto y convertir al libro en una útil y práctica referencia en repasos posteriores.

**Contenido del capítulo.** Cada capítulo comienza con una ilustración que muestra una aplicación del tema a tratar, y una lista con viñetas de los objetivos del capítulo para proporcionar una visión general del material que se cubrirá.

**Énfasis en los diagramas de cuerpo libre.** Al resolver problemas, es particularmente importante dibujar un diagrama de cuerpo libre, y por esa razón este paso se enfatiza a lo largo del libro. En particular, se dedican secciones y ejemplos especiales para mostrar cómo dibujar diagramas de cuerpo libre. También se han agregado problemas de tarea específicos para desarrollar esta práctica.

**Procedimientos para el análisis.** Al final del primer capítulo, se presenta un procedimiento general para analizar cualquier problema mecánico. Después, este procedimiento se adapta para resolver problemas específicos a lo largo del libro. Esta característica única proporciona al estudiante un método lógico y ordenado que puede seguir al aplicar la teoría. Los problemas de ejemplo se resuelven utilizando este método esquemático a fin de clarificar su aplicación numérica. Sin embargo, una vez que se tiene dominio de los principios relevantes y se ha obtenido confianza y juicio en el método, el estudiante puede desarrollar sus propios procedimientos para la resolución de problemas.

**Puntos importantes.** Esta característica proporciona un repaso o resumen de los conceptos más importantes en cada sección y resalta los puntos que deben observarse al aplicar la teoría para la resolución de problemas.

**Comprensión conceptual.** Mediante el uso de las fotografías que se incluyen a lo largo del libro, se aplica la teoría de una manera simplificada, a fin de ilustrar algunas de sus características conceptuales más importantes e infundir el significado físico de muchos de los términos que se usan en las ecuaciones. Estas aplicaciones simplificadas aumentan el interés en el tema estudiado y preparan de mejor manera al estudiante para entender los ejemplos y resolver los problemas.

**Problemas de tarea.** Además de los problemas fundamentales y conceptuales que se mencionaron, el libro incluye problemas de otro tipo, como los que se describen a continuación:

- **Problemas de diagrama de cuerpo libre.** Algunas secciones del libro contienen problemas introductorios que sólo requieren dibujar el diagrama de cuerpo libre para una situación específica. Estas asignaciones harán que el estudiante conozca la importancia de dominar esta habilidad como un requisito para obtener una solución completa de cualquier problema de equilibrio.

- **Problemas generales de análisis y diseño.** La mayoría de los problemas presentan situaciones reales en la práctica de la ingeniería. Algunos provienen de productos reales usados en la industria. Se espera que este realismo estimule el interés del estudiante en la ingeniería mecánica y ayude a desarrollar la habilidad de reducir cualquier problema de este tipo desde su descripción física hasta un modelo o representación simbólica a la que se le puedan aplicar los principios de la mecánica.

  A lo largo del libro existe un balance aproximado de problemas que utilizan unidades SI o FPS. Además, en todas las series se ha hecho un esfuerzo por ordenar los problemas de acuerdo con una dificultad creciente, excepto para los problemas de repaso al final de cada capítulo, los cuales se presentan en orden aleatorio.

- **Problemas de computadora.** Se ha hecho un esfuerzo por incluir algunos problemas que pueden resolverse usando un procedimiento numérico ejecutado en una computadora de escritorio o bien en una calculadora de bolsillo. La intención es ampliar la capacidad del estudiante para que utilice otras formas de análisis matemático sin sacrificar el tiempo, para enfocarse en la aplicación de los principios de la mecánica. Los problemas de este tipo, que pueden o deben resolverse con procedimientos numéricos, se identifican mediante un símbolo "cuadrado" (■) antes del número del problema.

Al existir tantos problemas de tarea en esta nueva edición, se han clasificado en tres categorías diferentes. Los problemas que se indican simplemente mediante un número tienen una respuesta al final del libro. Si el número del problema está precedido por una viñeta (•), además de la respuesta se proporciona una sugerencia, una ecuación clave o un resultado numérico adicional. Por último, un asterisco (*) antes de cada número de problema indica que éste no tiene respuesta.

**Exactitud.** Al igual que con las ediciones anteriores, la exactitud del texto y de las soluciones a los problemas ha sido verificada con profundidad por el autor y otros cuatro colaboradores: Scott Hendricks, Virginia Polytechnic Institute and State University; Karim Nohra, University of South Florida, Kurt Norlin, Laurel Tech Integrated Publishing Services; y Kai Beng, un ingeniero practicante, quien además de revisar la exactitud proporcionó sugerencias para el desarrollo del contenido.

## Contenido

El libro está dividido en 11 capítulos, en los que los principios se aplican primero en situaciones simples y después en contextos más complicados. En un sentido general, cada principio se aplica primero a una partícula, después a un cuerpo rígido sujeto a un sistema de fuerzas coplanares, y por último a un sistema de fuerzas tridimensional que actúa sobre un cuerpo rígido.

El capítulo 1 comienza con una introducción a la mecánica y un análisis de las unidades. En el capítulo 2 introduce las propiedades vectoriales de un sistema de fuerzas concurrentes. Después, esta teoría se aplica al equilibrio de una partícula en el capítulo 3. El capítulo 4 contiene un estudio general de los sistemas de fuerzas concentradas y distribuidas así como de los métodos usados para simplificarlos. En el capítulo 5 se desarrollan los principios del equilibrio de cuerpos rígidos y después, en el capítulo 6, se aplican a problemas específicos que involucran el equilibrio de armaduras, bastidores y máquinas; luego, en el capítulo 7, estos principios se aplican al análisis de fuerzas internas en vigas y cables. En el capítulo 8 se analizan las aplicaciones a problemas que involucran fuerzas de fricción, y en el capítulo 9 se estudian temas relacionados con el centro de gravedad y el centroide. Si el tiempo lo permite,

también deben cubrirse las secciones que implican temas más avanzados, los cuales se indican mediante estrellas (★). La mayoría de estos temas están incluidos en el capítulo 10 (momentos de inercia) y en capítulo 11 (trabajo virtual y energía potencial). Observe que este material también proporciona una referencia adecuada para los principios básicos cuando éstos se estudian en cursos más avanzados. Por último, el apéndice A proporciona un repaso y una lista de fórmulas matemáticas necesarias para resolver los problemas del libro.

**Cobertura alternativa.** A discreción del profesor, algunas partes del material pueden presentarse en una secuencia diferente sin perder continuidad. Por ejemplo, es posible introducir el concepto de fuerza y todos los métodos necesarios del análisis vectorial al cubrir primero el capítulo 2 y la sección 4.2 (producto cruz). Asimismo, después de cubrir el resto del capítulo 4 (sistemas de fuerza y momento), se pueden estudiar los métodos de equilibrio de los capítulos 3 y 5.

## Reconocimientos

El autor se ha empeñado en escribir este libro de manera que resulte atractivo tanto para el estudiante como para el profesor. A través de los años, muchas personas han ayudado en su desarrollo y siempre estaré agradecido por sus valiosos comentarios y sugerencias. En especial, deseo agradecer a las siguientes personas sus comentarios relativos a la preparación de esta decimosegunda edición.

Yesh P. Singh, *University of Texas-San Antonio*
Manoj Chopra, *University of Central Florida*
Kathryn McWilliams, *University of Saskatchewan*
Daniel Linzell, *Penn State University*
Larry Banta, *West Virginia University*
Manohar L. Arora, *Colorado School of Mines*
Robert Rennaker, *University of Oklahoma*
Ahmad M. Itani, *University of Nevada*

Siento que hay unas pocas personas que merecen un reconocimiento particular. Vince O'Brien, director del equipo de administración del proyecto, y Rose Kernan, mi editora de producción durante muchos años, me dieron su impulso y apoyo. Francamente, sin su ayuda, esta edición totalmente modificada y mejorada no hubiera sido posible. Además, mi amigo y socio por largo tiempo, Kai Beng Yap, me fue de gran ayuda al revisar todo el manuscrito y preparar las soluciones para los problemas. A este respecto, también ofrezco un agradecimiento especial a Kurt Norlin de Laurel Tech Integrated Publishing Services. Agradezco la ayuda de mi esposa, Conny, y de mi hija, Mary Ann, quienes durante el proceso de producción ayudaron con la lectura de pruebas y la escritura necesaria para preparar el manuscrito antes de su publicación.

Por último, extiendo mi agradecimiento a todos mis alumnos y a los miembros del profesorado que se han tomado el tiempo de enviarme sus sugerencias y comentarios por correo electrónico. Como esta lista es demasiado larga, espero que aquellos que han proporcionado su ayuda de esta manera acepten este reconocimiento anónimo.

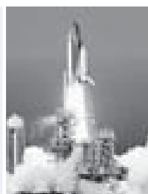
Estaré muy agradecido con ustedes si me envían algún comentario o sugerencia, o si me hacen saber la existencia de problemas de cualquier tipo en relación con esta edición.

*Russell Charles Hibbeler*
*hibbeler@bellsouth.net*

## Recursos en línea para los profesores (en inglés)

- **Manual de soluciones para el profesor.** Este suplemento proporciona soluciones completas apoyadas por instrucciones y figuras de los problemas. El manual de esta decimosegunda edición se modificó para mejorar su legibilidad y su exactitud se verificó tres veces.
- **Recursos para el profesor.** Los recursos visuales para acompañar el texto se localizan en el sitio Web: **www.pearsoneducacion.net/hibbeler**. Es necesario contar con un código de acceso y una contraseña para acceder a este sitio; contacte a su representante local de Pearson. Los recursos visuales incluyen todas las ilustraciones del texto, disponibles en diapositivas de PowerPoint y en formato JPEG.
- **Soluciones en video.** Las soluciones en video, desarrolladas por el profesor Edward Berger de la University of Virginia, se localizan en el sitio Web de este texto y ofrecen guías de soluciones paso a paso para los problemas de tarea más representativos de cada sección del texto. Haga un uso eficiente de las horas de clase y oficina mostrando a sus estudiantes los métodos completos y concisos para resolver problemas, a los que pueden tener acceso en cualquier momento para estudiarlos a su propio ritmo. Los videos están diseñados como un recurso flexible que puede usarse cada vez que el profesor y el estudiante lo decidan. Los videos también son un valioso recurso para la autoevaluación del estudiante puesto que puede detenerlos o repetirlos hasta verificar su comprensión, y trabajar a lo largo del material. Puede encontrar estos videos en **www.pearsoneducacion.net/hibbeler** siguiendo los vínculos hasta *Engineering Mechanics: Statics*, Twelfth Edition text.

# CONTENIDO



## 1
## Principios generales 3





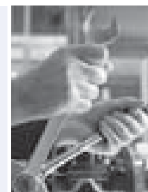
## 2
## Vectores fuerza 17





## 3
## Equilibrio de una partícula 85





## 4
## Resultantes de sistemas de fuerzas 117

## 5
## Equilibrio de un cuerpo rígido 199





## 6
## Análisis estructural 263





## 7
## Fuerzas internas 329





## 9 Centro de gravedad y centroide 447





## 10 Momentos de inercia 511





## 11 Trabajo virtual 563



## Apéndice

# Créditos

**Capítulo 1**, El transbordador espacial Discovery despega de la plataforma de lanzamiento 39-1 en el Centro Espacial Kennedy, 31 de mayo de 2008 en Cabo Cañaveral, Florida. El transbordador lleva consigo la unidad principal del laboratorio científico japonés Kibo hacia la Estación Espacial Internacional. Getty Images.

**Capítulo 1 texto**, Astronauta flotando en el espacio. Alamy Images sin derechos de autor.

**Capítulo 2**, Puente colgante Erasmus, Rotterdam, Holanda. Alamy Images.

**Capítulo 3**, Sección prefabricada de un edificio que está siendo colocada en su lugar mediante una gran grúa. Alamy Images.

**Capítulo 4**, Ingeniero que gira tornillos con una llave, acercamiento de las manos. Getty Images/Digital Vision.

**Capítulo 5**, Lancha salvavidas que está siendo elevada mediante una grúa hidráulica móvil, Grimsby, Humberside, North Lincolnshire, Inglaterra, Reino Unido. Alamy Images.

**Capítulo 6**, Niebla elevándose sobre el agua, que pasa bajo un puente de armaduras Pratt de acero, en el Río St. John River, New Brunswick, Canadá en Perth Andover. Alamy Images.

**Capítulo 7**, Varillas de refuerzo encofradas en concreto. Russ C. Hibbeler.

**Capítulo 8**, Freno calibrador en una bicicleta. Alamy Images.

**Capítulo 9**, Torre de agua, Harmony, Condado Bluff, Minnesota. Alamy Images.

**Capítulo 10**, Estructura de acero en un sitio de construcción. Corbis Royalty Free.

**Capítulo 11**, Brazo de una grúa. Getty Images Inc.–Stone Allstock.

**Portada 1**, Vigas metálicas de construcción empernadas. Getty Images Inc.–Image Bank.

**Portada 2**, Puente George Washington. Getty Images Inc. Tetra Images.

Las imágenes restantes fueron proporcionadas por el autor.

INGENIERÍA MECÁNICA

# ESTÁTICA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN



El diseño de este cohete y su torre de lanzamiento requieren un conocimiento básico tanto de estática como de dinámica, las cuales son el objeto de estudio de la ingeniería mecánica.

# Principios generales

# 1

**OBJETIVOS DEL CAPÍTULO**

- Proporcionar una introducción a las cantidades básicas e idealizaciones de la mecánica.
- Dar un enunciado de las leyes de Newton del movimiento y la gravitación.
- Revisar los principios para aplicar el sistema internacional de unidades (SI).
- Examinar los procedimientos estándar para realizar cálculos numéricos.
- Presentar una guía general para resolver problemas.

## 1.1 Mecánica

La *mecánica* es una rama de las ciencias físicas que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de fuerzas. En general, esta materia puede dividirse a su vez en tres ramas: *mecánica de cuerpos rígidos*, *mecánica de cuerpos deformables* y *mecánica de fluidos*. En este libro estudiaremos la mecánica de cuerpos rígidos puesto que es un requisito básico para el estudio de la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos. Además, la mecánica de cuerpos rígidos es esencial para el diseño y el análisis de muchos tipos de elementos estructurales, componentes mecánicos, o dispositivos electrónicos que pueden encontrarse en la práctica de la ingeniería.

La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: estática y dinámica. La *estática* estudia el equilibrio de los cuerpos, es decir, de aquellos que están en reposo o se mueven a una velocidad constante; por su parte, la *dinámica* estudia el movimiento acelerado de los cuerpos. Podemos considerar la estática como un caso especial de la dinámica, en el que la aceleración es cero; sin embargo, la estática merece un tratamiento aparte en la enseñanza de la ingeniería porque muchos objetos se diseñan con la intención de que permanezcan en equilibrio.

**Desarrollo histórico.** La materia de estática se desarrolló desde los primeros tiempos de la historia porque sus principios pueden formularse con facilidad a partir de mediciones de geometría y fuerza. Por ejemplo, los escritos de Arquímedes (287-212 a. C.) tratan del principio de la palanca. También se tiene registro de estudios sobre la polea, el plano inclinado y la llave de torsión en escritos antiguos —en tiempos en que las necesidades de ingeniería se limitaban primordialmente a la construcción de edificios.

Los principios de la dinámica dependen de una medición exacta del tiempo, por tal razón esta materia se desarrolló mucho después. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los primeros contribuyentes importantes a este campo. Su trabajo consistió en experimentos donde empleaba péndulos y cuerpos en caída. Sin embargo, fue Isaac Newton (1642-1727) quien realizó las contribuciones más significativas en dinámica, entre las cuales está la formulación de las tres leyes fundamentales del movimiento y la ley de la atracción gravitacional universal. Poco después de que estas leyes se postularon, notables científicos como Euler, D'Alembert, Lagrange y otros desarrollaron técnicas importantes para su aplicación.

## 1.2 Conceptos fundamentales

Antes de comenzar nuestro estudio de la ingeniería mecánica, es importante comprender el significado de ciertos conceptos y principios fundamentales.

**Cantidades básicas.** Las siguientes cuatro cantidades se utilizan en el estudio de la mecánica.

**Longitud.** La *longitud* se usa para localizar la posición de un punto en el espacio y por lo tanto describe el tamaño de un sistema físico. Una vez que se ha definido una unidad estándar de longitud, ésta puede usarse para definir distancias y propiedades geométricas de un cuerpo como múltiplos de esta unidad.

**Tiempo.** El *tiempo* se concibe como una secuencia de eventos. Aunque los principios de la estática son independientes del tiempo, esta cantidad tiene un papel importante en el estudio de la dinámica.

**Masa.** La *masa* es una medición de una cantidad de materia que se usa para comparar la acción de un cuerpo con la de otro. Esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitacional entre dos cuerpos y proporciona una medida de la resistencia de la materia a un cambio en su velocidad.

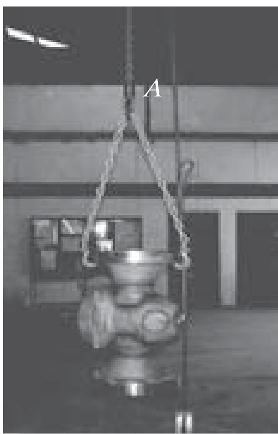
**Fuerza.** En general, la *fuerza* se considera como un "empujón" o un "jalón" ejercido por un cuerpo sobre otro. Esta interacción puede ocurrir cuando hay un contacto directo entre los cuerpos, como cuando una persona empuja una pared, o bien puede ocurrir a través de una distancia cuando los cuerpos están separados físicamente. Entre los ejemplos del último tipo están las fuerzas gravitacionales, eléctricas y magnéticas. En cualquier caso, una fuerza se caracteriza por completo por su magnitud, dirección y punto de aplicación.

**Idealizaciones.** Los modelos o idealizaciones se utilizan en mecánica a fin de simplificar la aplicación de la teoría. Aquí se considerarán tres idealizaciones importantes.

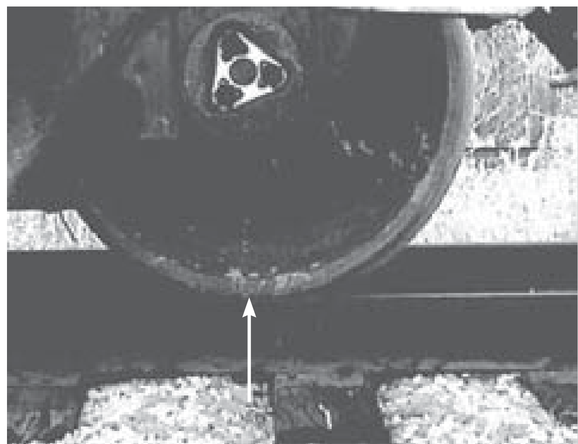
**Partícula.** Una *partícula* tiene masa, pero posee un tamaño que puede pasarse por alto. Por ejemplo, el tamaño de la Tierra es insignificante en comparación con el tamaño de su órbita; por lo tanto, la Tierra puede modelarse como una partícula cuando se estudia su movimiento orbital. Cuando un cuerpo se idealiza como una partícula, los principios de la mecánica se reducen a una forma bastante simplificada, puesto que la geometría del cuerpo *no estará incluida* en el análisis del problema.

**Cuerpo rígido.** Un *cuerpo rígido* puede considerarse como una combinación de un gran número de partículas donde todas éstas permanecen a una distancia fija entre sí, tanto antes como después de la aplicación de una carga. Este modelo es importante porque las propiedades del material de todo cuerpo que se supone rígido, no tendrán que tomarse en cuenta al estudiar los efectos de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. En la mayoría de los casos, las deformaciones reales que ocurren en estructuras, máquinas, mecanismos, etcétera, son relativamente pequeñas, y el supuesto de cuerpo rígido resulta adecuado para el análisis.

**Fuerza concentrada.** Una *fuerza concentrada* representa el efecto de una carga que se supone actúa en cierto punto de un cuerpo. Una carga puede representarse mediante una fuerza concentrada, siempre que el área sobre la que se aplique la carga sea muy pequeña en comparación con el tamaño total del cuerpo. Un ejemplo sería la fuerza de contacto entre una rueda y el suelo.




Tres fuerzas actúan sobre el gancho en $A$. Como todas estas fuerzas se encuentran en un solo punto, para cualquier análisis de fuerzas se puede suponer que el gancho se representa como una partícula.

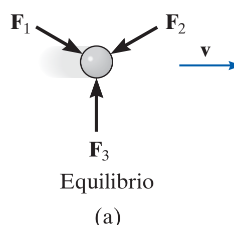


El acero es un material común en ingeniería que no se deforma mucho bajo carga. Por lo tanto, esta rueda de ferrocarril puede considerarse como un cuerpo rígido sobre el que actúa la fuerza concentrada del riel.

1

**Las tres leyes del movimiento de Newton.** La ingeniería mecánica está formulada con base en las tres leyes del movimiento de Newton, cuya validez se finca en la observación experimental. Estas leyes se aplican al movimiento de una partícula cuando se mide a partir de un marco de referencia *sin aceleración.* Las leyes se pueden establecer brevemente de la siguiente manera.

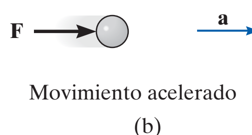
**Primera ley.** Una partícula originalmente en reposo, o que se mueve en línea recta con velocidad constante, tiende a permanecer en este estado siempre que la partícula *no* se someta a una fuerza no balanceada, figura 1-1*a*.




Equilibrio
(a)

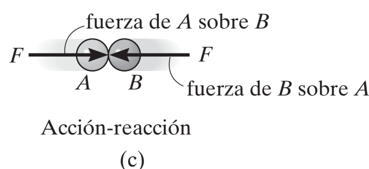
**Segunda ley.** Una partícula sobre la que actúa una *fuerza no balanceada* **F** experimenta una aceleración **a** que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud directamente proporcional a la fuerza, figura 1-1*b*.* Si se aplica **F** a una partícula de masa *m*, esta ley puede expresarse de manera matemática como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (1\text{-}1)$$




Movimiento acelerado
(b)

**Tercera ley.** Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales, figura 1-1*c*.




Acción-reacción
(c)

**Fig. 1-1**

*Expresado de otra manera, la fuerza no balanceada que actúa sobre la partícula es proporcional a la razón de cambio de la cantidad del momento lineal de dicha partícula.

**Ley de la atracción gravitacional de Newton.** Poco después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que gobierna la atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera. En forma matemática,

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1-2}$$

donde

$F$ = fuerza de gravitación entre las dos partículas

$G$ = constante universal de gravitación; de acuerdo con la evidencia experimental, $G = 66.73(10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$

$m_1, m_2$ = masa de cada una de las dos partículas

$r$ = distancia entre las dos partículas

**Peso.** De acuerdo con la ecuación 1-2, dos partículas cualesquiera o cuerpos tienen una fuerza de atracción (gravitacional) que actúa entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, o cerca de ella, la única fuerza gravitacional que tiene alguna magnitud significativa es la que existe entre la Tierra y la partícula. En consecuencia, esta fuerza, conocida como *peso*, será la única fuerza gravitacional que se considere en nuestro estudio de la mecánica.

A partir de la ecuación 1-2, es posible desarrollar una expresión aproximada para encontrar el peso $W$ de una partícula que tiene una masa $m_1 = m$. Si se supone que la Tierra es una esfera que no gira, tiene densidad constante y una masa $m_2 = M_T$, entonces si $r$ es la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula, tenemos

$$W = G\frac{mM_T}{r^2}$$

Sea $g = GM_T/r^2$, entonces

$$\boxed{W = mg} \tag{1-3}$$

Por comparación con $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, podemos ver que $g$ es la aceleración debida a la gravedad. El peso de un cuerpo depende de $r$, por tal razón *no* es una cantidad absoluta. En vez de esto, su magnitud se determina con base en el lugar donde se hizo la medición. Sin embargo, para la mayoría de los cálculos de ingeniería, $g$ se determina al nivel del mar y a una latitud de 45°, la cual se considera como la "ubicación estándar".



Para todo propósito práctico, el astronauta no tiene peso porque se encuentra muy lejos del campo gravitacional de la Tierra.

## 1.3 Unidades de medición

Las cuatro cantidades básicas —longitud, tiempo, masa y fuerza— no son independientes entre sí; de hecho, están *relacionadas* por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por esta razón, las *unidades* utilizadas para medir las cantidades básicas no pueden seleccionarse *todas* de manera arbitraria. La igualdad $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ se mantiene sólo si tres de las cuatro unidades, llamadas *unidades base*, están *definidas* y la cuarta unidad se *deriva* de la ecuación.

1

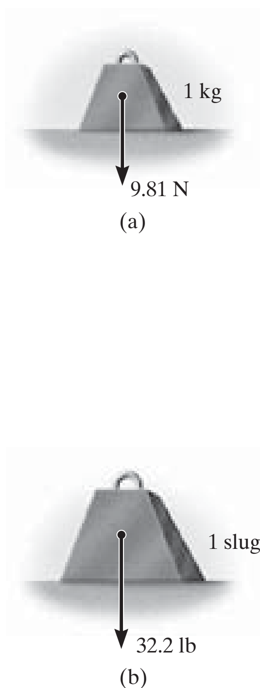



**Fig. 1-2**

**Unidades SI.** El Sistema Internacional de Unidades, que se abrevia SI por el francés "Système International d'Unités", es una versión moderna del sistema métrico que ha recibido reconocimiento en todo el mundo. Como se muestra en la tabla 1-1, el sistema SI define la longitud en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la masa en kilogramos (kg). La unidad de fuerza, llamada newton (N), se *deriva* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Así, 1 newton es igual a la fuerza requerida para dar a 1 kilogramo de masa una aceleración de 1 m/s² ($N = kg \cdot m/s^2$).

Si el peso de un cuerpo localizado en la "ubicación estándar" se debe determinar en newtons, entonces debe aplicarse la ecuación 1-3. Aquí las mediciones dan $g = 9.806\,65$ m/s²; sin embargo, para los cálculos, se usará el valor $g = 9.81$ m/s². Entonces,

$$W = mg \qquad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \tag{1-4}$$

Por tanto, un cuerpo de 1 kg de masa tiene un peso de 9.81 N, un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N, etcétera, según la figura 1-2*a*.

**Uso común en Estados Unidos.** En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos (FPS) la longitud se mide en pies (ft), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en libras (lb), tabla 1-1. La unidad de masa, llamada *slug*, se *deriva* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. De esta manera, 1 slug es igual a la cantidad de materia acelerada a 1 pie/s² cuando se somete a una fuerza de 1 lb ($slug = lb \cdot s^2/pie$).

Por lo tanto, si las mediciones se hacen en la "ubicación estándar", donde $g = 32.2$ pies/s², entonces a partir de la ecuación 1-3,

$$m = \frac{W}{g} \qquad (g = 32.2 \text{ pies/s}^2) \tag{1-5}$$

Así, un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug, un cuerpo de 64.4 lb tiene una masa de 2 slugs, etcétera, como en la figura 1-2*b*.

**TABLA 1-1 Sistemas de unidades**

| Nombre | Longitud | Tiempo | Masa | Fuerza |
|---|---|---|---|---|
| Sistema Internacional de Unidades SI | metro<br>m | segundo<br>s | kilogramo<br>kg | newton*<br>N $\left(\frac{kg \cdot m}{s^2}\right)$ |
| Uso común en Estados Unidos FPS | pie<br>pie | segundo<br>s | slug*<br>$\left(\frac{lb \cdot s^2}{pie}\right)$ | libra<br>lb |

*Unidad derivada.

**Unidades de conversión.** En la tabla 1-2 se proporciona un conjunto de factores de conversión directa entre unidades FPS y unidades SI para las cantidades básicas. También, en el sistema FPS, recuerde que 1 pie = 12 pulg, 5280 pies = 1 mi (milla), 1000 lb = 1 kip (kilo-libra) y 2000 lb = 1 tonelada.

**TABLA 1-2 Factores de conversión**

| Cantidad | Unidad de medida (FPS) | Es igual a | Unidad de medida (SI) |
|---|---|---|---|
| Fuerza | lb | | 4.448 N |
| Masa | slug | | 14.59 kg |
| Longitud | pie | | 0.304 8 m |

## 1.4 El Sistema Internacional de Unidades

El sistema SI de unidades se usa de manera extensa en este libro puesto que está destinado a convertirse en el estándar mundial para realizar mediciones. Por lo tanto, a continuación presentaremos algunas de las reglas para su uso, así como parte de su terminología relevante para la ingeniería mecánica.

**Prefijos.** Cuando una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden modificarse mediante el uso de un prefijo. En la tabla 1-3 se muestran algunos de los prefijos usados en el sistema SI. Cada uno representa un múltiplo o submúltiplo de una unidad que, si se aplica de manera sucesiva, mueve el punto decimal de una cantidad numérica hacia cada tercera posición.* Por ejemplo, 4 000 000 N = 4 000 kN (kilo-newton) = 4 MN (mega-newton), o 0.005 m = 5 mm (mili-metro). Observe que el sistema SI no incluye el múltiplo deca (10) o el submúltiplo centi (0.01), que forma parte del sistema métrico. Excepto para algunas medidas de volumen y área, el uso de estos prefijos debe evitarse en ciencia e ingeniería.

**TABLA 1-3 Prefijos**

| | Forma exponencial | Prefijo | Símbolo SI |
|---|---|---|---|
| *Múltiplo* | | | |
| 1 000 000 000 | $10^9$ | giga | G |
| 1 000 000 | $10^6$ | mega | M |
| 1 000 | $10^3$ | kilo | k |
| *Submúltiplo* | | | |
| 0.001 | $10^{-3}$ | mili | m |
| 0.000 001 | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| 0.000 000 001 | $10^{-9}$ | nano | n |

*El kilogramo es la única unidad base que se define con un prefijo.

**Reglas para su uso.** A continuación se presentan algunas reglas importantes que describen el uso apropiado de los diferentes símbolos SI:

- Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otras se separan mediante un *punto* para evitar la confusión con la notación de prefijos, como se observa en $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s^{-2}}$. Asimismo, $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}$ significa metro-segundo (metro por segundo) en tanto que ms representa mili-segundo.
- La potencia exponencial de una unidad que tiene un prefijo se refiere *tanto* a la unidad *como* a su prefijo. Por ejemplo, $\mu\mathrm{N}^2 = (\mu\mathrm{N})^2 = \mu\mathrm{N} \cdot \mu\mathrm{N}$. De igual manera, $\mathrm{mm}^2$ representa $(\mathrm{mm})^2 = \mathrm{mm} \cdot \mathrm{mm}$.
- Con excepción de la unidad base kilogramo, por lo general evite el uso de prefijos en el denominador de las unidades compuestas. Por ejemplo, no escriba N/mm, sino kN/m; asimismo, m/mg debe escribirse como Mm/kg.
- Cuando realice cálculos, represente los números en términos de sus *unidades base* o *derivadas* mediante la conversión de todos los prefijos a potencias de 10. De esta manera, el resultado final podrá expresarse con un *solo prefijo*. Incluso, después del cálculo es preferible mantener valores numéricos entre 0.1 y 1000; de otra forma, debe elegirse un prefijo adecuado. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(50\ \mathrm{kN})(60\ \mathrm{nm}) &= [50(10^3)\ \mathrm{N}][60(10^{-9})\ \mathrm{m}] \\ &= 3000(10^{-6})\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 3(10^{-3})\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 3\ \mathrm{mN} \cdot \mathrm{m}\end{aligned}$$

## 1.5 Cálculos numéricos



En ingeniería suelen emplearse computadoras para realizar diseños y análisis avanzados.

A menudo, el trabajo numérico en la práctica de la ingeniería se realiza mediante el uso de calculadoras portátiles y computadoras. Sin embargo, es importante que las respuestas a cualquier problema se expresen con una exactitud justificable y una cantidad apropiada de cifras significativas. En esta sección analizaremos estos temas, junto con algunos otros aspectos importantes relacionados con los cálculos en ingeniería.

**Homogeneidad dimensional.** Los términos de cualquier ecuación usada para describir un proceso físico deben ser *dimensionalmente homogéneos*; es decir, cada término debe expresarse en las mismas unidades. Siempre que éste sea el caso, todos los términos de una ecuación pueden combinarse si las variables se sustituyen por valores numéricos. Por ejemplo, considere la ecuación $s = vt + \frac{1}{2}at^2$, donde, en unidades SI, $s$ es la posición en metros, m; $t$ es el tiempo en segundos, s; $v$ es la velocidad en m/s, y $a$ es la aceleración en m/s$^2$. Sin importar la forma en que se evalúe esta ecuación, su homogeneidad dimensional se mantendrá. En la forma establecida, cada uno de los tres términos se expresa en metros $[\mathrm{m}, (\mathrm{m}/\cancel{\mathrm{s}})\,\cancel{\mathrm{s}}, (\mathrm{m}/\cancel{\mathrm{s}^2})\,\cancel{\mathrm{s}^2}]$, o al despejar $a$, $a = 2s/t^2 - 2v/t$, cada uno de los términos se expresa en unidades de m/s$^2$ [m/s$^2$, m/s$^2$, (m/s)/s].

Tenga en mente que los problemas de mecánica siempre implican la solución de ecuaciones dimensionalmente homogéneas; por lo tanto, este hecho se puede usar como una verificación parcial de las manipulaciones algebraicas de una ecuación.

**Cifras significativas.** El número de cifras significativas contenidas en cualquier número determina la exactitud de éste. Por ejemplo, el número 4981 contiene cuatro cifras significativas. Sin embargo, si hay ceros al final de un número entero, puede ser poco claro cuántas cifras significativas representa el número. Por ejemplo, 23 400 podría tener tres (234), cuatro (2340) o cinco (23 400) cifras significativas. Para evitar estas ambigüedades usaremos la *notación de ingeniería* para expresar un resultado. Lo anterior requiere que los números se redondeen al número apropiado de dígitos significativos y después se expresen en múltiplos de $(10^3)$, como $(10^3)$, $(10^6)$ o $(10^{-9})$. Por ejemplo, si 23 400 tiene cinco cifras significativas se escribe como $23.400(10^3)$, pero si sólo tiene tres cifras significativas se escribe como $23.4(10^3)$.

Si hay ceros al inicio de un número que es menor que uno, entonces los ceros no son significativos. Por ejemplo 0.00821 tiene tres cifras significativas. Con la notación de ingeniería, este número se expresa como $8.21(10^{-3})$. De igual forma, 0.000582 puede expresarse como $0.582(10^{-3})$ o $582(10^{-6})$.

**Redondeo de números.** El redondeo de un número es necesario para que la exactitud del resultado sea la misma que la de los datos del problema. Como regla general, cualquier cifra numérica que termine en cinco o más se redondea hacia arriba, y un número menor que cinco se redondea hacia abajo. Las reglas para redondear números se ilustran de mejor manera con ejemplos. Suponga que el número 3.5587 debe redondearse a *tres* cifras significativas. Como el cuarto dígito (8) es *mayor que* 5, el tercer número se redondea hacia arriba a 3.56. De la misma manera, 0.5896 se convierte en 0.590 y 9.3866 en 9.39. Si redondeamos 1.341 a tres cifras significativas, como el cuarto dígito (1) es *menor que* 5, entonces obtenemos 1.34. Asimismo 0.3762 se convierte en 0.376 y 9.871 en 9.87. Hay un caso especial para cualquier número que tiene un 5 con ceros que lo siguen. Como regla general, si el dígito que precede al 5 es un *número par*, dicho dígito *no* se redondea hacia arriba. Si el dígito que precede al 5 es un *número impar*, éste se redondea hacia arriba. Por ejemplo 75.25 redondeado a tres cifras significativas se convierte en 75.2, 0.1275 se convierte en 0.128 y 0.2555 en 0.256.

**Cálculos.** Cuando se realiza una sucesión de cálculos, se recomienda almacenar los resultados intermedios en la calculadora. En otras palabras, no redondee los cálculos hasta expresar el resultado final. Este procedimiento mantiene la precisión a través de la serie de pasos realizados hasta la solución final. Por lo general, en este texto redondearemos las respuestas a tres cifras significativas puesto que la mayoría de los datos en ingeniería mecánica, como medidas geométricas y cargas, puede medirse de manera confiable con esta exactitud.

## 1.6 Procedimiento general para el análisis



Al resolver problemas, realice el trabajo de la manera más limpia posible. La limpieza estimulará el pensamiento claro y ordenado, y viceversa.

La forma más efectiva de aprender los principios de la ingeniería mecánica es *resolver problemas*. Para tener éxito en ello, es importante siempre presentar el trabajo de una *manera lógica* y *ordenada*, como indica la siguiente serie de pasos:

- Lea el problema con cuidado y trate de correlacionar la situación física real con la teoría estudiada.
- Tabule los datos del problema y dibuje cualquier diagrama que sea necesario.
- Aplique los principios relevantes, por lo general en una forma matemática. Cuando escriba ecuaciones, asegúrese de que sean dimensionalmente homogéneas.
- Resuelva las ecuaciones necesarias y exprese la respuesta con no más de tres cifras significativas.
- Estudie la respuesta con juicio técnico y sentido común para determinar si parece razonable o no.

### Puntos importantes

- La estática es el estudio de los cuerpos que están en reposo o que se mueven con velocidad constante.
- Una partícula tiene masa pero posee un tamaño que se puede pasar por alto.
- Un cuerpo rígido no se deforma bajo carga.
- Se supone que las cargas concentradas actúan en un punto sobre un cuerpo.
- Las tres leyes del movimiento de Newton deben memorizarse.
- La masa es una medida de cantidad de materia que no cambia de una ubicación a otra.
- El peso se refiere a la atracción gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo o una cantidad de masa. Su magnitud depende de la elevación a la que se encuentra la masa.
- En el sistema SI, la unidad de fuerza, el newton, es una unidad derivada. El metro, el segundo y el kilogramo son unidades base.
- Los prefijos G, M, k, m, $\mu$ y n se usan para representar cantidades numéricas grandes y pequeñas. Es necesario conocer su tamaño exponencial junto con las reglas para usar las unidades SI.
- Realice los cálculos numéricos con varias cifras significativas, y después exprese la respuesta final con tres cifras significativas.
- Las manipulaciones algebraicas de una ecuación se pueden revisar en parte al verificar que la ecuación permanece dimensionalmente homogénea.
- Es necesario conocer las reglas para redondear números.

## EJEMPLO 1.1

Convierta 2 km/h a m/s, ¿cuánto es esto en pies/s?

### SOLUCIÓN

Como 1 km = 1000 m y 1 h = 3600 s, los factores de conversión se ordenan de la siguiente manera, para que pueda aplicarse una cancelación de unidades:

$$2\text{ km/h} = \frac{2\ \cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{1000\text{ m}}{\cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\right)$$

$$= \frac{2000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 0.556\text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

De la tabla 1-2, 1 pie = 0.3048 m. Entonces,

$$0.556\text{ m/s} = \left(\frac{0.556\ \cancel{\text{m}}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\text{ pie}}{0.3048\ \cancel{\text{m}}}\right)$$

$$= 1.82\text{ pies/s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** recuerde redondear la respuesta final a tres cifras significativas.

## EJEMPLO 1.2

Convierta las cantidades 300 lb · s y 52 slug/pie$^3$ a las unidades SI adecuadas.

### SOLUCIÓN

Con la tabla 1-2, 1 lb = 4.448 2 N.

$$300\text{ lb}\cdot\text{s} = 300\ \cancel{\text{lb}}\cdot\text{s}\left(\frac{4.448\text{ N}}{1\ \cancel{\text{lb}}}\right)$$

$$= 1334.5\text{ N}\cdot\text{s} = 1.33\text{ kN}\cdot\text{s} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como 1 slug = 14.593 8 kg y 1 pie = 0.304 8 m, entonces

$$52\text{ slug/pie}^3 = \frac{52\ \cancel{\text{slug}}}{\cancel{\text{pie}^3}}\left(\frac{14.59\text{ kg}}{1\ \cancel{\text{slug}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{pie}}}{0.304\ 8\text{ m}}\right)^3$$

$$= 26.8(10^3)\text{ kg/m}^3$$

$$= 26.8\text{ Mg/m}^3 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

1

## EJEMPLO 1.3

Evalúe cada una de las siguientes operaciones y exprese la respuesta en unidades SI con un prefijo adecuado: (a) (50 mN)(6 GN), (b) (400 mm)$(0.6 \text{ MN})^2$, (c) 45 $\text{MN}^3$/900 Gg.

### SOLUCIÓN

Primero convierta cada número a unidades base, realice las operaciones indicadas y después elija un prefijo adecuado.

**Inciso (a)**

$$
\begin{aligned}
(50 \text{ mN})(6 \text{ GN}) &= [50(10^{-3}) \text{ N}][6(10^{9}) \text{ N}] \\
&= 300(10^{6}) \text{ N}^2 \\
&= 300(10^{6}) \cancel{\text{N}^2}\left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}}\right)\left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}}\right) \\
&= 300 \text{ kN}^2 \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

**NOTA:** tenga en mente la convención $\text{kN}^2 = (\text{kN})^2 = 10^6 \text{ N}^2$.

**Inciso (b)**

$$
\begin{aligned}
(400 \text{ mm})(0.6 \text{ MN})^2 &= [400(10^{-3}) \text{ m}][0.6(10^{6}) \text{ N}]^2 \\
&= [400(10^{-3}) \text{ m}][0.36(10^{12}) \text{ N}^2] \\
&= 144(10^{9}) \text{ m} \cdot \text{N}^2 \\
&= 144 \text{ Gm} \cdot \text{N}^2 \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

También podemos escribir

$$
\begin{aligned}
144(10^{9}) \text{ m} \cdot \text{N}^2 &= 144(10^{9}) \text{ m} \cdot \cancel{\text{N}^2}\left(\frac{1 \text{ MN}}{10^6 \cancel{\text{N}}}\right)\left(\frac{1 \text{ MN}}{10^6 \cancel{\text{N}}}\right) \\
&= 0.144 \text{ m} \cdot \text{MN}^2 \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

**Inciso (c)**

$$
\begin{aligned}
\frac{45 \text{ MN}^3}{900 \text{ Gg}} &= \frac{45(10^6 \text{ N})^3}{900(10^6) \text{ kg}} \\
&= 50(10^{9}) \cancel{\text{N}^3}/\text{kg} \\
&= 50(10^{9}) \cancel{\text{N}^3}\left(\frac{1 \text{ kN}}{10^3 \cancel{\text{N}}}\right)^3 \frac{1}{\text{kg}} \\
&= 50 \text{ kN}^3/\text{kg} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}
\end{aligned}
$$

# PROBLEMAS



**1-1.** Redondee los siguientes números a tres cifras significativas: (a) 4.65735 m, (b) 55.578 s, (c) 4555 N y (d) 2768 kg.

**1-2.** Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma correcta del SI con un prefijo adecuado: (a) $\mu$MN, (b) N/$\mu$m, (c) MN/ks$^2$ y (d) kN/ms.

**1-3.** Represente cada una de las siguientes cantidades en la forma correcta del SI con un prefijo adecuado: (a) 0.000431 kg, (b) 35.3(10$^3$) N y (c) 0.00532 km.

*__1-4.__ Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma correcta del SI: (a) Mg/ms, (b) N/mm y (c) mN/(kg · $\mu$s).

**1-5.** Represente cada una de las siguientes combinaciones de unidades en la forma correcta del SI con un prefijo adecuado: (a) kN/$\mu$s, (b) Mg/mN, (c) MN/(kg · ms).

**1-6.** Represente cada una de las siguientes expresiones con tres cifras significativas y escriba cada respuesta en unidades SI con un prefijo adecuado: (a) 45 320 kN, (b) 568(10$^5$) mm y (c) 0.005 63 mg.

**1-7.** Un cohete tiene una masa de 250(10$^3$) slugs en la Tierra. Especifique (a) su masa en unidades SI y (b) su peso en unidades SI. Si el cohete está en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es $g_L$ = 5.30 pies/s$^2$, utilice tres cifras significativas para determinar (c) su peso en unidades SI y (d) su masa en unidades SI.

*__1-8.__ Si un automóvil viaja a 55 mi/h, determine su velocidad en kilómetros por hora y metros por segundo.

**1-9.** El *pascal* (Pa) es en realidad una unidad muy pequeña de presión. Para demostrar esto, convierta 1 Pa = 1 N/m$^2$ a lb/pie$^2$. La presión atmosférica al nivel del mar es de 14.7 lb/pulg$^2$. ¿A cuántos pascales equivale esto?

**1-10.** ¿Cuál es el peso en newtons de un objeto que tiene una masa de: (a) 10 kg, (b) 0.5 g y (c) 4.50 Mg? Exprese el resultado con tres cifras significativas. Utilice un prefijo adecuado.

**1-11.** Realice cada una de las siguientes operaciones y exprese la respuesta con tres cifras significativas, utilice el sistema de unidades SI con un prefijo adecuado: (a) 354 mg(45 km)/(0.0356 kN), (b) (0.004 53 Mg)(201 ms) y (c) 435 MN/23.2 mm.

*__1-12.__ El peso específico (peso/volumen) del latón es de 520 lb/pie$^3$. Determine su densidad (masa/volumen) en unidades SI. Utilice un prefijo adecuado.

**1-13.** Realice cada una de las siguientes conversiones con tres cifras significativas: (a) 20 lb · pie a N · m, (b) 450 lb/pie$^3$ a kN/m$^3$ y (c) 15 pies/h a mm/s.

**1-14.** La densidad (masa/volumen) del aluminio es de 5.26 slug/pie$^3$. Determine su densidad en unidades SI. Emplee un prefijo adecuado.

**1-15.** El agua tiene una densidad de 1.94 slug/pie$^3$. ¿Cuál es su densidad expresada en unidades SI? Exprese la respuesta con tres cifras significativas.

*__1-16.__ Dos partículas tienen una masa de 8 kg y 12 kg, respectivamente. Si están separadas por una distancia de 800 mm, determine la fuerza de gravedad que actúa entre ellas. Compare este resultado con el peso de cada partícula.

**1-17.** Determine la masa en kilogramos de un objeto que tiene un peso de (a) 20 mN, (b) 150 kN y (c) 60 MN. Exprese la respuesta con tres cifras significativas.

**1-18.** Evalúe cada una de las siguientes operaciones y exprese la respuesta en unidades SI con tres cifras significativas; utilice el prefijo adecuado: (a) (200 kN)$^2$, (b) (0.005 mm)$^2$ y (c) (400 m)$^3$.

**1-19.** Utilice las unidades base del sistema SI para mostrar que la ecuación 1-2 es dimensionalmente homogénea y que da el valor de $F$ en newtons. Determine con tres cifras significativas la fuerza gravitacional que actúa entre dos esferas que se tocan una a la otra. La masa de cada esfera es de 200 kg y su radio es de 300 mm.

*__1-20.__ Realice cada una de las siguientes operaciones y exprese la respuesta con tres cifras significativas, en unidades SI y emplee un prefijo adecuado: (a) (0.631 Mm)/(8.60 kg)$^2$ y (b) (35 mm)$^2$(48 kg)$^3$.

**1-21.** Calcule (204 mm)(0.00457 kg)/(34.6 N) con tres cifras significativas y exprese la respuesta en unidades SI con un prefijo apropiado.



Esta torre de un puente se estabiliza mediante cables que ejercen fuerzas en los puntos de conexión. En el presente capítulo mostraremos cómo expresar estas fuerzas en la forma de vectores cartesianos y cómo determinar la fuerza resultante.

# Vectores fuerza

# 2

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo se suman las fuerzas y cómo se obtienen sus componentes con la ley del paralelogramo.
- Expresar una fuerza y su posición en forma de un vector cartesiano y explicar cómo se determina la magnitud y la dirección del vector.
- Presentar el producto punto a fin de determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.

## 2.1 Escalares y vectores

Todas las cantidades físicas en ingeniería mecánica pueden medirse mediante escalares o vectores.

**Escalar.** Un *escalar* es cualquier cantidad física positiva o negativa que se puede especificar por completo mediante su *magnitud*. La longitud, la masa y el volumen son ejemplos de cantidades escalares.

**Vector.** Un *vector* es cualquier cantidad física que requiere tanto de *magnitud* como de *dirección* para su descripción completa. En estática, algunas cantidades vectoriales encontradas con frecuencia son fuerza, posición y momento. Un vector se representa gráficamente mediante una flecha. La longitud de la flecha representa la *magnitud* del vector y el ángulo $\theta$ entre el vector y un eje fijo define la *dirección de su línea de acción*. La cabeza o punta de la flecha indica el *sentido de dirección* del vector, como se ve en la figura 2-1.

En trabajos impresos, las cantidades vectoriales se representan mediante caracteres en negritas como **A**, mientras que la magnitud del vector se escribe con letras itálicas, $A$. Para trabajos manuscritos, casi siempre es conveniente denotar una cantidad vectorial con sólo dibujar una flecha sobre el carácter, $\vec{A}$.

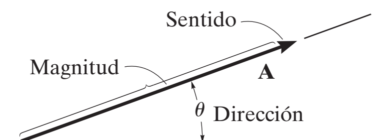
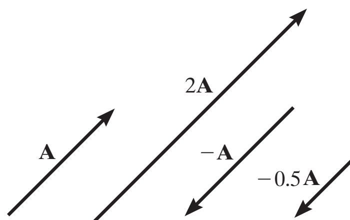



**Fig. 2-1**

2

## 2.2 Operaciones vectoriales




Multiplicación y división escalar

**Fig. 2-2**

**Multiplicación y división de un vector por un escalar.** Si un vector se multiplica por un escalar positivo, su magnitud se incrementa en esa cantidad. Cuando se multiplica por un escalar negativo también cambiará el sentido de la dirección del vector. En la figura 2-2 se muestran ejemplos gráficos de estas operaciones.

**Suma de vectores.** Todas las cantidades vectoriales obedecen la *ley del paralelogramo para la suma*. A manera de ilustración, los dos *vectores* "*componentes*" **A** y **B** de la figura 2-3*a* se suman para formar un *vector* "*resultante*" **R** = **A** + **B** mediante el siguiente procedimiento:

- Primero, una las colas de los componentes en un punto de manera que se hagan concurrentes, figura 2-3*b*.
- Desde la cabeza de **B**, dibuje una línea paralela a **A**. Dibuje otra línea desde la cabeza de **A** que sea paralela a **B**. Estas dos líneas se intersecan en el punto *P* para formar los lados adyacentes de un paralelogramo.
- La diagonal de este paralelogramo que se extiende hasta *P* forma **R**, la cual representa al vector resultante **R** = **A** + **B**, figura 2-3*c*.

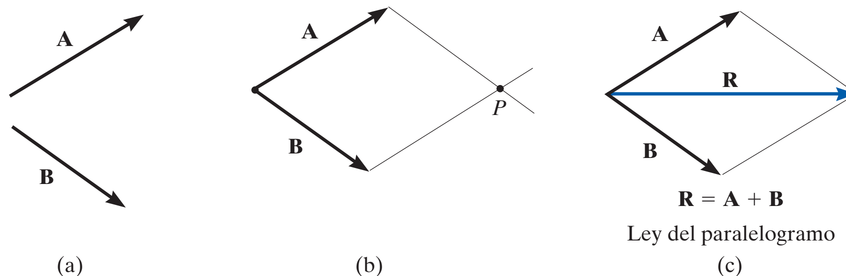



**Fig. 2-3**

También podemos sumar **B** a **A**, figura 2-4*a*, mediante la *regla del triángulo*, que es un caso especial de la ley del paralelogramo, donde el vector **B** se suma al vector **A** en una forma de "cabeza a cola", es decir, se conecta la cabeza de **A** a la cola de **B**, figura 2-4*b*. La resultante **R** se extiende desde la cola de **A** hasta la cabeza de **B**. De la misma manera, **R** también se puede obtener al sumar **A** y **B**, figura 2-4*c*. Por comparación, se ve que la suma vectorial es conmutativa; en otras palabras, los vectores pueden sumarse en cualquier orden, es decir, **R** = **A** + **B** = **B** + **A**.

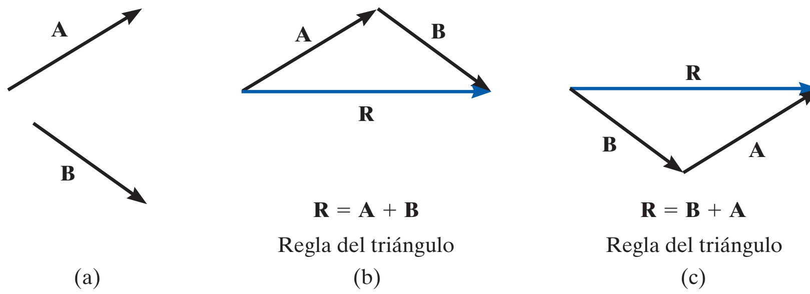



**Fig. 2-4**

Como un caso especial, si los dos vectores **A** y **B** son *colineales*, es decir, ambos tienen la misma línea de acción, la ley del paralelogramo se reduce a una *suma algebraica* o *suma escalar* $R = A + B$, como se muestra en la figura 2-5.

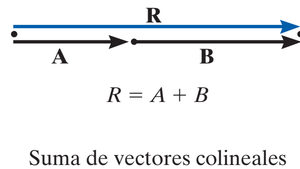



**Fig. 2-5**

**Resta de vectores.** La *diferencia* resultante entre dos vectores **A** y **B** del mismo tipo puede expresarse como

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

Esta suma de vectores se muestra de manera gráfica en la figura 2-6. Puesto que la resta se define como un caso especial de la suma, las reglas de la suma de vectores también se aplican a la resta vectorial.

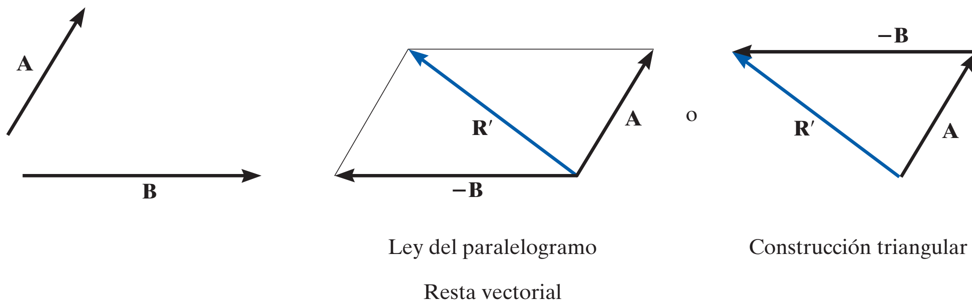
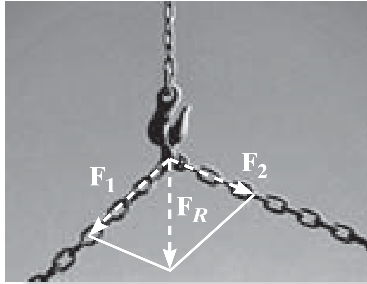



**Fig. 2-6**

2

## 2.3 Suma vectorial de fuerzas




La ley del paralelogramo debe usarse para determinar la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre el gancho.

La evidencia experimental ha mostrado que una fuerza es una cantidad vectorial ya que tiene una magnitud específica, dirección y sentido, y que se suma de acuerdo con la ley del paralelogramo. Dos problemas comunes en estática implican encontrar la fuerza resultante, conocer sus componentes, o descomponer una fuerza conocida en dos componentes. A continuación describiremos cómo se resuelve cada uno de estos problemas mediante la aplicación de la ley del paralelogramo.

**Determinación de una fuerza resultante.** Las dos fuerzas componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre el pasador de la figura 2-7*a* se pueden sumar para formar la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, como se muestra en la figura 2-7*b*. A partir de esta construcción, o mediante el uso de la regla del triángulo, figura 2-7*c*, podemos aplicar la ley de los cosenos o la ley de los senos al triángulo, a fin de obtener la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

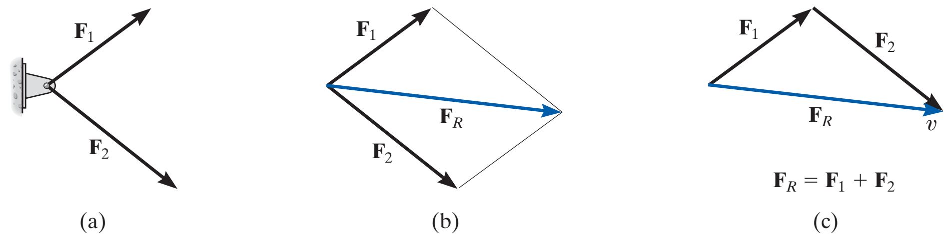
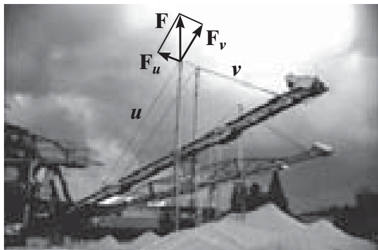



**Fig. 2-7**




Mediante el uso de la ley del paralelogramo, la fuerza **F** causada por el elemento vertical puede separarse en componentes que actúan a lo largo de los cables de suspensión *a* y *b*.

**Determinación de las componentes de una fuerza.** En ocasiones es necesario separar una fuerza en dos *componentes* a fin de estudiar su efecto de jalón o de empuje en dos direcciones específicas. Por ejemplo, en la figura 2-8*a*, **F** debe separarse en dos componentes a lo largo de los dos elementos, definidos por los ejes $u$ y $v$. Para determinar la magnitud de cada componente, primero se construye un paralelogramo, con líneas que inician desde la punta de **F**, una línea paralela a $u$, y otra línea paralela a $v$. Después, estas líneas se intersecan con los ejes $v$ y $u$ para formar un paralelogramo. Las componentes de fuerza $\mathbf{F}_u$ y $\mathbf{F}_v$ se establecen simplemente al unir la cola de **F** con los puntos de intersección en los ejes $u$ y $v$, como aparece en la figura 2-8*b*. Después, este paralelogramo puede reducirse a una figura geométrica que representa la regla del triángulo, figura 2-8*c*. Con base en esto, se puede aplicar la ley de los senos para determinar las magnitudes desconocidas de las componentes.

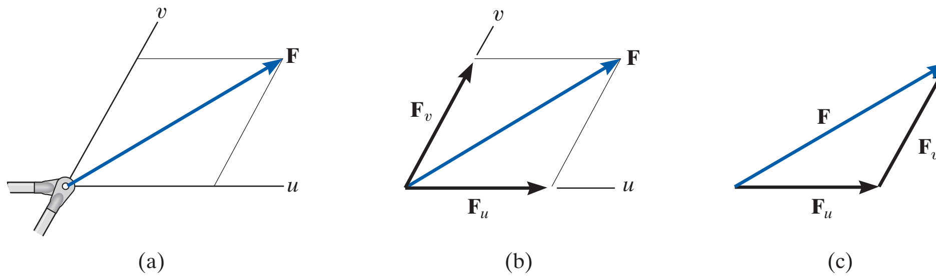



**Fig. 2-8**

**Suma de varias fuerzas.** Si deben sumarse más de dos fuerzas, pueden llevarse a cabo aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo para obtener la fuerza resultante. Por ejemplo, si tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ actúan en un punto *O*, figura 2-9, se calcula la resultante de dos cualesquiera de las fuerzas, digamos $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, y luego esta resultante se suma a la tercera fuerza, dando la resultante de las tres fuerzas; es decir. $\mathbf{F}_R = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_3$. La aplicación de la ley del paralelogramo para sumar más de dos fuerzas, como se muestra aquí, a menudo requiere de extensos cálculos geométricos y trigonométricos para determinar los valores numéricos de la magnitud y la dirección de la resultante. En vez de ello, los problemas de este tipo pueden resolverse con facilidad mediante el "método de las componentes rectangulares", el cual se explica en la sección 2.4.

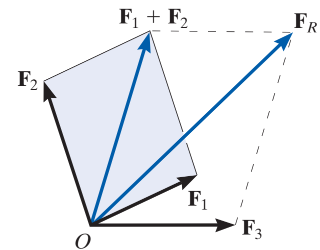
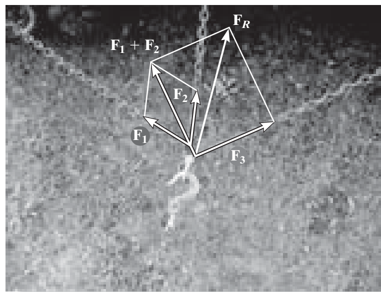
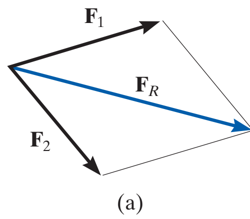



**Fig. 2-9**

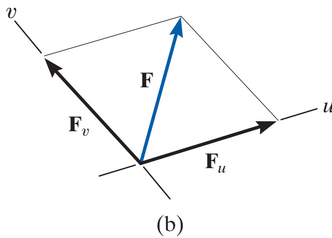



La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ sobre el gancho requiere la suma de $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; después, esta resultante se suma a $\mathbf{F}_3$.

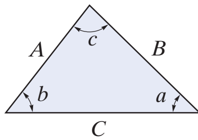
¿Checar bien esta figura?




(a)




(b)




Ley de los cosenos:

$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos c}$

Ley de los senos:

$\dfrac{A}{\text{sen } a} = \dfrac{B}{\text{sen } b} = \dfrac{C}{\text{sen } c}$

(c)

**Fig. 2-10**

## Procedimiento para el análisis

Los problemas que implican la suma de dos fuerzas pueden resolverse como sigue:

### Ley del paralelogramo.

- Las dos fuerzas "componentes" $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la figura 2-10*a* se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo, lo que produce una fuerza *resultante* $\mathbf{F}_R$ que forma la diagonal del paralelogramo.
- Si una fuerza $\mathbf{F}$ debe separarse en *componentes* a lo largo de dos ejes $u$ y $v$, figura 2-10*b*, entonces comience en la cabeza de la fuerza $\mathbf{F}$ y construya líneas paralelas a los ejes, para formar de esta manera el paralelogramo. Los lados del paralelogramo representan las componentes, $\mathbf{F}_u$ y $\mathbf{F}_v$.
- Marque todas las magnitudes de fuerzas conocidas y desconocidas y los ángulos sobre el croquis; asimismo, identifique las dos incógnitas como la magnitud y la dirección de $\mathbf{F}_R$, o las magnitudes de sus componentes.

### Trigonometría.

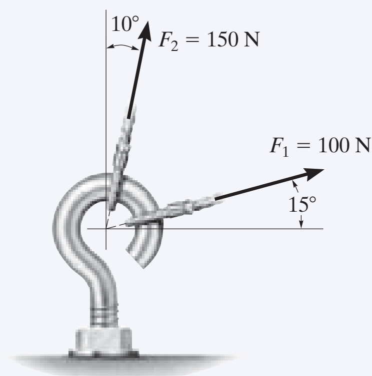
- Dibuje de nuevo la mitad del paralelogramo para ilustrar la suma triangular de cabeza a cola de las componentes.
- A partir de este triángulo, la magnitud de la fuerza resultante puede determinarse con la ley de los cosenos, y su dirección mediante la ley de los senos. Las magnitudes de las dos componentes de fuerza se determinan a partir de la ley de los senos. Las fórmulas se dan en la figura 2-10*c*.

## Puntos importantes

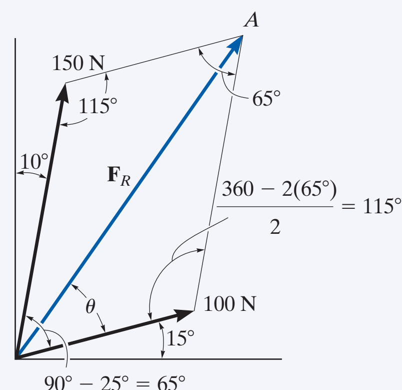
- Un escalar es un número positivo o negativo.
- Un vector es una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido.
- La multiplicación o la división de un vector por, o entre, un escalar cambiará la magnitud del vector. El sentido del vector cambiará si el escalar es negativo.
- Como un caso especial, si los vectores son colineales, la resultante se forma mediante una suma algebraica o escalar.

## EJEMPLO 2.1

La armella roscada de la figura 2-11*a* está sometida a dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.




(a)



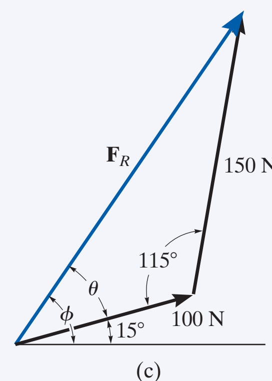

(b)

### SOLUCIÓN

**Ley del paralelogramo.** El paralelogramo se forma al dibujar una línea desde la cabeza de $\mathbf{F}_1$ que sea paralela a $\mathbf{F}_2$, y otra línea desde la cabeza de $\mathbf{F}_2$ que sea paralela a $\mathbf{F}_1$. La fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ se extiende hacia el lugar donde estas líneas se intersecan en el punto $A$, figura 2-11*b*. Las dos incógnitas son la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y el ángulo $\theta$ (teta).

**Trigonometría.** A partir del paralelogramo, se construye el triángulo vectorial, figura 2-11*c*. Mediante la ley de los cosenos

$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115^\circ}$$
$$= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6\text{ N}$$
$$= 213\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

**Fig. 2-11**

El ángulo $\theta$ se determina al aplicar la ley de los senos,

$$\frac{150\text{ N}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\operatorname{sen} 115^\circ} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}}(\operatorname{sen} 115^\circ)$$
$$\theta = 39.8^\circ$$

Así, la dirección $\phi$ (fi) de $\mathbf{F}_R$, medida desde la horizontal, es

$$\phi = 39.8^\circ + 15.0^\circ = 54.8^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** los resultados parecen razonables, puesto que la figura 2-11*b* muestra que $\mathbf{F}_R$ tiene una magnitud más grande que sus componentes y una dirección que se encuentra entre éstas.

2

## EJEMPLO 2.2

Descomponga la fuerza horizontal de 600 lb que se muestra en la figura 2-12*a* en componentes que actúan a lo largo de los ejes *u* y *v*, y determine las magnitudes de estas componentes.

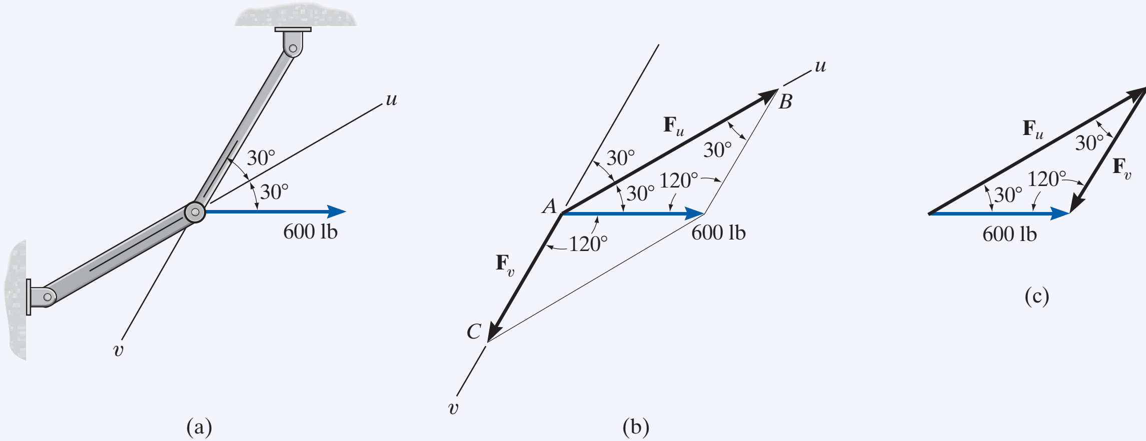



**Fig. 2-12**

### SOLUCIÓN

El paralelogramo se construye al extender una línea paralela al eje *v*, desde la *cabeza* de la fuerza de 600 lb hasta que interseca el eje *u* en el punto *B*, figura 2-12*b*. La flecha desde *A* hasta *B* representa $\mathbf{F}_u$. Del mismo modo, la línea que se extiende desde la cabeza de la fuerza de 600 lb dibujada en forma paralela al eje *u* interseca el eje *v* en el punto *C*, de donde se obtiene $\mathbf{F}_v$.

En la figura 2-12*c* se muestra la suma vectorial cuando se usa la regla del triángulo. Las dos incógnitas son las magnitudes de $\mathbf{F}_u$ y $\mathbf{F}_v$. Al aplicar la ley de los senos,

$$\frac{F_u}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{600 \text{ lb}}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$F_u = 1039 \text{ lb}$$ ***Resp.***

$$\frac{F_v}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{600 \text{ lb}}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$F_v = 600 \text{ lb}$$ ***Resp.***

**NOTA:** el resultado para $F_u$ muestra que en ocasiones una componente puede tener una mayor magnitud que la resultante.

## EJEMPLO 2.3

Determine la magnitud de la fuerza componente **F** en la figura 2-13*a* y la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ si $\mathbf{F}_R$ está dirigida a lo largo del eje positivo *y*.

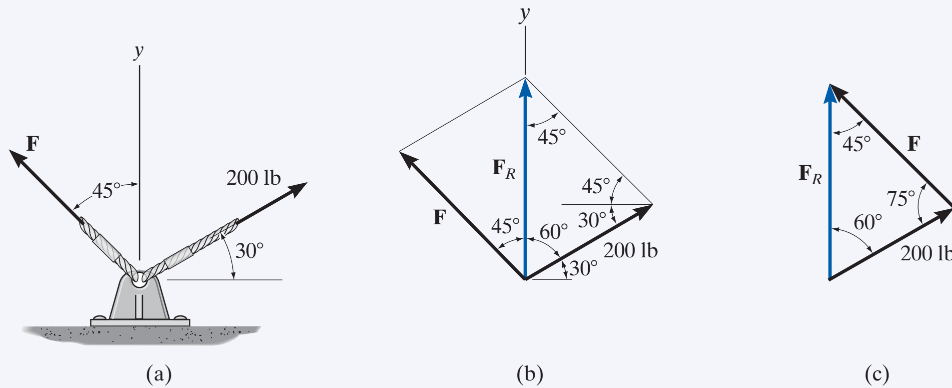



**Fig. 2-13**

### SOLUCIÓN

En la figura 2-13*b* se muestra la ley del paralelogramo para la suma, y en la figura 2-13*c* la regla del triángulo. Las magnitudes de $\mathbf{F}_R$ y **F** son las dos incógnitas. Éstas pueden determinarse mediante la aplicación de la ley de los senos.

$$\frac{F}{\text{sen } 60°} = \frac{200 \text{ lb}}{\text{sen } 45°}$$

$$F = 245 \text{ lb}$$ ***Resp.***

$$\frac{F_R}{\text{sen } 75°} = \frac{200 \text{ lb}}{\text{sen } 45°}$$

$$F_R = 273 \text{ lb}$$ ***Resp.***

2

## EJEMPLO 2.4

Se requiere que la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada de la figura 2-14*a* esté dirigida a lo largo del eje positivo *x* y que $\mathbf{F}_2$ tenga una magnitud *mínima*. Determine esta magnitud, el ángulo $\theta$ y la fuerza resultante correspondiente.

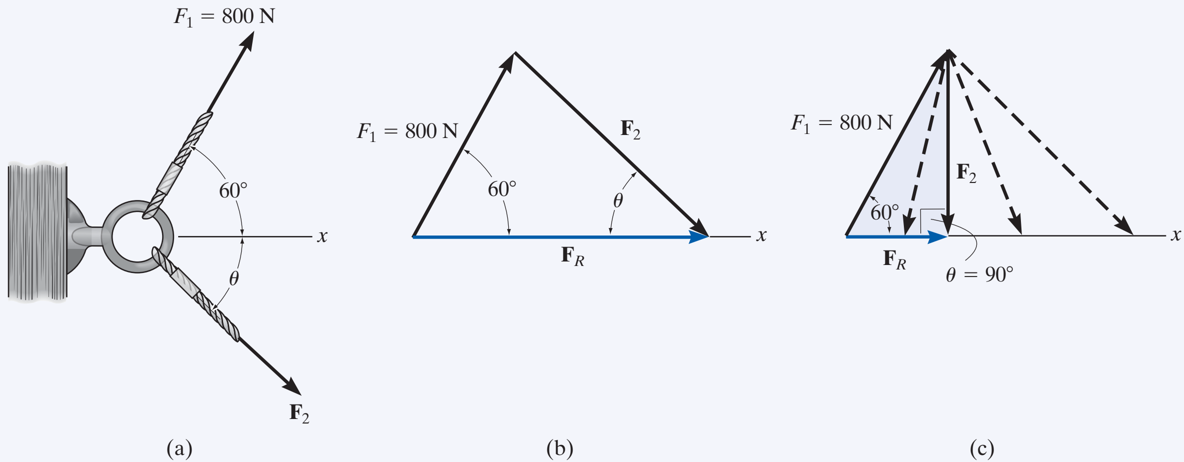



**Fig. 2-14**

### SOLUCIÓN

En la figura 2-14*b* se muestra la regla del triángulo para $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Como las magnitudes (longitudes) de $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{F}_2$ no están especificadas, entonces $\mathbf{F}_2$ puede ser en realidad cualquier vector cuya cabeza toque la línea de acción de $\mathbf{F}_R$, figura 2-14*c*. Sin embargo, como se muestra en la figura, la magnitud de $\mathbf{F}_2$ es un *mínimo* o tiene la longitud más corta cuando su línea de acción es perpendicular a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$, es decir, cuando

$$\theta = 90^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

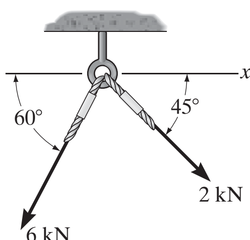
Como la suma vectorial ahora forma un triángulo rectángulo, las dos magnitudes desconocidas se pueden obtener por trigonometría.

$$F_R = (800\text{ N})\cos 60^\circ = 400\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$F_2 = (800\text{ N})\text{sen } 60^\circ = 693\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

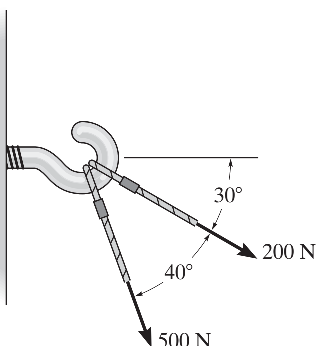
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES*

**F2-1.** Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje *x*.



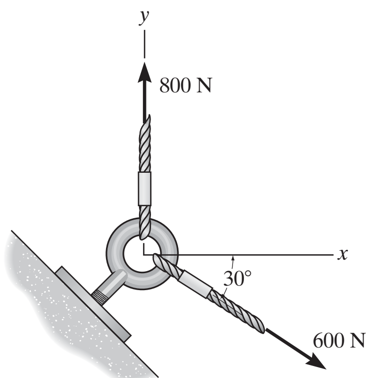

F2-1

**F2-2.** Dos fuerzas actúan sobre el gancho. Determine la magnitud de la fuerza resultante.



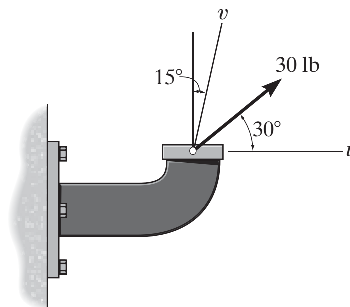

F2-2

**F2-3.** Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje *x* positivo.



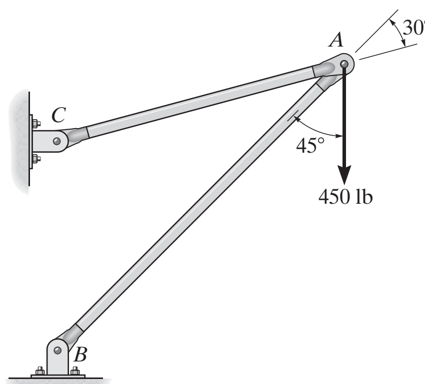

F2-3

**F2-4.** Descomponga la fuerza de 30 lb en componentes a lo largo de los ejes *u* y *v*; además, determine la magnitud de cada una de estas componentes.



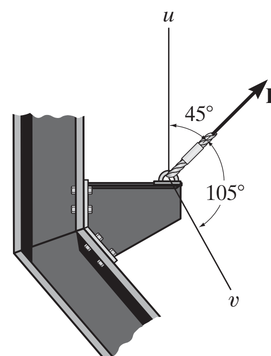

F2-4

**F2-5.** La fuerza $F = 450$ lb actúa sobre la estructura. Descomponga esta fuerza en componentes que actúan a lo largo de los elementos *AB* y *AC*; además, determine la magnitud de cada componente.




F2-5

**F2-6.** Si la fuerza **F** debe tener una componente a lo largo del eje *u* con magnitud $F_u = 6$ kN, determine la magnitud de **F** y la magnitud de su componente $\mathbf{F}_v$ a lo largo del eje *v*.




F2-6

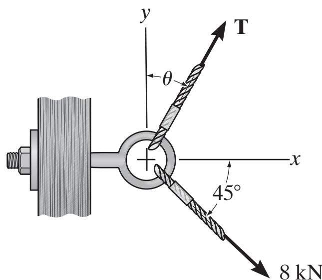
* Al final del libro se proporcionan soluciones parciales y respuestas a todos los problemas fundamentales.

## PROBLEMAS

•**2-1.** Si $\theta = 30°$ y $T = 6$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

**2-2.** Si $\theta = 60°$ y $T = 5$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella roscada y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje positivo $x$.

**2-3.** Si la magnitud de la fuerza resultante debe ser de 9 kN dirigida a lo largo del eje $x$ positivo, determine la magnitud de la fuerza **T** que actúa sobre la armella roscada y su ángulo $\theta$.

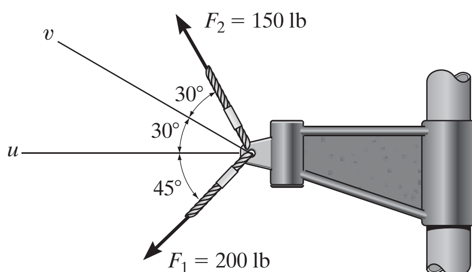



**Probs. 2-1/2/3**

*__2-4.__ Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula y su dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $u$ positivo.

•**2-5.** Resuelva la fuerza $\mathbf{F}_1$ en componentes a lo largo de los ejes $u$ y $v$; además, determine las magnitudes de estas componentes.

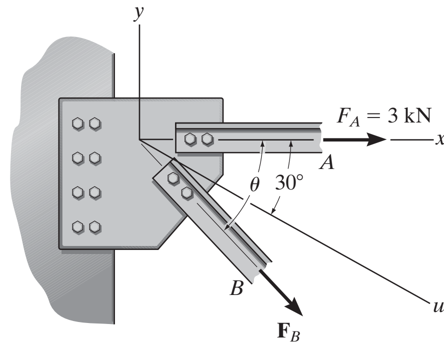
**2-6.** Resuelva la fuerza $\mathbf{F}_2$ en componentes a lo largo de los ejes $u$ y $v$; además, determine las magnitudes de estas componentes.




**Probs. 2-4/5/6**

**2-7.** Si $F_B = 2$ kN y la fuerza resultante actúa a lo largo del eje $u$ positivo, determine la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo $\theta$.

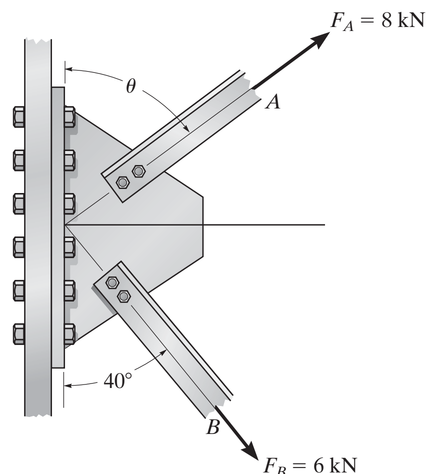
*__2-8.__ Si se requiere que la fuerza resultante actúe a lo largo del eje $u$ positivo y que tenga una magnitud de 5 kN, determine la magnitud requerida de $\mathbf{F}_B$ y su dirección $\theta$.




**Probs. 2-7/8**

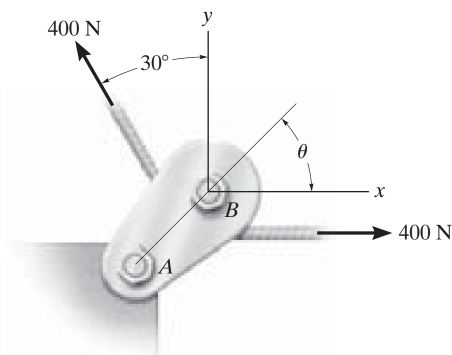
•**2-9.** La placa está sometida a las dos fuerzas $A$ y $B$, como se muestra en la figura. Si $\theta = 60°$, determine la magnitud de la resultante de esas dos fuerzas y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde la horizontal.

**2-10.** Determine el ángulo de $\theta$ para conectar el elemento $A$ a la placa, de manera que la fuerza resultante de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ esté dirigida horizontalmente hacia la derecha. Incluso, ¿cuál es la magnitud de la fuerza resultante?




**Probs. 2-9/10**

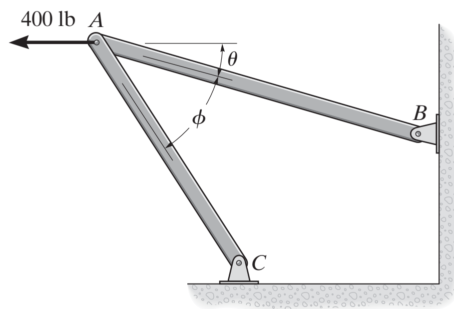
**2-11.** Si la tensión en el cable es de 400 N, determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante que actúa sobre la polea. Este ángulo es el mismo ángulo $\theta$ que forma la línea $AB$ sobre el bloque de escalera.




**Prob. 2-11**

**2-14.** Determine el ángulo de diseño $\theta$ ($0° \leq \theta \leq 90°$) para la barra $AB$ de manera que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 500 lb dirigida de $A$ hacia $C$. ¿Cuál es la componente de fuerza que actúa a lo largo del elemento $AB$? Considere $\phi = 40°$.

**2-15.** Determine el ángulo de diseño $\phi$ ($0° \leq \phi \leq 90°$) entre las barras $AB$ y $AC$, de manera que la fuerza horizontal de 400 lb tenga una componente de 600 lb que actúa hacia arriba y a la izquierda, en la misma dirección que de $B$ hacia $A$. Considere que $\theta = 30°$.

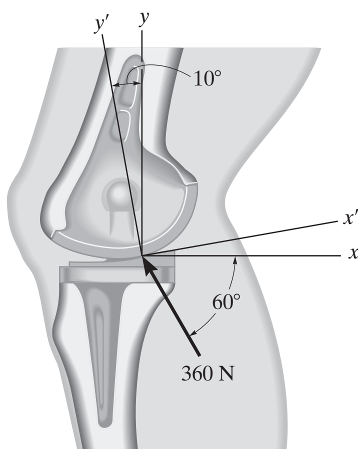



**Probs. 2-14/15**

2

*__2-12.__ El dispositivo se usa para sustituir en forma quirúrgica la rótula de la rodilla. Si la fuerza que actúa a lo largo de la pierna es de 360 N, determine sus componentes a lo largo de los ejes $x$ y $y'$.

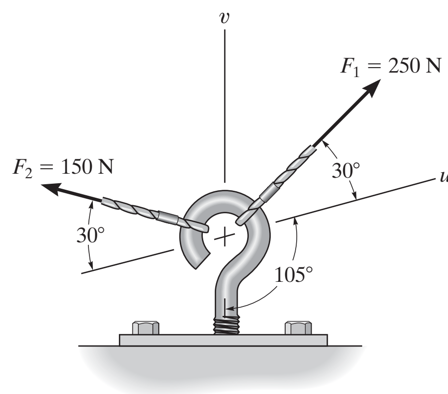
•**2-13.** El dispositivo se usa para sustituir en forma quirúrgica la rótula de la rodilla. Si la fuerza que actúa a lo largo de la pierna es de 360 N, determine sus componentes a lo largo de los ejes $x'$ y $y$.




**Probs. 2-12/13**

*__2-16.__ Descomponga $\mathbf{F}_1$ en sus componentes a lo largo de los ejes $u$ y $v$, y determine las magnitudes de estas componentes.

•**2-17.** Descomponga $\mathbf{F}_2$ en sus componentes a lo largo de los ejes $u$ y $v$, y determine las magnitudes de estas componentes.

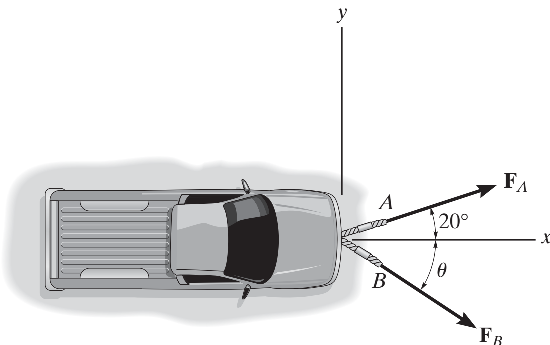



**Probs. 2-16/17**

2

**2-18.** El camión se va a remolcar con dos cuerdas. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ que actúan en cada cuerda para desarrollar una fuerza resultante de 950 N dirigida a lo largo del eje $x$ positivo. Considere que $\theta = 50°$.

**2-19.** El camión se va a remolcar con dos cuerdas. Si la fuerza resultante debe ser de 950 N, dirigida a lo largo del eje $x$ positivo, determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ que actúan en cada cuerda y el ángulo $\theta$ de $\mathbf{F}_B$ de manera que la magnitud de $\mathbf{F}_B$ sea un *mínimo*. $\mathbf{F}_A$ actúa a 20° medidos desde el eje $x$, como se muestra en la figura.

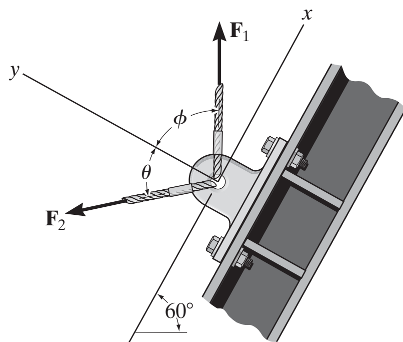



**Probs. 2-18/19**

*__2-20.__ Si $\phi = 45°$, $F_1 = 5$ kN, y la fuerza resultante es 6 kN dirigida a lo largo del eje $y$ positivo, determine la magnitud requerida de $\mathbf{F}_2$ y su dirección $\theta$.

•**2-21.** Si $\phi = 30°$ y la fuerza resultante debe ser de 6 kN y estar dirigida a lo largo del eje $y$ positivo, determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y el ángulo $\theta$ si se requiere que $F_2$ sea mínima.

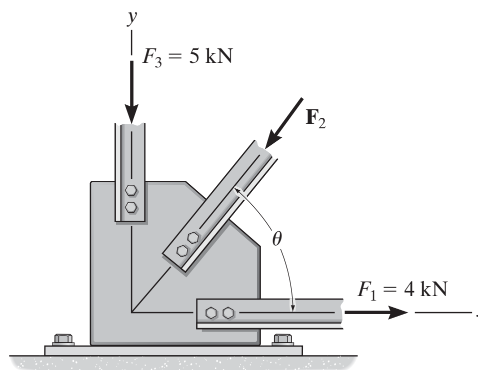
**2-22.** Si $\phi = 30°$, $F_1 = 5$ kN y la fuerza resultante debe estar dirigida a lo largo del eje $y$ positivo, determine la magnitud de la fuerza resultante si $F_2$ debe ser mínima. Incluso, ¿qué son $F_2$ y el ángulo $\theta$?




**Probs. 2-20/21/22**

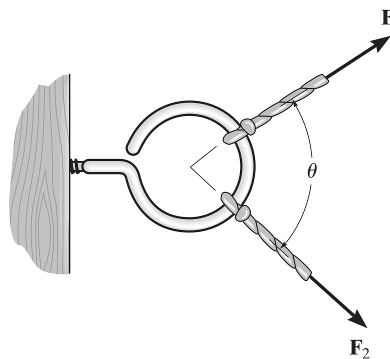
**2-23.** Si $\theta = 30°$ y $F_2 = 6$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la placa y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

*__2-24.__ Si la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ está dirigida a lo largo de una línea a 75° del eje $x$ positivo, medidos en el sentido de las manecillas del reloj, y se sabe que la magnitud de $\mathbf{F}_2$ debe ser mínima, determine las magnitudes de $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{F}_2$ y del ángulo $\theta \leq 90°$.




**Probs. 2-23/24**

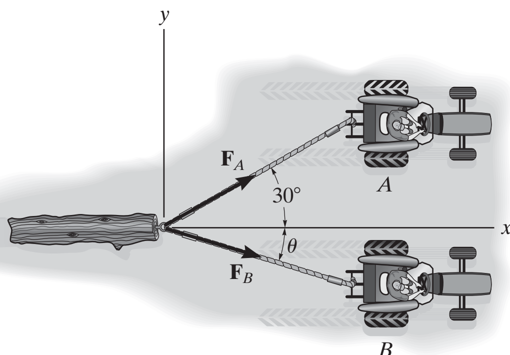
•**2-25.** Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre la armella roscada. Si sus líneas de acción están separadas por un ángulo $\theta$ y la magnitud de cada fuerza es $F_1 = F_2 = F$, determine la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{F}_1$.




**Prob. 2-25**

**2-26.** El tronco de un árbol es remolcado por dos tractores $A$ y $B$. Determine la magnitud de las dos fuerzas de remolque $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ si se requiere que la fuerza resultante tenga una magnitud $F_R = 10$ kN y esté dirigida a lo largo del eje $x$. Considere que $\theta = 15°$.

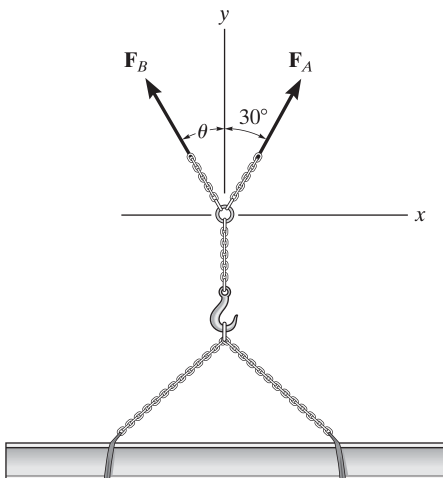
**2-27.** Si la resultante $\mathbf{F}_R$ de las dos fuerzas que actúan sobre el tronco debe estar dirigida a lo largo del eje $x$ positivo y tener una magnitud de 10 kN, determine el ángulo $\theta$ del cable unido a $B$ de modo que la fuerza $\mathbf{F}_B$ en este cable sea mínima. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en cada cable para esta situación?




**Probs. 2-26/27**

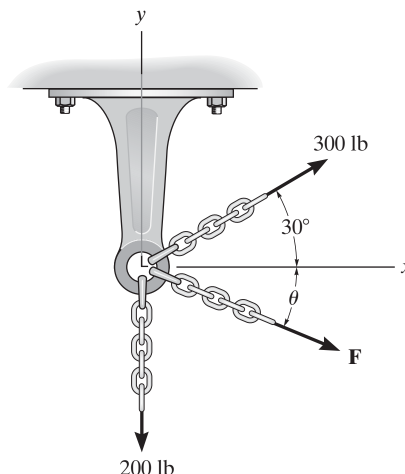
*__2-28.__ Se va a levantar una viga mediante dos cadenas. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ que actúan sobre cada cadena para que desarrollen una fuerza resultante de 600 N dirigida a lo largo del eje $y$ positivo. Considere que $\theta = 45°$.

•**2-29.** La viga se va a levantar con dos cadenas. Si la fuerza resultante debe ser de 600 N dirigida a lo largo del eje $y$ positivo, determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ sobre cada cadena y el ángulo $\theta$ de $\mathbf{F}_B$ de manera que la magnitud de $\mathbf{F}_B$ sea *mínima*. $\mathbf{F}_A$ actúa a 30° desde el eje $y$, como se muestra en la figura.



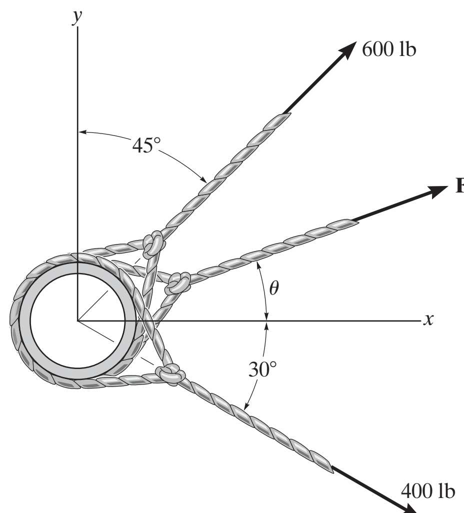

**Probs. 2-28/29**

**2-30.** Tres cadenas actúan sobre la ménsula de forma que generan una fuerza resultante con una magnitud de 500 lb. Si dos de las cadenas están sometidas a fuerzas conocidas, como se muestra en la figura, determine el ángulo $\theta$ de la tercera cadena, medido en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo, de manera que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ en esta cadena sea *mínima*. Todas las fuerzas se encuentran en el plano $x$-$y$. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}$? *Sugerencia:* encuentre primero la resultante de las dos fuerzas conocidas. La fuerza $\mathbf{F}$ actúa en esta dirección.




**Prob. 2-30**

**2-31.** Tres cables jalan un tubo de forma que generan una fuerza resultante con magnitud de 900 lb. Si dos de los cables están sometidos a fuerzas conocidas, como se muestra en la figura, determine el ángulo $\theta$ del tercer cable de modo que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ en este cable sea *mínima*. Todas las fuerzas se encuentran en el plano $x$-$y$. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}$? *Sugerencia:* encuentre primero la resultante de las dos fuerzas conocidas.

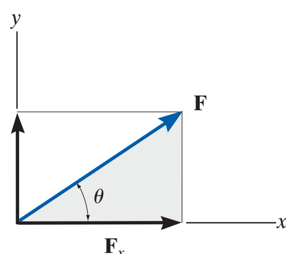



**Prob. 2-31**

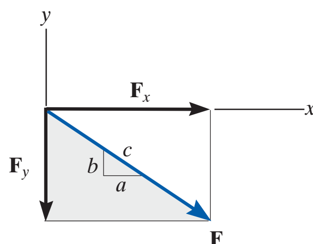
2

## 2.4 Suma de un sistema de fuerzas coplanares

Cuando una fuerza se descompone en dos componentes a lo largo de los ejes $x$ y $y$, dichas componentes suelen denominarse *componentes rectangulares*. Para el trabajo analítico, podemos representar estos componentes en una de dos formas, mediante notación escalar, o por notación vectorial cartesiana.




(a)




(b)

**Fig. 2-15**

**Notación escalar.** Las componentes rectangulares de la fuerza **F** que se muestran en la figura 2-15*a* se encuentran al utilizar la ley del paralelogramo, de manera que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$. Como estas componentes forman un triángulo rectángulo, sus magnitudes se pueden determinar a partir de

$$F_x = F\cos\theta \qquad \text{y} \qquad F_y = \text{sen}\ \theta$$

Sin embargo, en vez de usar el ángulo $\theta$, la dirección de **F** también se puede definir mediante un pequeño triángulo de "pendiente", como el que se muestra en la figura 2-15*b*. Como este triángulo y el triángulo sombreado más grande son semejantes, la longitud proporcional de los lados da

$$\frac{F_x}{F} = \frac{a}{c}$$

o bien

$$F_x = F\left(\frac{a}{c}\right)$$

ya

$$\frac{F_y}{F} = \frac{b}{c}$$

o

$$F_y = -F\left(\frac{b}{c}\right)$$

Aquí, la componente $y$ es un escalar negativo puesto que $\mathbf{F}_y$ está dirigida a lo largo del eje $y$ negativo.

Es importante tener en mente que esta notación escalar positiva y negativa se usa sólo para propósitos de cálculo, no para representaciones gráficas en las figuras. A lo largo de este libro, la *cabeza de un vector representado por una flecha* en cualquier figura indica el sentido del vector *gráficamente*; los signos algebraicos no se usan para este fin. Así, los vectores en las figuras 2-15*a* y 2-15*b* se designan mediante el uso de notación (vectorial) en negritas*. Siempre que se escriban símbolos cursivos cerca de flechas vectoriales en las figuras, éstos indicarán la *magnitud* del vector, la cual *siempre* es una cantidad *positiva*.

*Los signos negativos se usan en figuras con notación en negritas sólo cuando se muestran pares de vectores iguales pero opuestos, como en la figura 2-2.

**Notación vectorial cartesiana.** También es posible representar las componentes $x$ y $y$ de una fuerza en términos de vectores unitarios cartesianos **i** y **j**. Cada uno de estos vectores unitarios tiene una magnitud adimensional de uno, y por lo tanto pueden usarse para designar las *direcciones* de los ejes $x$ y $y$, respectivamente, figura 2-16.*

Como la *magnitud* de cada componente de **F** es *siempre una cantidad positiva*, la cual está representada por los escalares (positivos) $F_x$ y $F_y$, entonces podemos expresar **F** como un *vector cartesiano*.

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

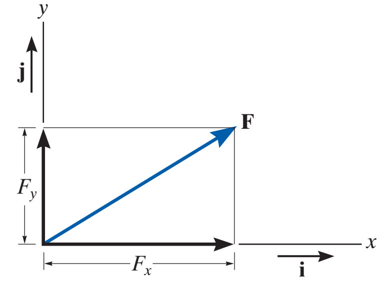



Fig. 2-16

**Resultantes de fuerzas coplanares.** Podemos utilizar cualquiera de los dos métodos para determinar la resultante de varias *fuerzas coplanares*. Para hacer esto, cada fuerza se divide primero en sus componentes $x$ y $y$, y luego las componentes respectivas se suman con *álgebra escalar* puesto que son colineales. La fuerza resultante se forma entonces al sumar las componentes resultantes mediante la ley del paralelogramo. Por ejemplo, considere las tres fuerzas concurrentes de la figura 2-17*a*, que tienen las componentes $x$ y $y$ mostradas en la figura 2-17*b*. Al usar *notación vectorial cartesiana,* cada fuerza se representa primero como un vector cartesiano, es decir,

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\,\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\,\mathbf{i} + F_{2y}\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\,\mathbf{i} - F_{3y}\,\mathbf{j}$$

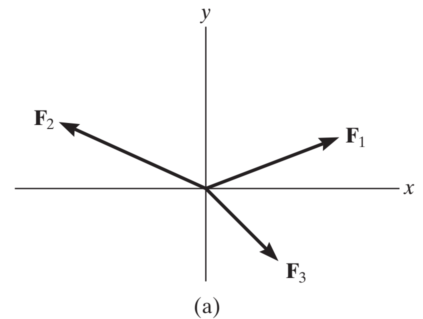
Por lo tanto, la resultante vectorial es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\,\mathbf{j} - F_{2x}\,\mathbf{i} + F_{2y}\,\mathbf{j} + F_{3x}\,\mathbf{i} - F_{3y}\,\mathbf{j}\\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j}\\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$

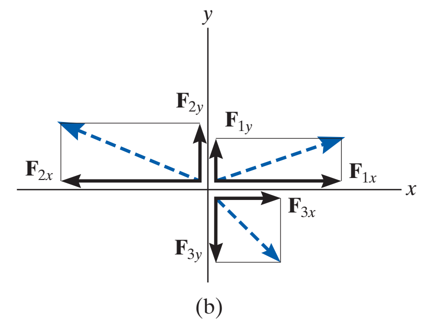
Si se utiliza *notación escalar*, entonces tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$(+\uparrow) \qquad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

Estos resultados son *iguales* a los de las componentes **i** y **j** de $\mathbf{F}_R$ que se determinaron anteriormente.




(a)




(b)

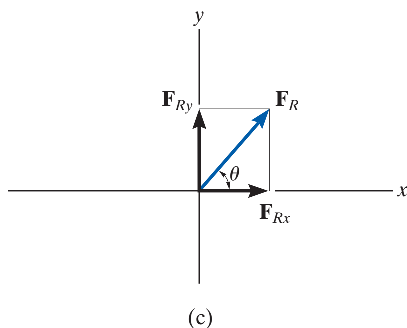
Fig. 2-17

*Por lo general, en trabajos manuscritos los vectores unitarios se indican con un acento circunflejo, por ejemplo, $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Estos vectores tienen una magnitud adimensional de una unidad, y su sentido (o la cabeza de su flecha) se describirá analíticamente mediante un signo de más o menos, dependiendo de si apuntan a lo largo del eje $x$ o $y$ positivo o negativo.

2

Podemos representar en forma simbólica las componentes de la fuerza resultante de cualquier número de fuerzas coplanares mediante la suma algebraica de las componentes $x$ y $y$ de todas las fuerzas, esto es,

$$F_{Rx} = \Sigma F_x$$
$$F_{Ry} = \Sigma F_y \qquad (2\text{-}1)$$




(c)

**Fig. 2-17**

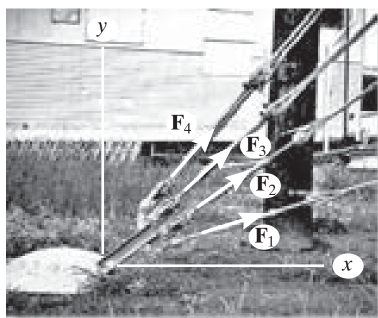
Una vez que se determinen estas componentes, pueden bosquejarse a lo largo de los ejes $x$ y $y$ con un sentido de dirección adecuado, y la fuerza resultante puede determinarse con base en una suma vectorial, como se muestra en la figura 2-17. Después, a partir de este bosquejo, se encuentra la magnitud de $\mathbf{F}_R$ por medio del teorema de Pitágoras; es decir,

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Asimismo, el ángulo $\theta$, que especifica la dirección de la fuerza resultante, se determina por trigonometría:

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$

Los conceptos anteriores se ilustran de forma numérica en los siguientes ejemplos.



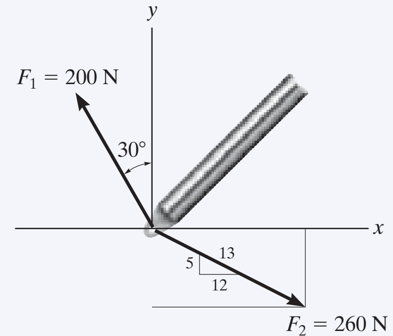

La fuerza resultante de las fuerzas de los cuatro cables que actúan sobre la ménsula de apoyo puede determinarse al sumar algebraicamente y por separado las componentes $x$ y $y$ de la fuerza de cada cable. Esta resultante $\mathbf{F}_R$ produce el *mismo efecto de jalón* sobre la ménsula que los cuatro cables.

## Puntos importantes

- La resultante de varias fuerzas coplanares puede determinarse fácilmente si se establece un sistema coordenado $x$, $y$ y las fuerzas se descomponen a lo largo de los ejes.
- La dirección de cada fuerza está especificada por el ángulo que forma su línea de acción con uno de los ejes, o por medio de un triángulo de pendiente.
- La orientación de los ejes $x$ y $y$ es arbitraria, y sus direcciones positivas pueden especificarse mediante los vectores unitarios cartesianos **i** y **j**.
- Las componentes $x$ y $y$ de la *fuerza resultante* son simplemente la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas coplanares.
- La magnitud de la fuerza resultante se determina mediante el teorema de Pitágoras, y cuando las componentes se bosquejan sobre los ejes $x$ y $y$, la dirección puede determinarse por trigonometría.

## EJEMPLO 2.5

Determine las componentes $x$ y $y$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan sobre la barra mostrada en la figura 2-18*a*. Exprese cada fuerza como un vector cartesiano.



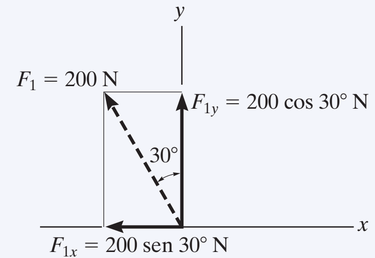

(a)

### SOLUCIÓN

**Notación escalar.** Por la ley del paralelogramo, $\mathbf{F}_1$ se descompone en sus componentes $x$ y $y$, figura 2-18*b*. Como $\mathbf{F}_{1x}$ actúa en la dirección $-x$ y $\mathbf{F}_{1y}$ actúa en la dirección $+y$, tenemos

$$F_{1x} = -200 \text{ sen } 30° \text{ N} = -100 \text{ N} = 100 \text{ N} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{1y} = 200 \cos 30° \text{ N} = 173 \text{ N} = 173 \text{ N} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$




(b)

La fuerza $\mathbf{F}_2$ se divide en sus componentes $x$ y $y$ como se muestra en la figura 2-18*c*. Aquí se indica la *pendiente* de la línea de acción para la fuerza. A partir de este "triángulo de pendiente" podríamos obtener el ángulo $\theta$, por ejemplo, $\theta = \tan^{-1}(\frac{5}{12})$ y luego proceder a determinar las magnitudes de las componentes de la misma manera que para $\mathbf{F}_1$. Sin embargo, un método más fácil consiste en usar partes proporcionales de triángulos semejantes, es decir,

$$\frac{F_{2x}}{260 \text{ N}} = \frac{12}{13} \qquad F_{2x} = 260 \text{ N}\left(\frac{12}{13}\right) = 240 \text{ N}$$

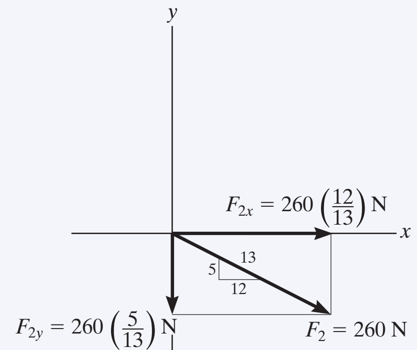
Del mismo modo,

$$F_{2y} = 260 \text{ N}\left(\frac{5}{13}\right) = 100 \text{ N}$$

Observe que la magnitud de la *componente horizontal*, $F_{2x}$, se obtuvo al multiplicar la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto horizontal* del triángulo de pendiente dividido entre la hipotenusa; mientras que la magnitud de la *componente vertical*, $F_{2y}$, se obtuvo al multiplicar la magnitud de la fuerza por la razón del *cateto vertical* dividido entre la hipotenusa. Por lo tanto,

$$F_{2x} = 240 \text{ N} = 240 \text{ N} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{2y} = -100 \text{ N} = 100 \text{ N} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

**Fig. 2-18**

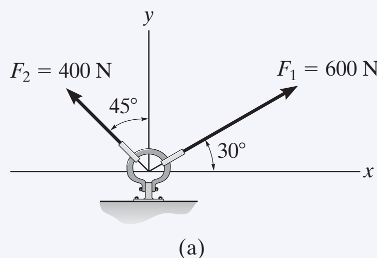
**Notación vectorial cartesiana.** Una vez determinadas las magnitudes y direcciones de las componentes de cada fuerza, podemos expresar cada fuerza como un vector cartesiano.

$$\mathbf{F}_1 = \{-100\mathbf{i} + 173\mathbf{j}\} \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

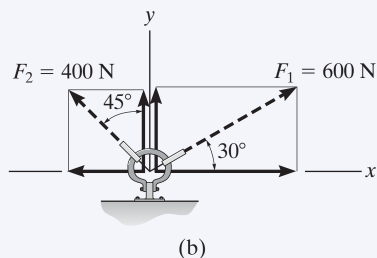
$$\mathbf{F}_2 = \{240\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

2

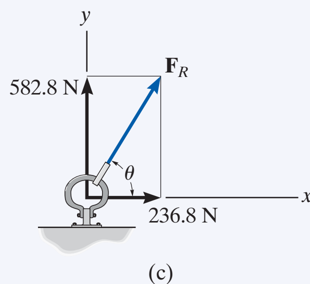
## EJEMPLO 2.6




(a)




(b)




(c)

**Fig. 2-19**

La armella que se muestra en la figura 2-19*a* está sometida a las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

### SOLUCIÓN I

**Notación escalar.** Primero resolvemos cada fuerza en sus componentes $x$ y $y$, figura 2-19*b*, luego sumamos estas componentes algebraicamente.

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \qquad F_{Rx} = 600 \cos 30° \text{ N} - 400 \text{ sen } 45° \text{ N}$$
$$= 236.8 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \qquad F_{Ry} = 600 \text{ sen } 30° \text{ N} + 400 \cos 45° \text{ N}$$
$$= 582.8 \text{ N} \uparrow$$

La fuerza resultante, que se muestra en la figura 2-19*c*, tiene una *magnitud* de

$$F_R = \sqrt{(236.8 \text{ N})^2 + (582.8 \text{ N})^2}$$
$$= 629 \text{ N}$$ ***Resp.***

A partir de la suma vectorial,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{582.8 \text{ N}}{236.8 \text{ N}}\right) = 67.9°$$ ***Resp.***

### SOLUCIÓN II

**Notación vectorial cartesiana.** A partir de la figura 2-19*b*, cada fuerza se expresa primero como un vector cartesiano.

$$\mathbf{F}_1 = \{600 \cos 30° \mathbf{i} + 600 \text{ sen } 30° \mathbf{j}\} \text{ N}$$
$$\mathbf{F}_2 = \{-400 \text{ sen } 45° \mathbf{i} + 400 \cos 45° \mathbf{j}\} \text{ N}$$

Entonces,

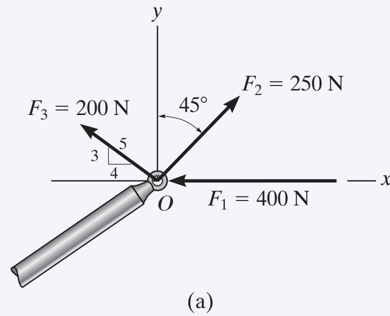
$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (600 \cos 30° \text{ N} - 400 \text{ sen } 45° \text{ N})\mathbf{i}$$
$$+ (600 \text{ sen } 30° \text{ N} + 400 \cos 45° \text{ N})\mathbf{j}$$
$$= \{236.8\mathbf{i} + 582.8\mathbf{j}\} \text{ N}$$

La magnitud y la dirección de $\mathbf{F}_R$ se determinan de la misma manera que antes.

**NOTA:** al comparar los dos métodos de solución, observe que el uso de la notación escalar es más eficiente puesto que las componentes pueden encontrarse *directamente*, sin tener que expresar primero cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las componentes. Sin embargo, después mostraremos que el análisis con vectores cartesianos es muy conveniente para la resolución de problemas tridimensionales.

## EJEMPLO 2.7

El extremo de la barra $O$ mostrada en la figura 2-20*a* está sometido a tres fuerzas coplanares concurrentes. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



(a)

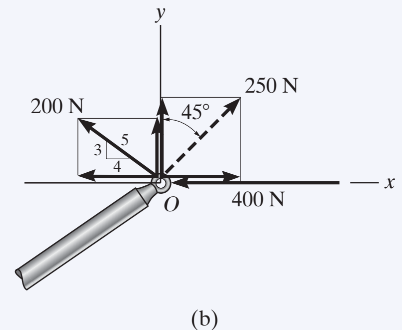
### SOLUCIÓN

Cada fuerza se divide en sus componentes $x$ y $y$, como se muestra en la figura 2-20*b*. Al sumar las componentes $x$, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x; \qquad F_{Rx} = -400 \text{ N} + 250 \text{ sen } 45° \text{ N} - 200\left(\tfrac{4}{5}\right) \text{N}$$
$$= -383.2 \text{ N} = 383.2 \text{ N} \leftarrow$$

El signo negativo indica que $F_{Rx}$ actúa hacia la izquierda, es decir, en la dirección $x$ negativa, como lo indica la flecha pequeña. Obviamente, esto ocurre porque $F_1$ y $F_3$ en la figura 2-20*b* contribuyen con un mayor jalón a la izquierda que el jalón de $F_2$ hacia la derecha. Al sumar las componentes $y$ se obtiene

$$+\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \qquad F_{Ry} = 250 \cos 45° \text{ N} + 200\left(\tfrac{3}{5}\right) \text{N}$$
$$= 296.8 \text{ N}\uparrow$$



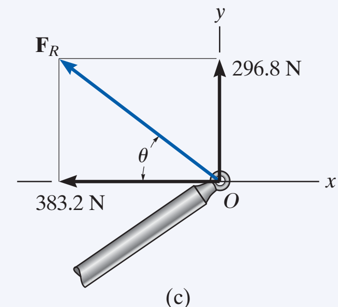
(b)

La fuerza resultante, como se muestra en la figura 2-20*c*, tiene una *magnitud* de

$$F_R = \sqrt{(-383.2 \text{ N})^2 + (296.8 \text{ N})^2}$$
$$= 485 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

A partir de la suma vectorial mostrada en la figura 2-20*c*, el ángulo director $\theta$ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{296.8}{383.2}\right) = 37.8° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(c)

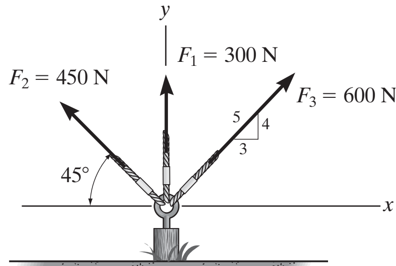
**Fig. 2-20**

**NOTA:** la aplicación de este método es más conveniente que el uso de las dos aplicaciones de la ley del paralelogramo, donde primero se suma $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ para después sumar $\mathbf{F}_3$ a su resultante.

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

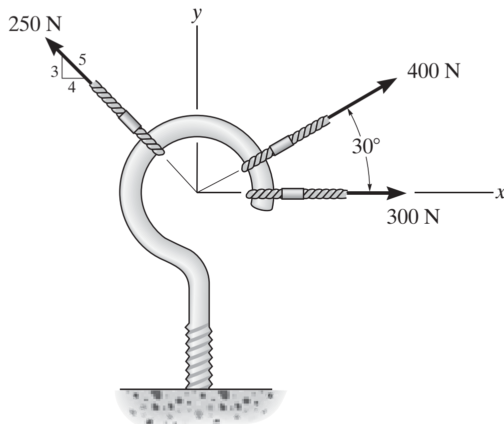


**F2-7.** Descomponga cada fuerza que actúa sobre el pilote en sus componentes $x$ y $y$.



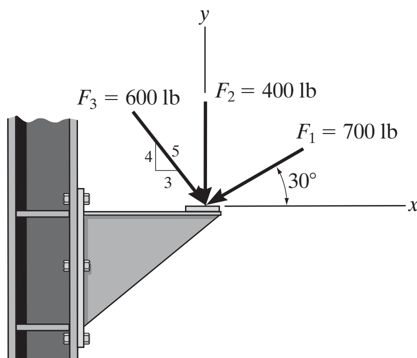

**F2-7**

**F2-8.** Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



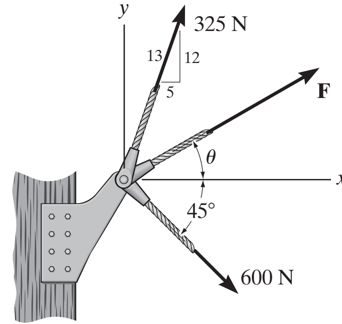

**F2-8**

**F2-9.** Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la repisa, así como su dirección $\theta$ medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $x$.



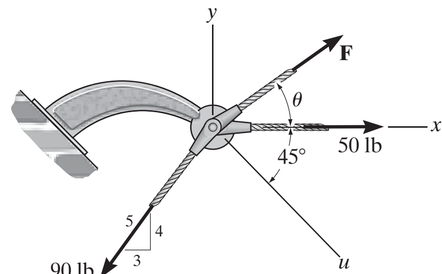

**F2-9**

**F2-10.** Si la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe ser de 750 N y estar dirigida a lo largo del eje $x$ positivo, determine la magnitud de F y su dirección $\theta$.



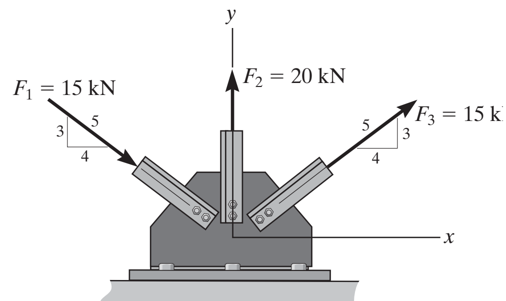

**F2-10**

**F2-11.** Si la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe ser de 80 lb y estar dirigida a lo largo del eje $u$, determine la magnitud de F y su dirección $\theta$.




**F2-11**

**F2-12.** Determine la magnitud de la fuerza resultante, así como su dirección $\theta$ medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

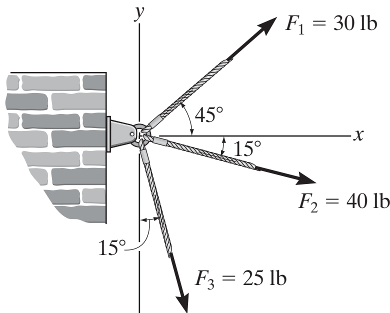



**F2-12**

## PROBLEMAS



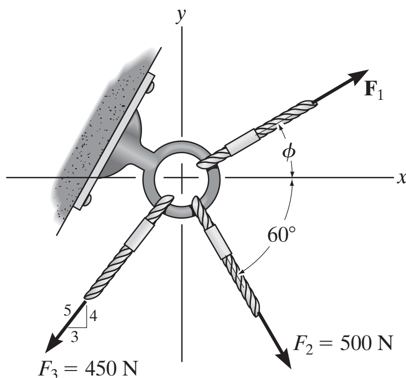
*__2-32.__ Determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre el pasador, así como su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.




**Prob. 2-32**

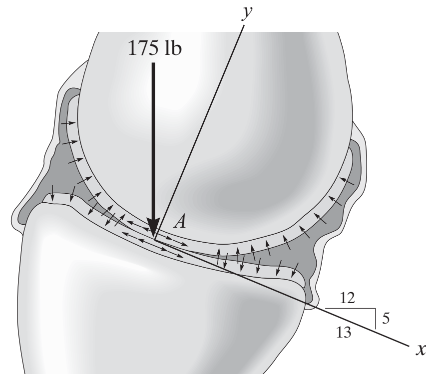
•**2-33.** Si $F_1 = 600$ N y $\phi = 30°$, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

**2-34.** Si la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la armella es de 600 N y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo es $\theta = 30°$, determine la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y del ángulo $\phi$.




**Probs. 2-33/34**

**2-35.** El punto de contacto entre el fémur y la tibia de la pierna se encuentra en $A$. Si se aplica una fuerza vertical de 175 lb en este punto, determine las componentes a lo largo de los ejes $x$ y $y$. Observe que la componente $y$ representa la fuerza normal sobre la región que soporta carga en los huesos. Tanto la componente $x$ como la componente $y$ ocasionan que el líquido sinovial se exprima y salga del espacio de soporte.

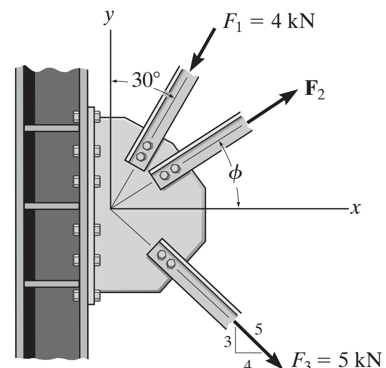



**Prob. 2-35**

*__2-36.__ Si $\phi = 30°$ y $F_2 = 3$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la placa y su dirección $\theta$ medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

•**2-37.** Si la magnitud para la fuerza resultante que actúa sobre la placa debe ser de 6 kN y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo es $\theta = 30°$, determine la magnitud de $\mathbf{F}_2$ y su dirección $\phi$.

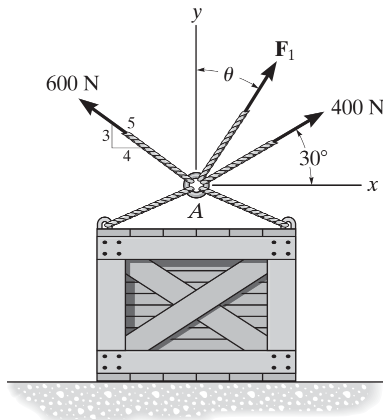
**2-38.** Si $\phi = 30°$ y la fuerza resultante que actúa sobre la placa de refuerzo está dirigida a lo largo del eje $x$ positivo, determine las magnitudes de $\mathbf{F}_2$ y la fuerza resultante.




**Probs. 2-36/37/38**

**2-39.** Determine la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y su dirección $\theta$ de manera que la fuerza resultante esté dirigida verticalmente hacia arriba y tenga una magnitud de 800 N.

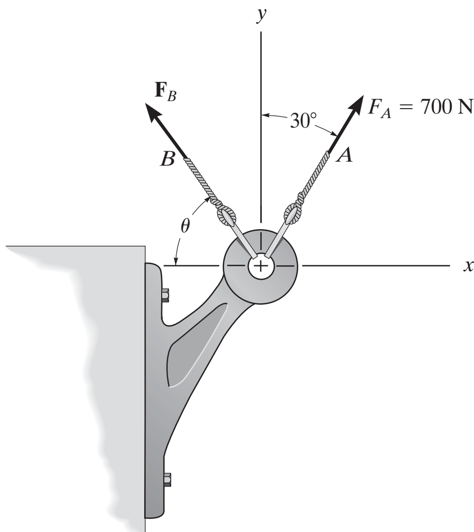
***2-40.** Determine la magnitud y la dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo, de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el anillo $A$. Considere $F_1 = 500$ N y $\theta = 20°$.




**Probs. 2-39/40**

•**2-41.** Determine la magnitud y la dirección $\theta$ de $\mathbf{F}_B$ de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje $y$ positivo y tenga una magnitud de 1500 N.

**2-42** Determine la magnitud y el ángulo medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $y$ positivo, de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula, si $F_B = 600$ N y $\theta = 20°$.

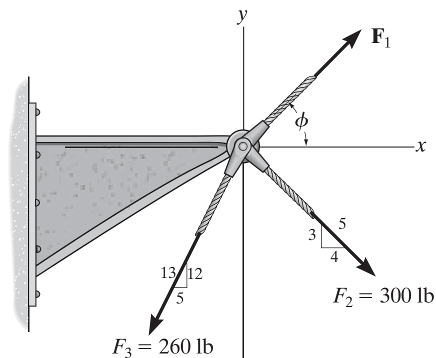



**Probs. 2-41/42**

**2-43.** Si $\phi = 30°$ y $F_1 = 250$ lb, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

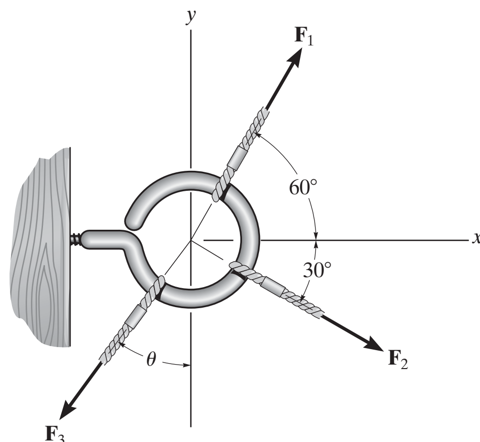
***2-44.** Si la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula es de 400 lb y está dirigida a lo largo del eje $x$ positivo, determine la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y su dirección $\phi$.

•**2-45.** Si la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe estar dirigida a lo largo del eje $x$ positivo y se requiere que la magnitud de $\mathbf{F}_1$ sea mínima, determine las magnitudes de la fuerza resultante y $\mathbf{F}_1$.




**Probs. 2-43/44/45**

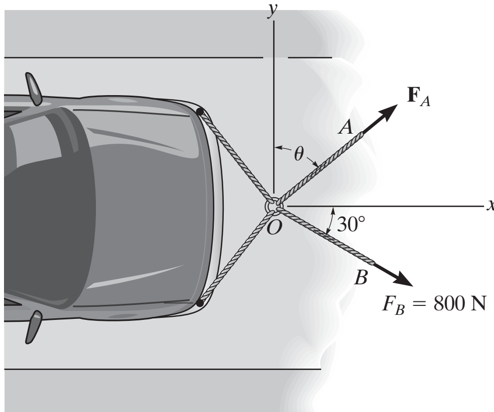
**2-46.** Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre la armella producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = 0$. Si $F_2 = \frac{2}{3} F_1$ y $\mathbf{F}_1$ debe estar a 90° de $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura, determine la magnitud requerida de $\mathbf{F}_3$, expresada en términos de $F_1$ y del ángulo $\theta$.




**Prob. 2-46**

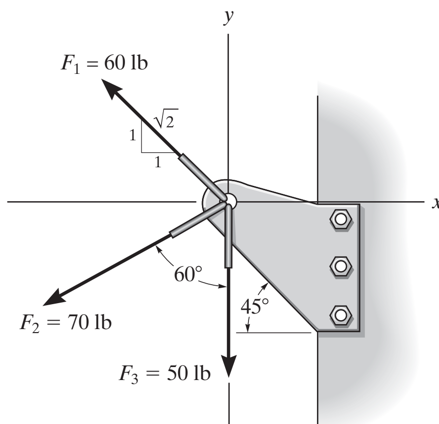
**2-47.** Determine la magnitud de $\mathbf{F}_A$ y su dirección $\theta$ de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje $x$ positivo y tenga una magnitud de 1250 N.

***2-48.** Determine la magnitud y la dirección, medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo, de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo en $O$, si $F_A = 750$ N y $\theta = 45°$.



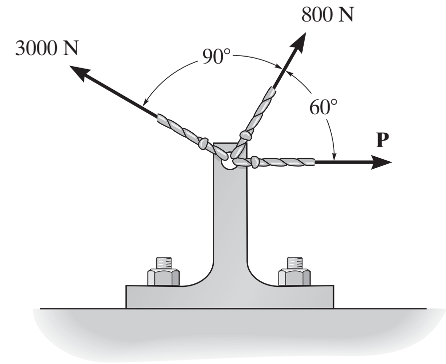

**Probs. 2-47/48**

**•2-49.** Determine la magnitud de la fuerza resultante y su dirección medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.




**Prob. 2-49**

**2-50.** Se aplican tres fuerzas a la ménsula. Determine el rango de valores de la magnitud de la fuerza **P** para los cuales la resultante de las tres fuerzas no excede 2400 N.

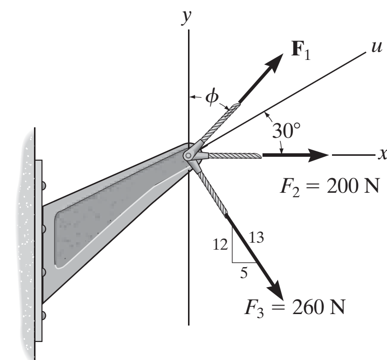



**Prob. 2-50**

**2-51.** Si $F_1 = 150$ N y $\phi = 30°$, determine la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula y su dirección medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo.

***2-52.** Si la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula debe ser de 450 N y está dirigida a lo largo del eje $u$ positivo, determine la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y su dirección $\phi$.

**•2-53.** Si se requiere que la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula sea mínima, determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y de la fuerza resultante. Considere que $\phi = 30°$.

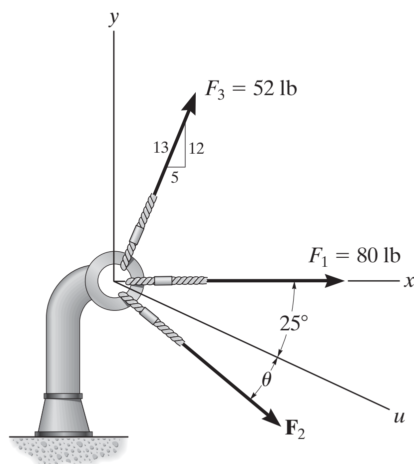



**Probs. 2-51/52/53**

**2-54.** Tres fuerzas actúan sobre el soporte. Determine la magnitud y la dirección $\theta$ de $\mathbf{F}_2$ tales que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje $u$ positivo y tenga una magnitud de 50 lb.

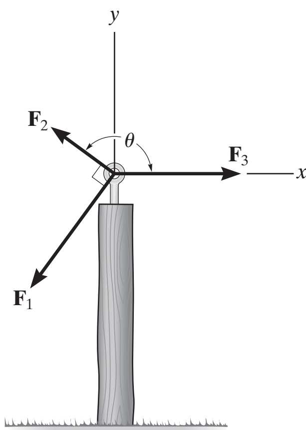
**2-55.** Si $F_2 = 150$ lb y $\theta = 55°$, determine la magnitud y la dirección, medida en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $x$ positivo de la fuerza resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el soporte.





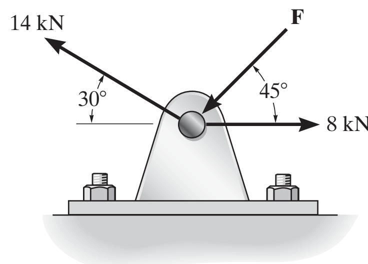

Probs. 2-54/55

*__2-56.__ Las tres fuerzas concurrentes que actúan sobre el poste producen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$. Si $F_2 = \frac{1}{2}F_1$ y $\mathbf{F}_1$ está a 90° de $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura, determine la magnitud $F_3$ que se requiere expresada en términos de $F_1$ y del ángulo $\theta$.



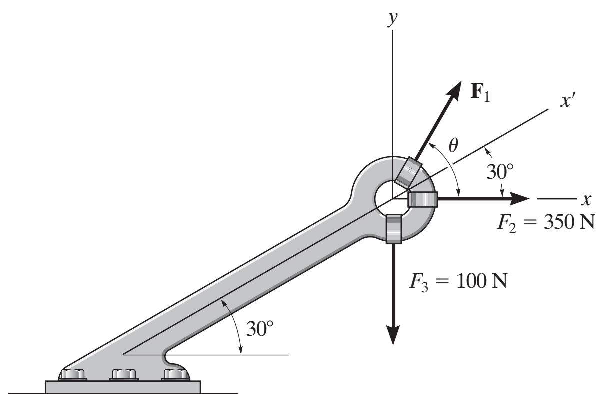

Prob. 2-56

**2-57.** Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ tal que la fuerza resultante de las tres fuerzas sea lo más pequeña posible. ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza resultante mínima?




Prob. 2-57

**2-58.** Exprese cada una de las tres fuerzas que actúan sobre el soporte en forma vectorial cartesiana con respecto a los ejes $x$ y $y$. Determine la magnitud y la dirección $\theta$ de $\mathbf{F}_1$ de manera que la fuerza resultante esté dirigida a lo largo del eje $x'$ positivo y tenga una magnitud $F_R = 600$ N.




Prob. 2-58

## 2.5 Vectores cartesianos

Las operaciones del álgebra vectorial, cuando se aplican a la resolución de problemas en *tres dimensiones*, se simplifican considerablemente si primero se representan los vectores en forma vectorial cartesiana. En esta sección presentaremos un método general para hacer esto; luego, en la sección siguiente aplicaremos este método para encontrar la fuerza resultante de un sistema de fuerzas concurrentes.

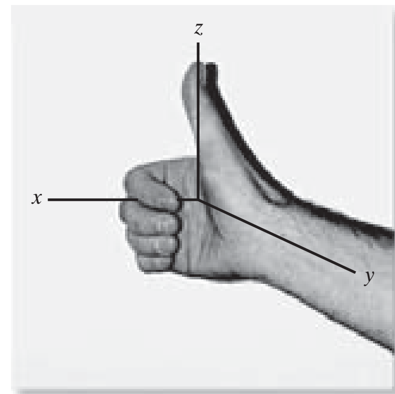



**Fig. 2-21**

**Sistema coordenado derecho.** Usaremos un sistema coordenado derecho para desarrollar la teoría del álgebra vectorial que se presenta a continuación. Se dice que un sistema coordenado rectangular es *derecho* si el pulgar de la mano derecha señala en la dirección del eje $z$ positivo, cuando los dedos de la mano derecha se curvan alrededor de este eje y están dirigidos del eje $x$ positivo hacia el eje $y$ positivo, figura 2-21.

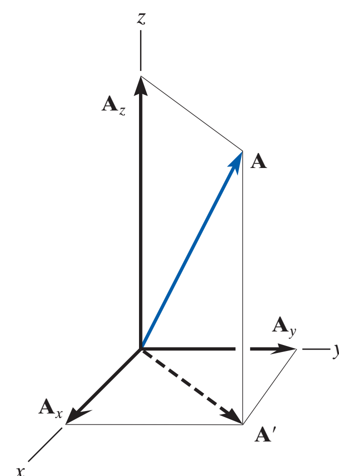



**Fig. 2-22**

**Componentes rectangulares de un vector.** Un vector **A** puede tener una, dos o tres componentes rectangulares a lo largo de los ejes coordenados $x$, $y$, $z$, dependiendo de cómo esté orientado con respecto a los ejes. En general, cuando **A** está dirigido dentro de un octante del marco $x$, $y$, $z$, figura 2-22, entonces, mediante dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo, podemos dividir el vector en componentes como $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}_z$ y luego $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$. Al combinar estas ecuaciones, para eliminar $\mathbf{A}'$, **A** se representa mediante la suma vectorial de sus *tres* componentes rectangulares.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \tag{2-2}$$

**Vectores unitarios cartesianos.** En tres dimensiones, el conjunto de vectores unitarios cartesianos **i**, **j**, **k**, se usa para designar las direcciones de los ejes $x$, $y$, $z$, respectivamente. Como se indicó en la sección 2.4, el *sentido* (o cabeza de la flecha) de estos vectores se representará analíticamente mediante un signo de más o menos, dependiendo de si están dirigidos a lo largo de los ejes $x$, $y$ o $z$ positivos o negativos. En la figura 2-23 se muestran los vectores unitarios cartesianos positivos.

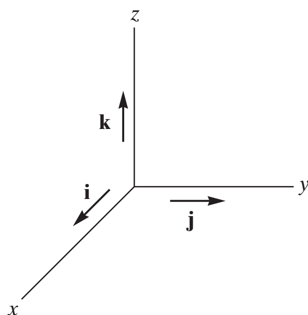



**Fig. 2-23**

2

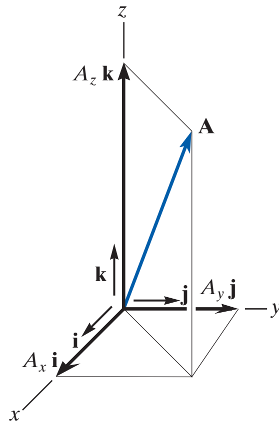



Fig. 2-24

**Representación de un vector cartesiano.** Como las tres componentes de **A** en la ecuación 2-2 actúan en las direcciones positivas **i**, **j** y **k**, figura 2-24, podemos escribir **A** en forma de vector cartesiano como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{2-3}$$

Hay una clara ventaja al escribir los vectores de esta manera. Al separar la *magnitud* y la *dirección* de cada *vector componente* se simplificarán las operaciones de álgebra vectorial, particularmente en tres dimensiones.

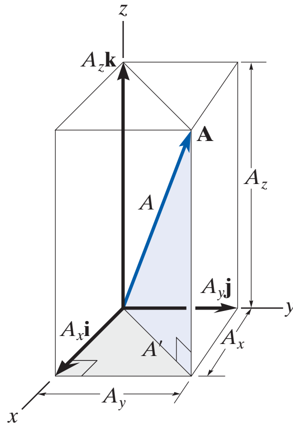



Fig. 2-25

**Magnitud de un vector cartesiano.** Siempre es posible obtener la magnitud de **A** si está expresado en forma de vector cartesiano. Como se muestra en la figura 2-25, a partir del triángulo rectángulo azul, $A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$ y del triángulo rectángulo sombreado, $A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Al combinar estas ecuaciones para eliminar $A'$ se obtiene

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2-4}$$

*Por consiguiente, la magnitud de **A** es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes.*

**Dirección de un vector cartesiano.** La *dirección* de **A** se definirá mediante los *ángulos directores coordenados* $\alpha$ (alfa), $\beta$ (beta) y $\gamma$ (gamma), medidos entre la *cola* de **A** y los ejes x, *y*, *z positivos*, dado que se localizan en la cola de **A**, figura 2-26. Observe que independientemente de hacia dónde esté dirigido **A**, cada uno de esos ángulos estará entre 0° y 180°.

Para determinar $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, considere la proyección de **A** sobre los ejes *x*, *y*, *z*, figura 2-27. Con referencia a los triángulos rectángulos azules mostrados en cada figura, tenemos

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{2-5}$$

Estos números se conocen como *cosenos directores* de **A**. Una vez obtenidos, los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, pueden determinarse a partir de los cosenos inversos.

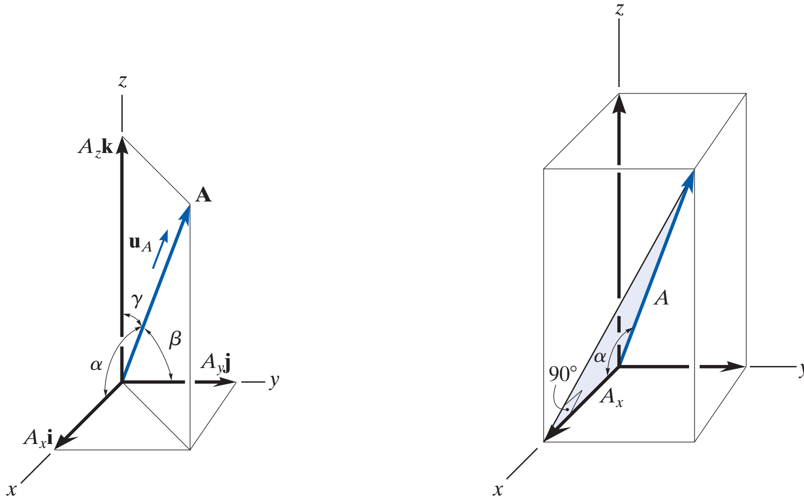



Fig. 2-26

Una manera fácil de obtener estos cosenos directores es formar un vector unitario $\mathbf{u}_A$ en la dirección de $\mathbf{A}$, figura 2-26. Si $\mathbf{A}$ está expresado en forma de vector cartesiano, $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{u}_A$ tendrá una magnitud de uno y será adimensional dado que $\mathbf{A}$ está dividido entre su magnitud, es decir,

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \qquad (2\text{-}6)$$

donde $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$. Por comparación con la ecuación 2-7, se observa que *las componentes* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *de* $\mathbf{u}_A$ *representan los cosenos directores de* $\mathbf{A}$, esto es,

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k} \qquad (2\text{-}7)$$

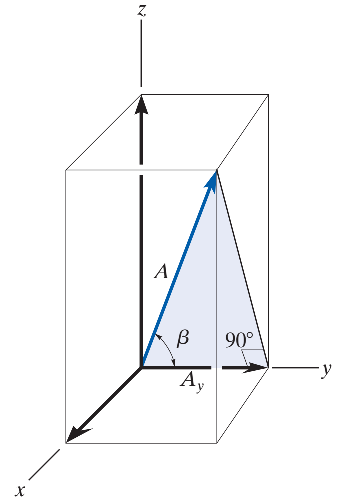
Como la magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las magnitudes de sus componentes, y $\mathbf{u}_A$ tiene una magnitud de uno, a partir de la ecuación anterior puede formularse una importante relación entre los cosenos directores como

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2\text{-}8)$$

Aquí puede observarse que si sólo se conocen *dos* de los ángulos coordenados, el tercer ángulo puede encontrarse con esta ecuación.

Finalmente, si se conocen la magnitud y los ángulos directores coordenados, $\mathbf{A}$ puede expresarse en forma de vector cartesiano como

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A\mathbf{u}_A \\ &= A\cos\alpha\,\mathbf{i} + A\cos\beta\,\mathbf{j} + A\cos\gamma\,\mathbf{k} \\ &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (2\text{-}9)$$



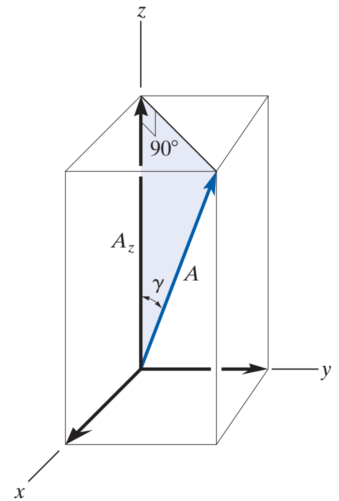




Fig 2-27

2

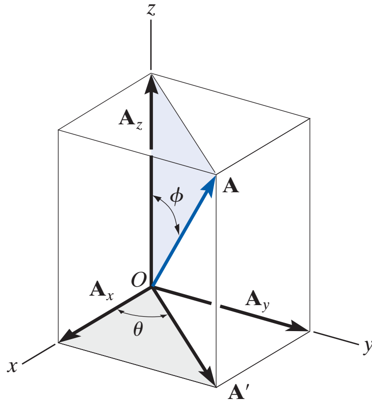



Fig. 2-28

Algunas veces, la dirección de **A** puede especificarse mediante dos ángulos, $\theta$ y $\phi$ (fi), como se muestra en la figura 2-28. Entonces, las componentes de **A** pueden determinarse al aplicar primero trigonometría al triángulo rectángulo azul, de donde se obtiene

$$A_z = A \cos \phi$$

y

$$A' = A \operatorname{sen} \phi$$

Ahora, al aplicar trigonometría al otro triángulo rectángulo sombreado,

$$A_x = A' \cos \theta = A \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$A_y = A' \operatorname{sen} \theta = A \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

Por lo tanto, **A** escrito en forma de vector cartesiano se convierte en

$$\mathbf{A} = A \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + A \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + A \cos \phi \, \mathbf{k}$$

No debe memorizar esta ecuación; en vez de ello, es importante que entienda la forma en que las componentes se determinaron mediante trigonometría.

## 2.6 Suma de vectores cartesianos

La suma (o resta) de dos o más vectores se simplifican considerablemente si los vectores se expresan en términos de sus componentes cartesianas. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, figura 2-29, entonces el vector resultante, **R**, tiene componentes que representan las sumas escalares de las componentes **i**, **j**, **k** de **A** y **B**, es decir,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

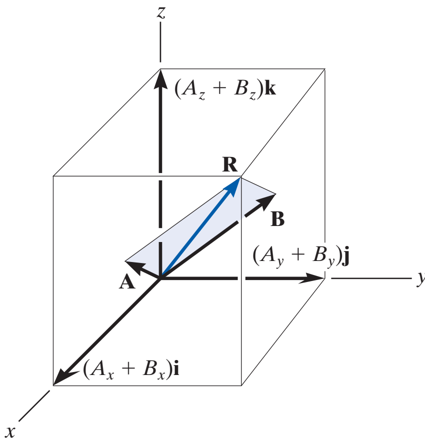



Fig. 2-29

Si esto se generaliza y se aplica a un sistema de varias fuerzas concurrentes, entonces la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas presentes en el sistema y puede escribirse como

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} \qquad (2\text{-}10)$$

Aquí, $\Sigma F_x$, $\Sigma F_y$ y $\Sigma F_z$ representan las sumas algebraicas de las respectivas componentes $x$, $y$, $z$ o bien **i**, **j**, **k** de cada fuerza presente en el sistema.

## Puntos importantes

- El análisis vectorial cartesiano se usa a menudo para resolver problemas en tres dimensiones.
- Las direcciones positivas de los ejes $x$, $y$, $z$ se definen mediante los vectores unitarios cartesianos **i**, **j**, **k**, respectivamente.
- La *magnitud* de un vector cartesiano es $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.
- La *dirección* de un vector cartesiano se especifica usando ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ que la cola del vector forma con los ejes positivos $x$, $y$, $z$, respectivamente. Las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_A = \mathbf{A}/A$ representan los cosenos directores de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Sólo dos de los ángulos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tienen que ser especificados. El tercer ángulo se determina a partir de la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
- En ocasiones la dirección de un vector se define usando los dos ángulos $\theta$ y $\phi$ como en la figura 2-28. En este caso las componentes vectoriales se obtienen mediante descomposición vectorial por medio de trigonometría.
- Para encontrar la *resultante* de un sistema de fuerzas concurrentes, exprese cada fuerza como un vector cartesiano y sume las componentes **i**, **j**, **k** de todas las fuerzas del sistema.



La fuerza resultante que actúa sobre el amarre del barco puede determinarse representando primero cada fuerza en la cuerda como un vector cartesiano para después sumar las componentes **i**, **j** y **k**.



## EJEMPLO 2.8

Exprese la fuerza **F** mostrada en la figura 2-30 como un vector cartesiano.

### SOLUCIÓN

Como sólo se dan dos ángulos directores coordenados, el tercer ángulo $\alpha$ puede ser determinado con la ecuación 2-8; es decir,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (0.5)^2 - (0.707)^2} = \pm 0.5$$

Por consiguiente, existen dos posibilidades, a saber,

$$\alpha = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ \qquad \text{o bien} \qquad \alpha = \cos^{-1}(^{-}0.5) = 120^\circ$$

Por inspección, es necesario que $\alpha = 60^\circ$, puesto que $\mathbf{F}_x$ debe estar en la dirección $+x$.

Mediante la ecuación 2-9, con $F = 200$ N, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F\cos\alpha\mathbf{i} + F\cos\beta\mathbf{j} + F\cos\gamma\mathbf{k}\\ &= (200\cos 60^\circ\text{ N})\mathbf{i} + (200\cos 60^\circ\text{ N})\mathbf{j} + (200\cos 45^\circ\text{ N})\mathbf{k}\\ &= \{100.0\mathbf{i} + 100.0\mathbf{j} + 141.4\mathbf{k}\}\text{ N}\end{aligned}$$ ***Resp.***

Se muestra que efectivamente la magnitud de $F = 200$ N.

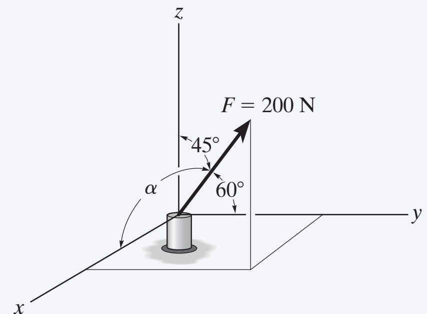



**Fig. 2-30**

2

## EJEMPLO 2.9

Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre el anillo en la figura 2-31*a*.

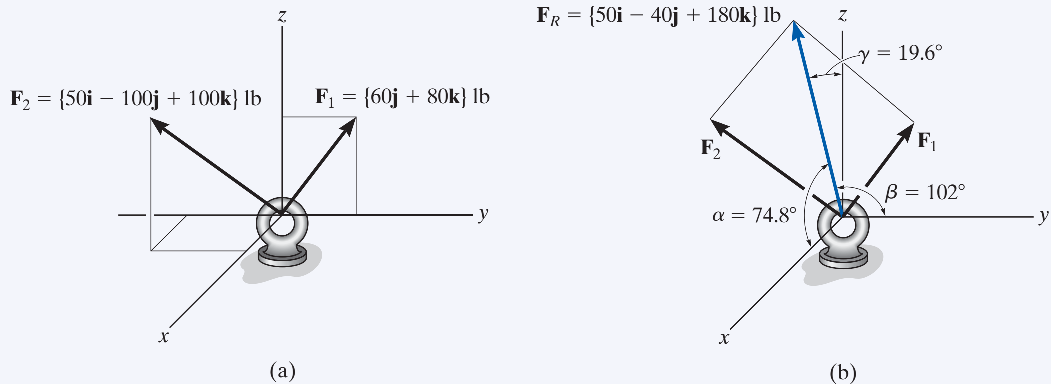



**Fig. 2-31**

### SOLUCIÓN

Como cada fuerza está representada en forma de vector cartesiano, la fuerza resultante, que se muestra en la figura 2-31*b*, es

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \{60\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\}\text{ lb} + \{50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}\text{ lb}$$
$$= \{50\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 180\mathbf{k}\}\text{ lb}$$

La magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(50\text{ lb})^2 + (-40\text{ lb})^2 + (180\text{ lb})^2} = 191.0\text{ lb}$$
$$= 191\text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Los ángulos directores coordenados $\alpha, \beta, \gamma$ se determinan a partir de las componentes del vector unitario que actúa en la dirección de $\mathbf{F}_R$.

$$\mathbf{u}_{F_R} = \frac{\mathbf{F}_R}{F_R} = \frac{50}{191.0}\mathbf{i} - \frac{40}{191.0}\mathbf{j} + \frac{180}{191.0}\mathbf{k}$$
$$= 0.2617\mathbf{i} - 0.2094\mathbf{j} + 0.9422\mathbf{k}$$

de manera que

$$\cos\alpha = 0.2617 \qquad \alpha = 74.8^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$\cos\beta = -0.2094 \qquad \beta = 102^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$
$$\cos\gamma = 0.9422 \qquad \gamma = 19.6^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Estos ángulos se muestran en la figura 2-31*b*.

**NOTA:** en particular, observe que $\beta > 90^\circ$ puesto que la componente **j** de $\mathbf{u}_{F_R}$ es negativa. Esto parece razonable considerando la suma de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de acuerdo con la ley del paralelogramo.

## EJEMPLO 2.10

Exprese la fuerza **F** que se muestra en la figura 2-32*a* como un vector cartesiano.

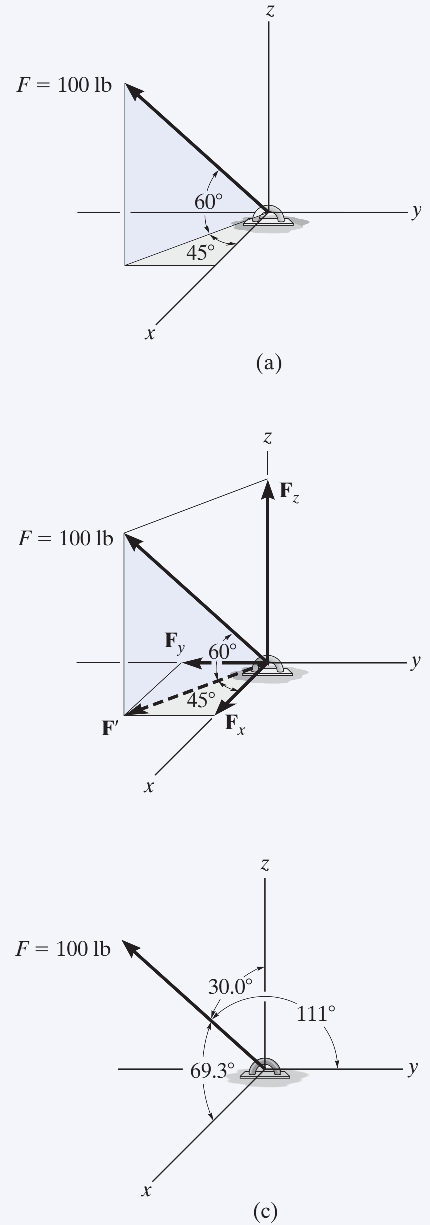



**Fig. 2-32**

### SOLUCIÓN

Los ángulos de 60° y 45° que definen la dirección de **F** *no* son ángulos directores coordenados. Se requieren dos aplicaciones sucesivas de la ley del paralelogramo para resolver **F** en sus componentes $x$, $y$, $z$. Primero $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_z$, luego $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$, figura 2-32*b*. Por trigonometría, las magnitudes de las componentes son

$$F_z = 100 \text{ sen } 60° \text{ lb} = 86.6 \text{ lb}$$

$$F' = 100 \cos 60° \text{ lb} = 50 \text{ lb}$$

$$F_x = F' \cos 45° = 50 \cos 45° \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$

$$F_y = F' \text{ sen } 45° = 50 \text{ sen } 45° \text{ lb} = 35.4 \text{ lb}$$

Dado que $\mathbf{F}_y$, tiene una dirección definida por $-\mathbf{j}$, tenemos

$$\mathbf{F} = \{35.4\mathbf{i} - 35.4\mathbf{j} + 86.6\mathbf{k}\} \text{ lb}$$ ***Resp.***

Para mostrar que la magnitud de este vector es efectivamente de 100 lb, se aplica la ecuación 2-4,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$= \sqrt{(35.4)^2 + (-35.4)^2 + (86.6)^2} = 100 \text{ lb}$$

Si es necesario, los ángulos directores coordenados de **F** pueden determinarse a partir de las componentes del vector unitario que actúa en la dirección de **F**. Por tanto,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{F_x}{F}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F}\mathbf{j} + \frac{F_z}{F}\mathbf{k}$$
$$= \frac{35.4}{100}\mathbf{i} - \frac{35.4}{100}\mathbf{j} + \frac{86.6}{100}\mathbf{k}$$
$$= 0.354\mathbf{i} - 0.354\mathbf{j} + 0.866\mathbf{k}$$

de manera que

$$\alpha = \cos^{-1}(0.354) = 69.3°$$

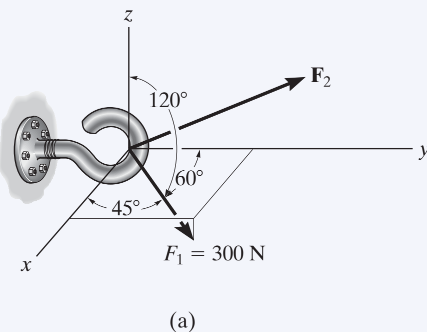
$$\beta = \cos^{-1}(-0.354) = 111°$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0.866) = 30.0°$$

Estos resultados se muestran en la figura 2-32*c*.

2

## EJEMPLO 2.11




(a)

Dos fuerzas actúan sobre el gancho que se muestra en la figura 2-32*a*. Especifique la magnitud de $\mathbf{F}_2$ y sus ángulos directores coordenados, de modo que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ actúe a lo largo del eje *y* positivo y tenga una magnitud de 800 N.

### SOLUCIÓN

Para resolver este problema, la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ y sus dos componentes, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, se expresarán cada una en forma de vector cartesiano. Entonces, como se muestra en la figura 2-33*a*, es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

Al aplicar la ecuación 2-9,

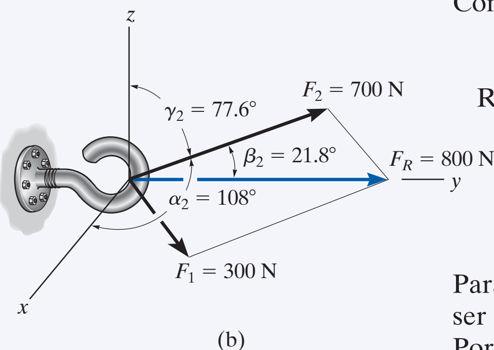
$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= F_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + F_1 \cos \beta_1 \mathbf{j} + F_1 \cos \gamma_1 \mathbf{k}\\ &= 300 \cos 45^\circ\, \mathbf{i} + 300 \cos 60^\circ\, \mathbf{j} + 300 \cos 120^\circ\, \mathbf{k}\\ &= \{212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k}\}\text{ N}\\ \mathbf{F}_2 &= F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Como $\mathbf{F}_R$ tiene una magnitud de 800 N y actúa en la dirección $+\mathbf{j}$,

$$\mathbf{F}_R = (800\text{ N})(+\mathbf{j}) = \{800\mathbf{j}\}\text{ N}$$

Requerimos que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ 800\mathbf{j} &= 212.1\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 150\mathbf{k} + F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{2z}\mathbf{k}\\ 800\mathbf{j} &= (212.1 + F_{2x})\mathbf{i} + (150 + F_{2y})\mathbf{j} + (-150 + F_{2z})\mathbf{k}\end{aligned}$$




(b)

**Fig. 2-33**

Para satisfacer esta ecuación, las componentes **i**, **j**, **k** de $\mathbf{F}_R$ deben ser iguales a las componentes **i**, **j**, **k** correspondientes de $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}0 &= 212.1 + F_{2x} & F_{2x} &= -212.1\text{ N}\\ 800 &= 150 + F_{2y} & F_{2y} &= 650\text{ N}\\ 0 &= -150 + F_{2z} & F_{2z} &= 150\text{ N}\end{aligned}$$

Entonces, la magnitud de $\mathbf{F}_2$ es

$$\begin{aligned}F_2 &= \sqrt{(-212.1\text{ N})^2 + (650\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2}\\ &= 700\text{ N}\end{aligned}$$ ***Resp.***

Podemos usar la ecuación 2-9 para determinar $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

$$\cos \alpha_2 = \frac{-212.1}{700}; \qquad \alpha_2 = 108^\circ$$ ***Resp.***

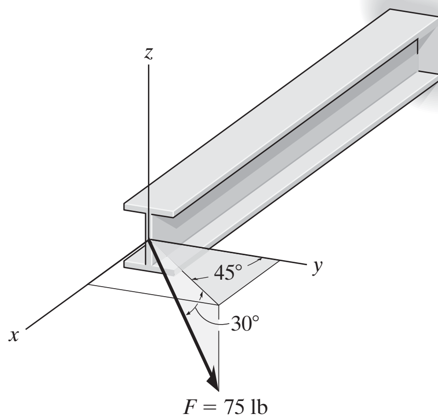
$$\cos \beta_2 = \frac{650}{700}; \qquad \beta_2 = 21.8^\circ$$ ***Resp.***

$$\cos \gamma_2 = \frac{150}{700}; \qquad \gamma_2 = 77.6^\circ$$ ***Resp.***

Estos resultados se muestran en la figura 2-33*b*.

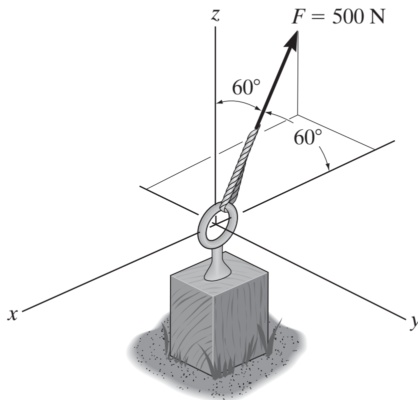
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F2-13.** Determine los ángulos directores coordenados de la fuerza.



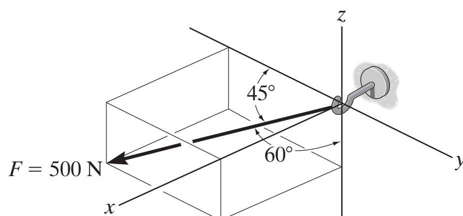

**F2-13**

**F2-14.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.



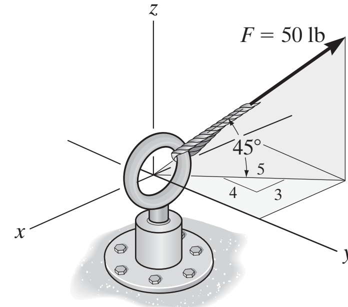

**F2-14**

**F2-15.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.



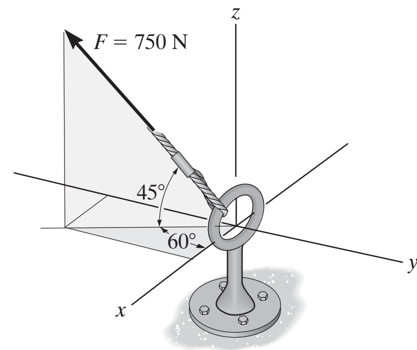

**F2-15**

**F2-16.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.



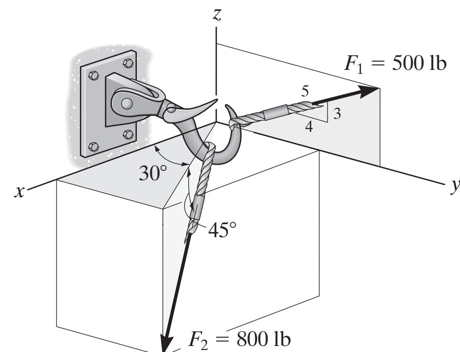

**F2-16**

**F2-17.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.




**F2-17**

**F2-18.** Determine la fuerza resultante que actúa sobre el gancho.



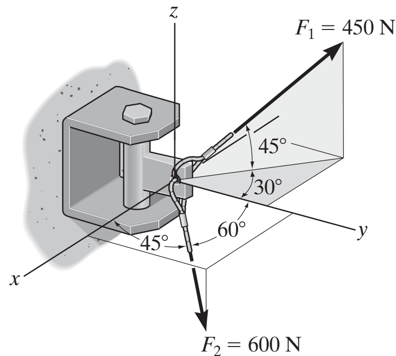

**F2-18**

## PROBLEMAS



**2-59.** Determine el ángulo coordenado $\gamma$ para $\mathbf{F}_2$ y después exprese cada fuerza que actúa sobre la ménsula como un vector cartesiano.

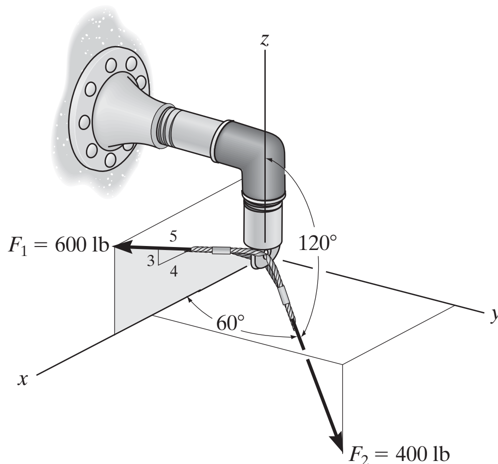
***2-60.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula.




**Probs. 2-59/60**

**•2-61.** Exprese cada fuerza que actúa sobre el ensamble de tubos en forma vectorial cartesiana.

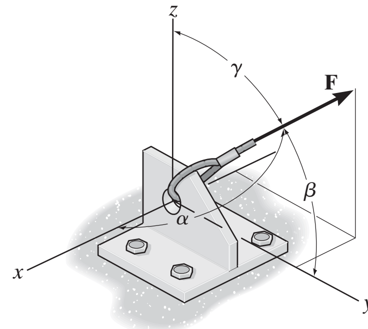
**2-62.** Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante que actúa sobre el ensamble de tubos.




**Probs. 2-61/62**

**2-63.** La fuerza **F** actúa sobre la ménsula dentro del octante mostrado. Si $F = 400$ N, $\beta = 60°$ y $\gamma = 45°$, determine las componentes $x$, $y$, $z$ de **F**.

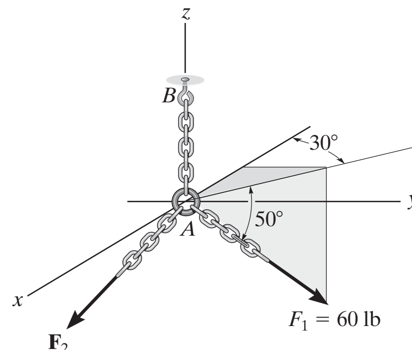
***2-64.** La fuerza **F** actúa sobre la ménsula dentro del octante mostrado. Si las magnitudes de las componentes $x$ y $z$ de **F** son $F_x = 300$ N y $F_z = 600$ N, respectivamente y $\beta = 60°$, determine la magnitud de **F** y su componente $y$. Asimismo, encuentre los ángulos directores coordenados $\alpha$ y $\gamma$.




**Probs. 2-63/64**

**•2-65.** Las dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan en $A$ tienen una fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \{-100\mathbf{k}\}$ lb. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$.

**2-66.** Determine los ángulos directores coordenados de la fuerza $\mathbf{F}_1$ e indíquelos sobre la figura.




**Probs. 2-65/66**

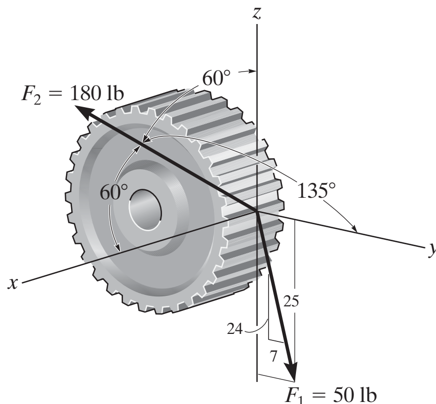
**2-67.** El engrane recto está sometido a las dos fuerzas causadas por el contacto con otros engranes. Exprese cada fuerza como un vector cartesiano.

**2-68.** El engrane recto está sometido a las dos fuerzas causadas por el contacto con otros engranes. Determine la resultante de las dos fuerzas y exprese el resultado como un vector cartesiano.

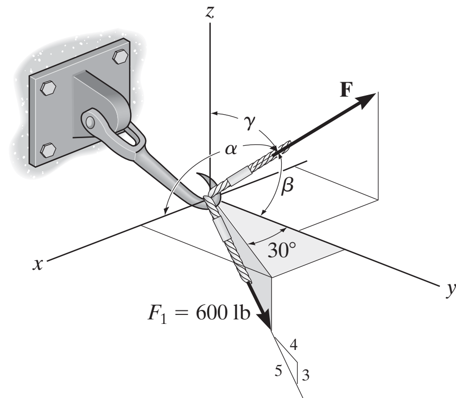
**2-71.** Si $\alpha = 120°$, $\beta < 90°$, $\gamma = 60°$ y $F = 400$ lb, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre el gancho.

*__2-72.__ Si la fuerza resultante que actúa sobre el gancho es $\mathbf{F}_R = \{-200\mathbf{i} + 800\mathbf{j} + 150\mathbf{k}\}$ lb, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de **F**.






Probs. 2-67/68

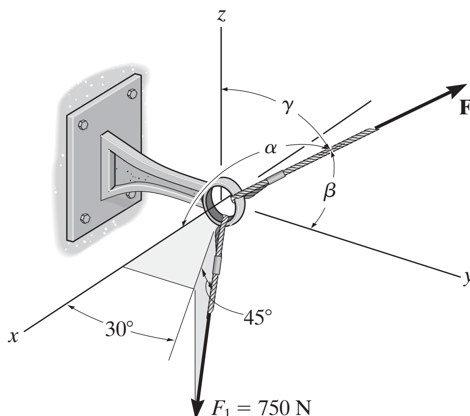



Probs. 2-71/72

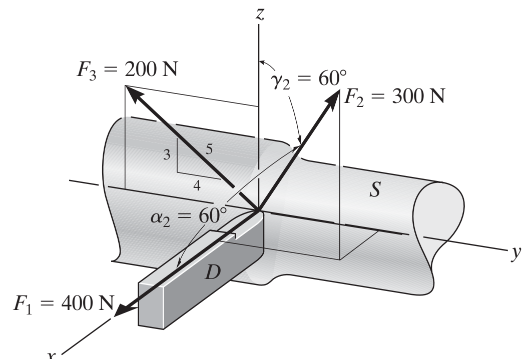
•**2-69.** Si la fuerza resultante que actúa sobre el soporte es $\mathbf{F}_R = \{-300\mathbf{i} + 650\mathbf{j} + 250\mathbf{k}\}$ N, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de **F**.

**2-70.** Si la fuerza resultante que actúa sobre el soporte debe ser $\mathbf{F}_R = \{800\mathbf{j}\}$ N, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de **F**.

•**2-73.** El eje $S$ ejerce tres componentes de fuerza sobre el dado $D$. Encuentre la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante. La fuerza $\mathbf{F}_2$ actúa dentro del octante mostrado.



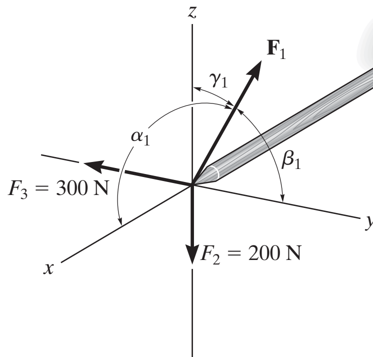

Probs. 2-69/70




Prob. 2-73

**2-74.** El mástil está sometido a las tres fuerzas mostradas. Determine los ángulos directores coordenados $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ de $\mathbf{F}_1$ de manera que la fuerza resultante que actúa sobre el mástil sea $\mathbf{F}_R = \{350\mathbf{i}\}$ N.

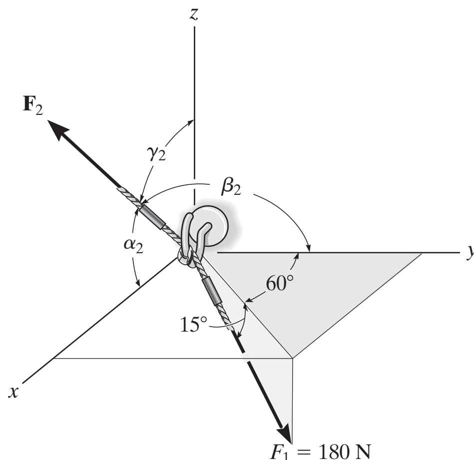
**2-75.** El mástil está sometido a las tres fuerzas mostradas. Determine los ángulos directores coordenados $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ de $\mathbf{F}_1$ de manera que la fuerza resultante que actúa sobre el mástil sea cero.




**Probs. 2-74/75**

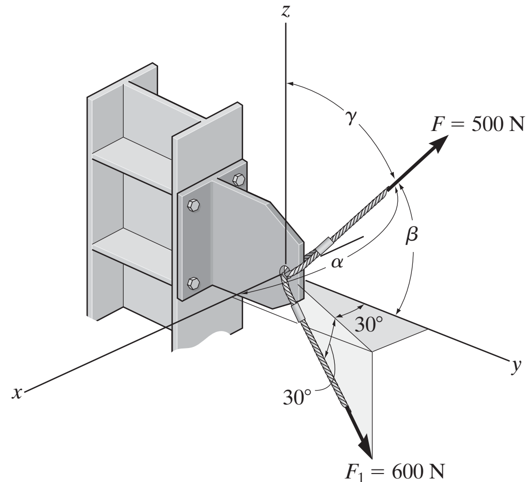
*__2-76.__ Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$ de manera que la resultante de las dos fuerzas actúe a lo largo del eje $x$ positivo y tenga una magnitud de 500 N.

•**2-77.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_2$ de manera que la resultante de las dos fuerzas sea cero.



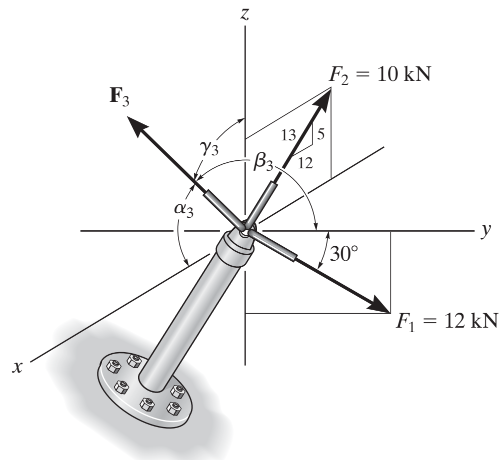

**Probs. 2-76/77**

**2-78.** Si la fuerza resultante que actúa sobre la ménsula está dirigida a lo largo del eje $y$ positivo, determine la magnitud de la fuerza resultante y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}$ de modo que $\beta < 90°$.



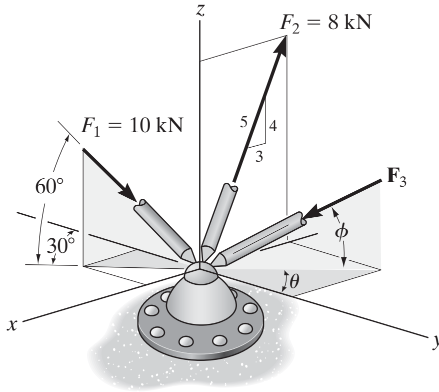

**Prob. 2-78**

**2-79.** Especifique la magnitud de $\mathbf{F}_3$ y sus ángulos directores coordenados $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ de manera que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \{9\mathbf{j}\}$ kN.




**Prob. 2-79**

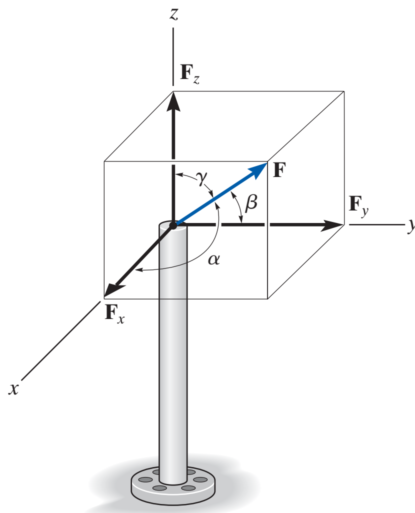
*__2-80.__ Si $F_3 = 9$ kN, $\theta = 30°$ y $\phi = 45°$, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa sobre la junta de rótula.




**Prob. 2-80**

•**2-81.** El poste está sometido a la fuerza **F**, la cual posee componentes que actúan a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$, como se muestra en la figura. Si la magnitud de **F** es de 3 kN, $\beta = 30°$ y $\gamma = 75°$, determine las magnitudes de sus tres componentes.

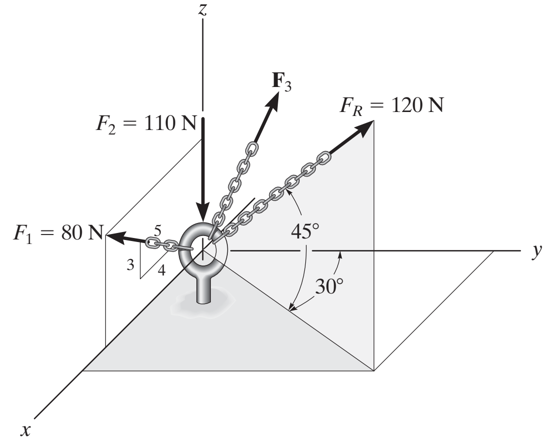
**2-82.** El poste está sometido a la fuerza **F**, la cual tiene componentes $F_x = 1.5$ kN y $F_z = 1.25$ kN. Si $\beta = 75°$, determine las magnitudes de **F** y $\mathbf{F}_y$.




**Probs. 2-81/82**

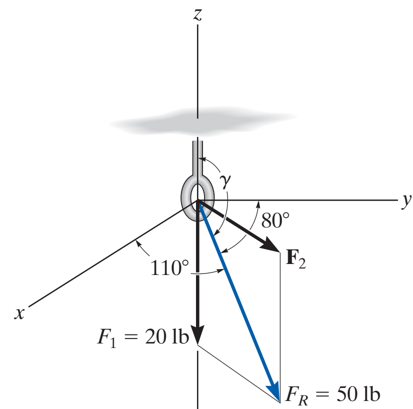
**2-83.** Tres fuerzas actúan sobre el anillo. Si la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ tiene la magnitud y la dirección que se muestran en la figura, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza $\mathbf{F}_3$.

*__2-84.__ Determine los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_R$.




**Probs. 2-83/84**

•**2.85.** Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre el perno. Si la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ tiene una magnitud de 50 lb y ángulos directores coordenados $\alpha = 110°$ y $\beta = 80°$, como se muestra en la figura, determine la magnitud de $\mathbf{F}_2$ y sus ángulos directores coordenados.




**Prob. 2-85**

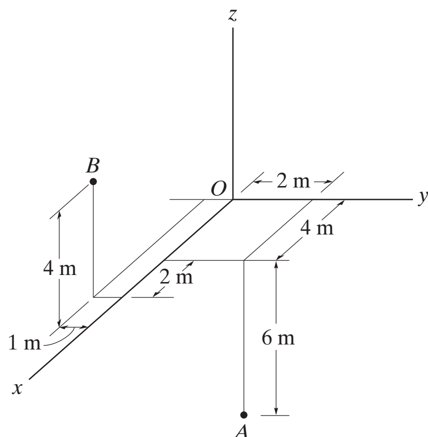



**Fig. 2-34**

2

## 2.7 Vectores de posición

En esta sección presentaremos el concepto de vector de posición. Se mostrará que este vector es importante al formular un vector de fuerza cartesiano dirigido entre dos puntos cualesquiera en el espacio.

**Coordenadas *x, y, z*.** A lo largo de este libro usaremos un sistema coordenado *derecho* para hacer referencia a la localización de puntos en el espacio. También usaremos la convención seguida en muchos libros técnicos, la cual exige que el eje $z$ positivo esté dirigido *hacia arriba* (dirección cenital) de forma que mida la altura de un objeto o la altitud de un punto. Por tanto, los ejes $x$, $y$ se encuentran en el plano horizontal, figura 2-34. Los puntos en el espacio se localizan con relación al origen de coordenadas, $O$, por mediciones sucesivas a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$. Por ejemplo, las coordenadas del punto $A$ se obtienen comenzando en $O$ y midiendo $x_A = +4$ m a lo largo del eje $x$, luego $y_A = +2$ m a lo largo del eje $y$, y finalmente $z_A = -6$ m a lo largo del eje $z$. Así, $A(4 \text{ m}, 2 \text{ m}, -6 \text{ m})$. De la misma manera, mediciones a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$ desde $O$ hasta $B$ generan las coordenadas de $B$, es decir, $B(6 \text{ m}, -1 \text{ m}, 4 \text{ m})$.

**Vector de posición.** Un *vector de posición* $\mathbf{r}$ se define como un vector fijo que ubica un punto en el espacio en relación con otro punto. Por ejemplo, si $\mathbf{r}$ se extiende desde el origen de coordenadas, $O$, hasta el punto $P(x, y, z)$, figura 2-35*a*, entonces $\mathbf{r}$ se puede expresar en forma de vector cartesiano como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Observe cómo la suma vectorial de cabeza a cola de las tres componentes genera el vector $\mathbf{r}$, figura 2-35*b*. A partir del origen $O$, se "recorre" $x$ en la dirección $+\mathbf{i}$, luego $y$ en la dirección $+\mathbf{j}$ y finalmente $z$ en la dirección $+\mathbf{k}$ para llegar al punto $P(x, y, z)$.

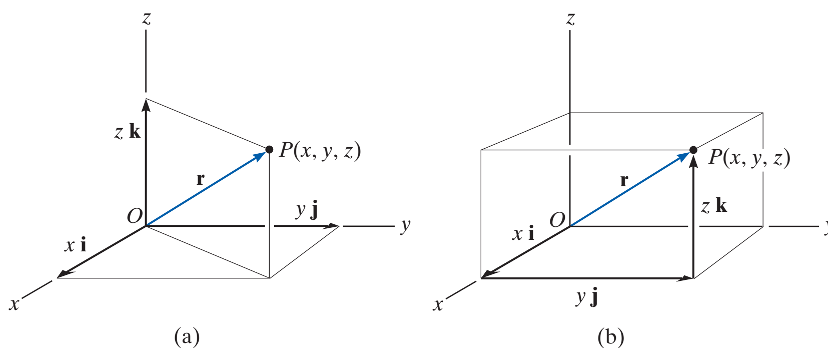



**Fig. 2-35**

En el caso más general, el vector de posición puede estar dirigido desde el punto $A$ hasta el punto $B$ en el espacio, figura 2-36*a*. Este vector también está designado por el símbolo $\mathbf{r}$. A manera de convención, *algunas veces* nos referiremos a este vector con *dos subíndices* para indicar desde dónde y hasta qué punto está dirigido. Así, $\mathbf{r}$ también puede designarse como $\mathbf{r}_{AB}$. Además observe que $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, en la figura 2-36*a* están referenciados con sólo un subíndice puesto que se extienden desde el origen de coordenadas.

A partir de la figura 2-36*a*, por la suma vectorial de cabeza a cola y con la regla del triángulo, se requiere que

$$\mathbf{r}_A + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B$$

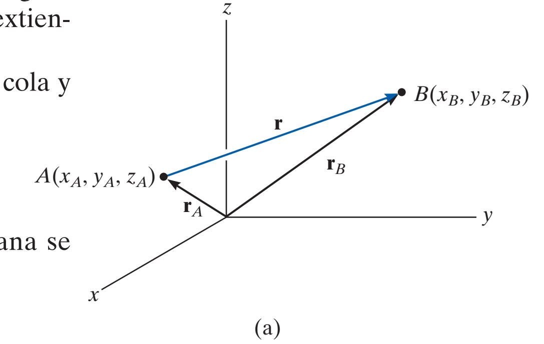
Al despejar $\mathbf{r}$ y expresar $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ en forma vectorial cartesiana se obtiene

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})$$

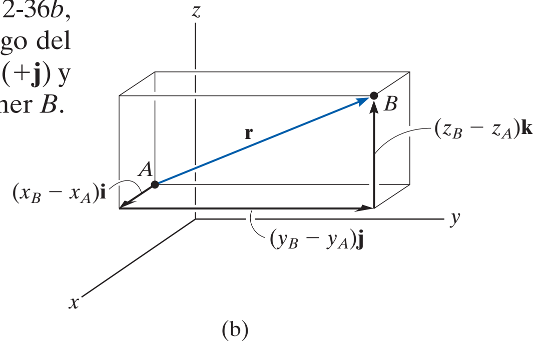
o bien

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \qquad (2\text{-}11)$$

*Así, las componentes* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *del vector de posición* $\mathbf{r}$ *pueden formarse al tomar las coordenadas de la cola del vector* $A(x_A, y_A, z_A)$ *para después restarlas de las coordenadas correspondientes de la cabeza.* $B(x_B, y_B, z_B)$. También podemos formar estas componentes *directamente*, figura 2-36*b*, al comenzar en $A$ y recorrer una distancia de $(x_B - x_A)$ a lo largo del eje $x$ positivo $(+\mathbf{i})$, después $(y_B - y_A)$ a lo largo del eje $y$ positivo $(+\mathbf{j})$ y finalmente $(z_B - z_A)$ a lo largo del eje $z$ positivo $(+\mathbf{k})$ para obtener $B$.




(a)




(b)

**Fig. 2-36**

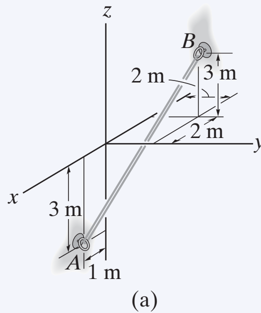



Si se establece un sistema de coordenadas $x$, $y$, $z$, entonces se pueden determinar las coordenadas de los puntos $A$ y $B$. A partir de esta posición se puede formular el vector $\mathbf{r}$ que actúa a lo largo del cable. Su magnitud representa la longitud del cable, y su vector unitario, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$, proporciona la dirección definida por $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

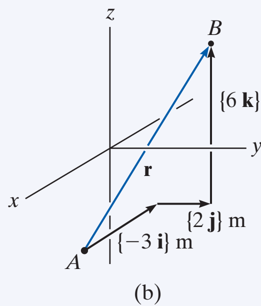
2

## EJEMPLO 2.12

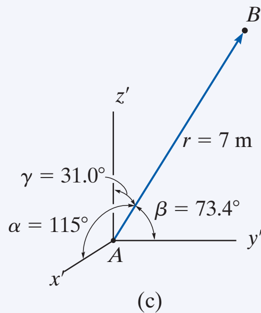
Una banda elástica de caucho está unida a los puntos $A$ y $B$ como se muestra en la figura 2-37*a*. Determine su longitud y su dirección medida de $A$ hacia $B$.



(a)



(b)



(c)

**Fig. 2-37**

### SOLUCIÓN

Primero establecemos un vector de posición desde $A$ hasta $B$, figura 2-37*b*. De acuerdo con la ecuación 2-11, las coordenadas de la cola $A(1\text{ m}, 0, -3\text{ m})$ se restan de las coordenadas de la cabeza $B(-2\text{ m}, 2\text{ m}, 3\text{ m})$, de donde se obtiene

$$\mathbf{r} = [-2\text{ m} - 1\text{ m}]\mathbf{i} + [2\text{ m} - 0]\mathbf{j} + [3\text{ m} - (-3\text{ m})]\mathbf{k}$$
$$= \{-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}\text{ m}$$

Estas componentes de $\mathbf{r}$ también se pueden determinar *directamente* si se observa que representan la dirección y la distancia que debe recorrerse a lo largo de cada eje a fin de llegar desde $A$ hasta $B$, es decir, a lo largo del eje $x$ $\{3\mathbf{i}\}$ m, a lo largo del eje $y$ $\{2\mathbf{j}\}$ m y finalmente a lo largo del eje $z$ $\{6\mathbf{k}\}$ m.

Por lo tanto, la longitud de la banda de caucho es

$$r = \sqrt{(-3\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Al formular un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Las componentes de este vector unitario dan los ángulos directores coordenados

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** estos ángulos se miden desde los *ejes positivos* de un sistema de coordenadas localizado en la cola de $\mathbf{r}$, como se muestra en la figura 2-37*c*.

## 2.8 Vector fuerza dirigido a lo largo de una línea

Con mucha frecuencia, en problemas tridimensionales de estática, la dirección de una fuerza se especifica por dos puntos a través de los cuales pasa su línea de acción. Tal situación se muestra en la figura 2-38, donde la fuerza **F** está dirigida a lo largo de la cuerda $AB$. Podemos formular **F** como un vector cartesiano al observar que esta fuerza tiene la *misma dirección* y *sentido* que el vector de posición **r** dirigido desde el punto $A$ hasta el punto $B$ sobre la cuerda. Esta dirección común se especifica mediante el vector unitario $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. Por lo tanto,

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = F\left(\frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

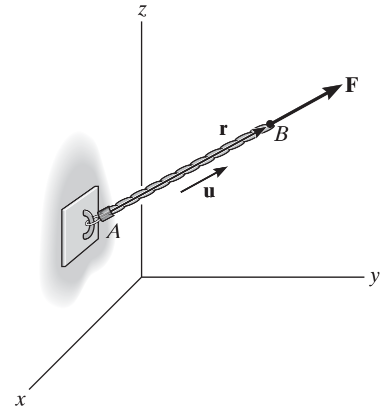
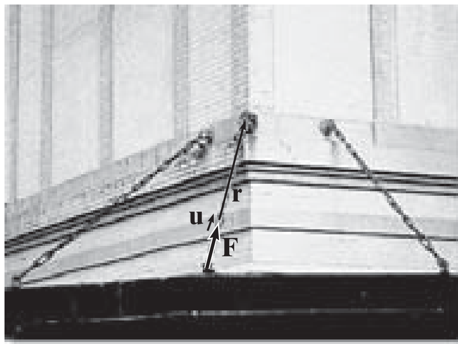



**Fig. 2-38**

Aunque hemos representado **F** simbólicamente en la figura 2-38, observe que tiene *unidades de fuerza*, a diferencia de **r**, que tiene unidades de longitud.




La fuerza **F** que actúa a lo largo de la cadena puede ser representada como un vector cartesiano si se establecen primero los ejes $x$, $y$, $z$ y se forma un vector de posición **r** a lo largo de la longitud de la cadena. Después se puede determinar el vector unitario correspondiente $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ que define la dirección tanto de la cadena como de la fuerza. Finalmente, la magnitud de la fuerza se combina con su dirección. $\mathbf{F} = F\mathbf{u}$.

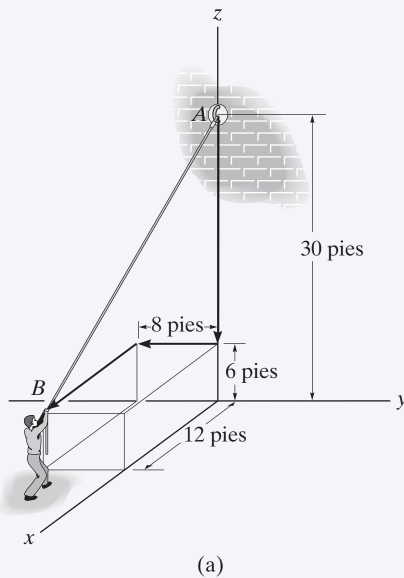
### Puntos importantes

- Un vector de posición localiza un punto en el espacio con respecto a otro punto.
- La manera más fácil de formular las componentes de un vector de posición consiste en determinar la distancia y la dirección que debe recorrerse a lo largo de las direcciones $x$, $y$, $z$, desde la cola hasta la cabeza del vector.
- Una fuerza **F** que actúa en la dirección de un vector de posición **r** puede ser representada en forma cartesiana si se determina el vector unitario **u** del vector de posición y éste se multiplica por la magnitud de la fuerza, es decir, $\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F(\mathbf{r}/r)$.

2

## EJEMPLO 2.13

El hombre que se muestra en la figura 2-39*a* jala la cuerda con una fuerza de 70 lb. Representa esta fuerza al actuar sobre el soporte *A* como un vector cartesiano y determine su dirección.



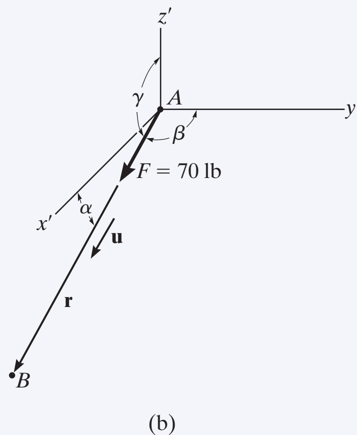




**Fig. 2-39**

### SOLUCIÓN

En la figura 2-39*b* se muestra la fuerza **F**. La *dirección* de este vector, **u**, está determinada a partir del vector de posición **r**, el cual se extiende desde *A* hasta *B*. En vez de usar estas coordenadas de los extremos de la cuerda, **r** también puede obtenerse *directamente* al observar en la figura 2-39*a* que se debe recorrer desde $A\{-24\mathbf{k}\}$ pies, luego $\{-8\mathbf{j}\}$ pies y finalmente $\{12\mathbf{i}\}$ pies para llegar a *B*. Así,

$$\mathbf{r} = \{12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}\}\text{ pies}$$

La magnitud de **r**, que representa la *longitud* de la cuerda *AB*, es

$$r = \sqrt{(12\text{ pies})^2 + (-8\text{ pies})^2 + (-24\text{ pies})^2} = 28\text{ pies}$$

Para formar el vector unitario que define la dirección y el sentido de **r** y **F** tenemos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}$$

Como **F** tiene una *magnitud* de 70 lb y una *dirección* especificada por **u**, entonces

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = 70\text{ lb}\left(\frac{12}{28}\mathbf{i} - \frac{8}{28}\mathbf{j} - \frac{24}{28}\mathbf{k}\right)$$

$$= \{30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Los ángulos directores coordenados están medidos entre **r** (o **F**) y los *ejes positivos* de un sistema coordenado con origen en *A*, figura 2-39*b*. A partir de las componentes del vector unitario:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{28}\right) = 107° \qquad \textit{Resp.}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-24}{28}\right) = 149° \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** estos resultados tienen sentido si se les compara con los ángulos identificados en la figura 2-39*b*.

## EJEMPLO 2.14

La fuerza que se muestra en la figura 2-40*a* actúa sobre el gancho. Exprésela como un vector cartesiano.

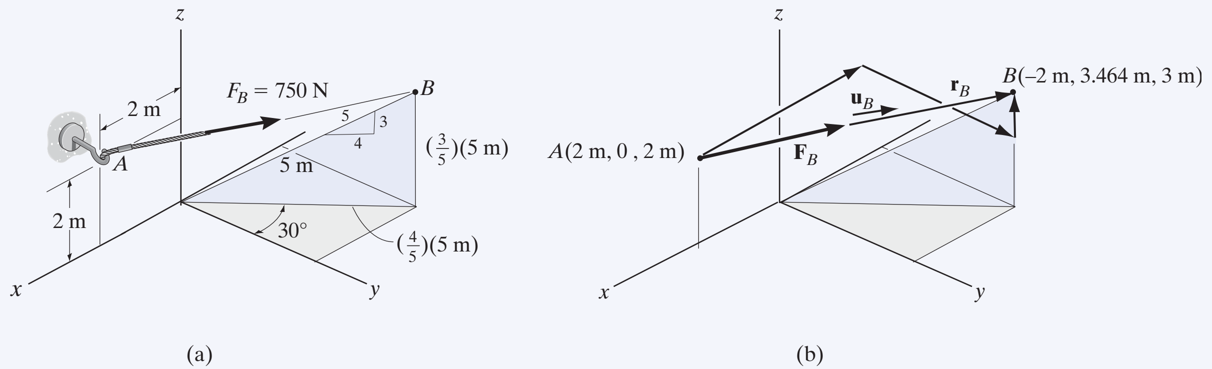



**Fig. 2-40**

### SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura 2-40*b*, las coordenadas para los puntos *A* y *B* son

$$A(2\text{ m}, 0, 2\text{ m})$$

y

$$B\left[-\left(\frac{4}{5}\right)5\text{ sen }30^\circ\text{ m}, \left(\frac{4}{5}\right)5\cos 30^\circ\text{ m}, \left(\frac{3}{5}\right)5\text{ m}\right]$$

o bien

$$B(-2\text{ m}, 3.464\text{ m}, 3\text{ m})$$

Por lo tanto, para ir desde *A* hasta *B*, deben recorrerse {4**i**} m, después {3.464**j**} m y finalmente {1**k**} m. Así,

$$\mathbf{u}_B = \left(\frac{\mathbf{r}_B}{r_B}\right) = \frac{\{-4\mathbf{i} + 3.464\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(-4\text{ m})^2 + (3.464\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2}}$$

$$= -0.7428\mathbf{i} + 0.6433\mathbf{j} + 0.1857\mathbf{k}$$

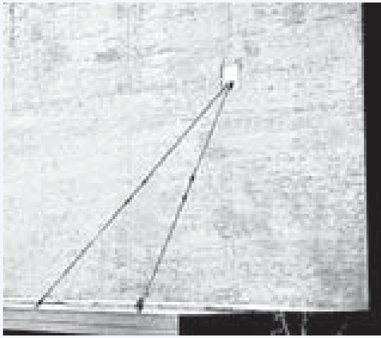
La fuerza $\mathbf{F}_B$ expresada como un vector cartesiano se convierte en

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{u}_B = (750\text{ N})(-0.74281\mathbf{i} + 0.6433\mathbf{j} + 0.1857\mathbf{k})$$

$$= \{-557\mathbf{i} + 482\mathbf{j} + 139\mathbf{k}\}\text{ N}$$ ***Resp.***

2

## EJEMPLO 2.15



El techo está sostenido por cables como se muestra en la fotografía. Si los cables ejercen fuerzas $F_{AB} = 100$ N y $F_{AC} = 120$ N sobre el gancho de pared en $A$ como se muestra en la figura 2-41$a$, determine la fuerza resultante que actúa en $A$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

### SOLUCIÓN

En la figura 2-41$b$ se muestra gráficamente la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Podemos expresar esta fuerza como un vector cartesiano si formulamos $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ como vectores cartesianos y sumamos luego sus componentes. Las direcciones de $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ se especifican al formar vectores unitarios $\mathbf{u}_{AB}$ y $\mathbf{u}_{AC}$ a lo largo de los cables. Esos vectores unitarios se obtienen a partir de los vectores de posición asociados $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$. Con referencia a la figura 2-41$a$, para ir desde $A$ hasta $B$ debemos recorrer $\{-4\mathbf{k}\}$ m, y después $\{-4\mathbf{i}\}$ m. Por consiguiente,

$$\mathbf{r}_{AB} = \{4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\}\text{ m}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(4\text{ m})^2 + (-4\text{ m})^2} = 5.66\text{ m}$$

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = (100\text{ N})\left(\frac{4}{5.66}\mathbf{i} - \frac{4}{5.66}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{F}_{AB} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Para ir desde $A$ hasta $C$, debemos recorrer $\{-4\mathbf{k}\}$ m, luego $\{2\mathbf{j}\}$ m y finalmente $\{4\mathbf{j}\}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{r}_{AC} = \{4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}\text{ m}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(4\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 + (-4\text{ m})^2} = 6\text{ m}$$

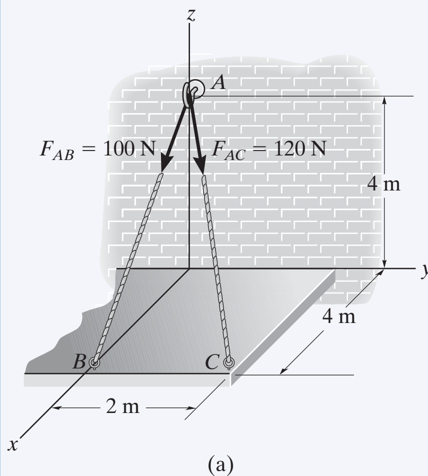
$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = (120\text{ N})\left(\frac{4}{6}\mathbf{i} + \frac{2}{6}\mathbf{j} - \frac{4}{6}\mathbf{k}\right)$$

$$= \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}\text{ N}$$

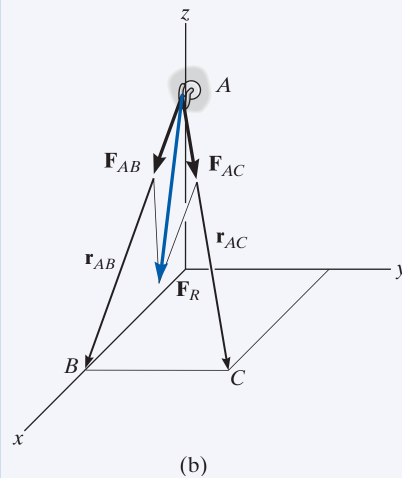
Por lo tanto, la fuerza resultante es

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = \{70.7\mathbf{i} - 70.7\mathbf{k}\}\text{ N} + \{80\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$= \{151\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 151\mathbf{k}\}\text{ N}$$ ***Resp.***




(a)



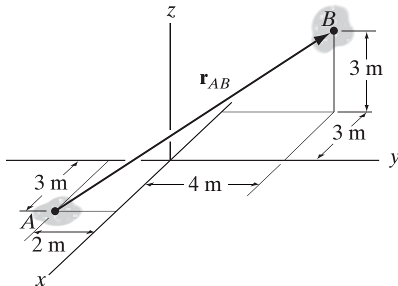

(b)

**Fig. 2-41**

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

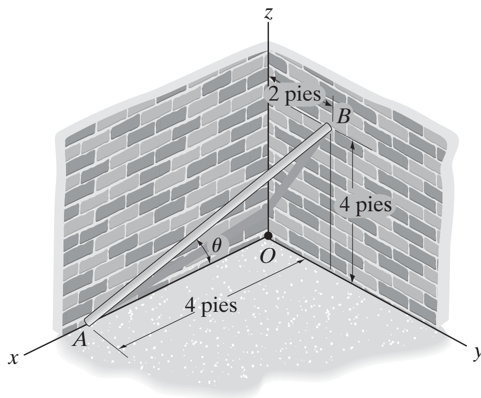


**F2-19.** Exprese el vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$ en forma de vector cartesiano, después determine su magnitud y sus ángulos directores coordenados.



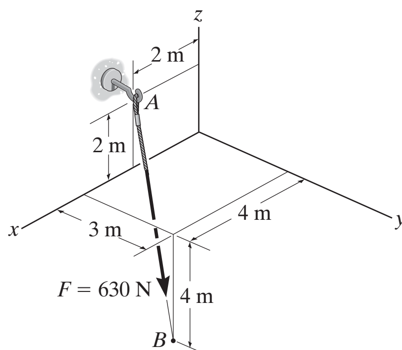

**F2-19**

**F2-20.** Determine la longitud de la varilla y el vector de posición dirigido desde $A$ hasta $B$. ¿Cuál es el ángulo $\theta$?



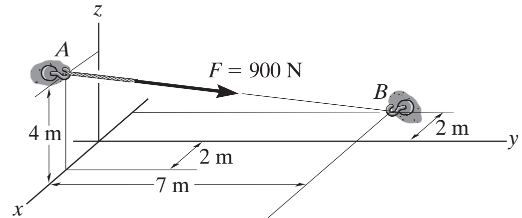

**F2-20**

**F2-21.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.



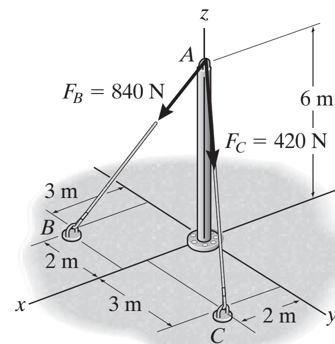

**F2-21**

**F2-22.** Exprese la fuerza como un vector cartesiano.



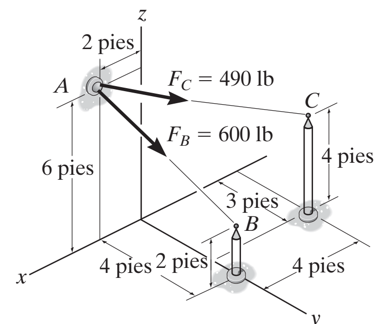

**F2-22**

**F2-23.** Determine la magnitud de la fuerza resultante en $A$.




**F2-23**

**F2-24.** Determine la fuerza resultante en $A$.



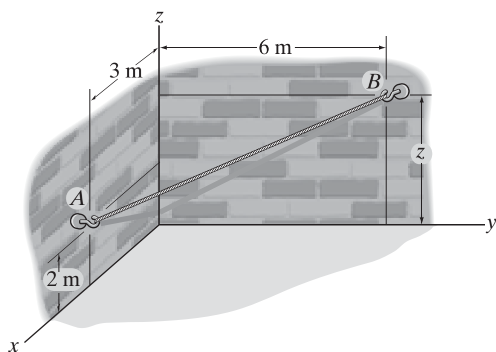

**F2-24**

## PROBLEMAS



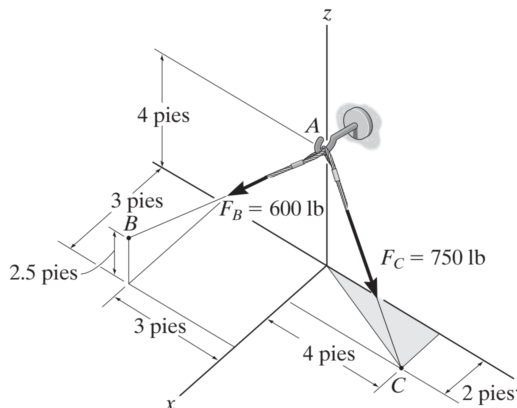
**2-86.** Determine el vector de posición **r** dirigido desde el punto $A$ hasta el punto $B$ y la longitud de la cuerda $AB$. Considere $z = 4$ m.

**2-87.** Si la cuerda $AB$ tiene 7.5 m de longitud, determine la posición coordenada $+z$ del punto $B$.



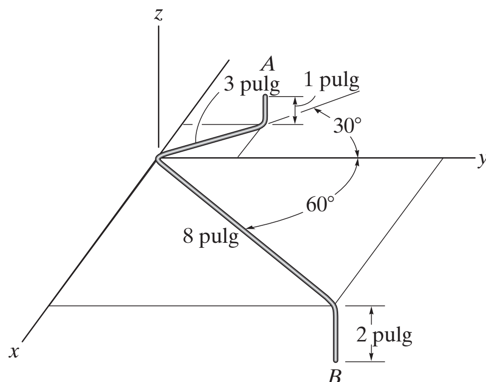

**Probs. 2-86/87**

•**2-89.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa en $A$.



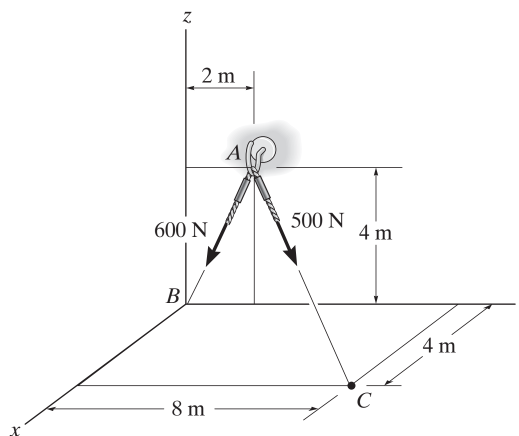

**Prob. 2-89**

*__2-88.__ Determine la distancia entre los puntos extremos $A$ y $B$ sobre el alambre, pero antes formule un vector de posición desde $A$ hasta $B$ para luego determinar su magnitud.



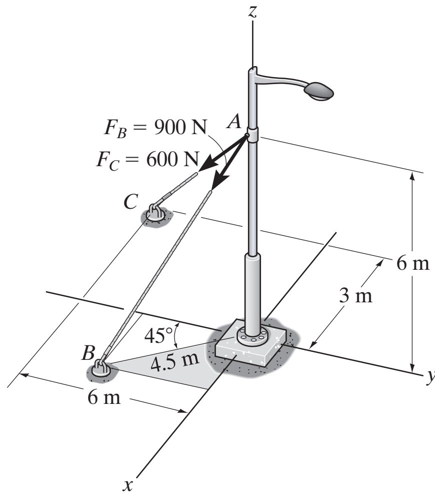

**Prob. 2-88**

**2-90.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.



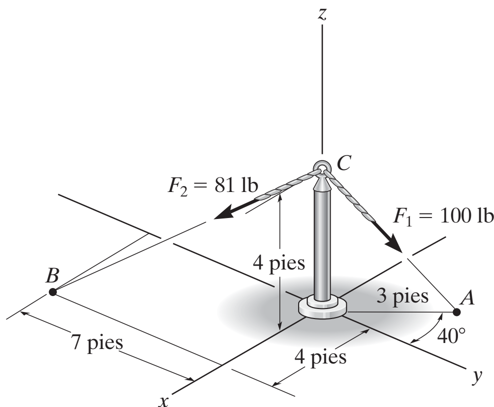

**Prob. 2-90**

**2-91.** Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa en $A$.




Prob. 2-91

*__2-92.__ Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

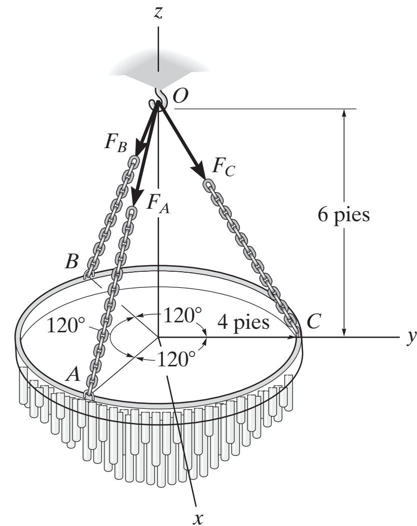



Prob. 2-92

•**2-93.** El candelabro está sostenido por tres cadenas que son concurrentes en el punto $O$. Si la fuerza en cada cadena tiene una magnitud de 60 lb, exprese cada fuerza como un vector cartesiano y determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

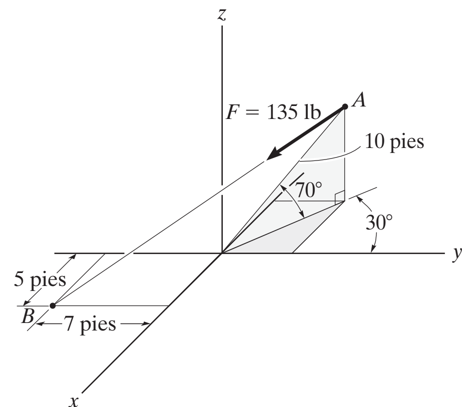


**2-94.** El candelabro está sostenido por tres cadenas que son concurrentes en el punto $O$. Si la fuerza resultante en $O$ tiene una magnitud de 130 lb y está dirigida a lo largo del eje negativo $z$, determine la fuerza en cada cadena.



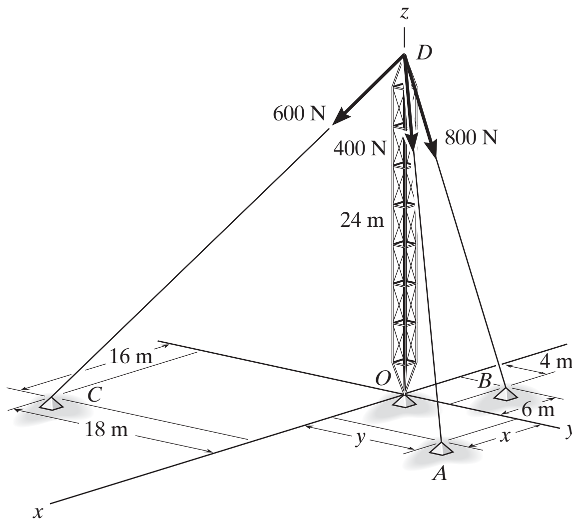

Probs. 2-93/94

**2-95.** Exprese la fuerza **F** como un vector cartesiano; después determine sus ángulos directores coordenados.



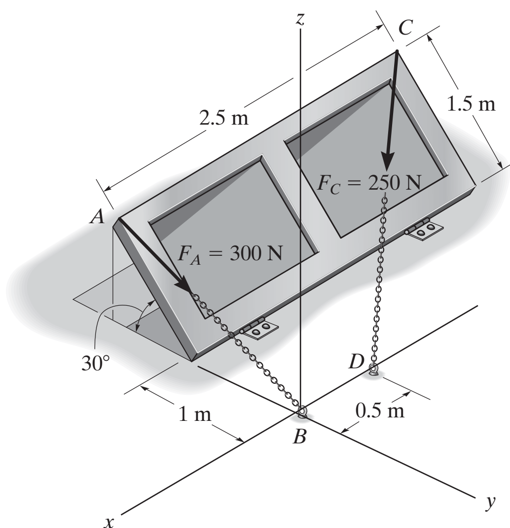

Prob. 2-95

*2-96. La torre se mantiene en su posición mediante tres cables. Si la fuerza de cada cable que actúa sobre la torre es como se muestra en la figura, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de la fuerza resultante. Considere $x = 20$ m, $y = 15$ m.



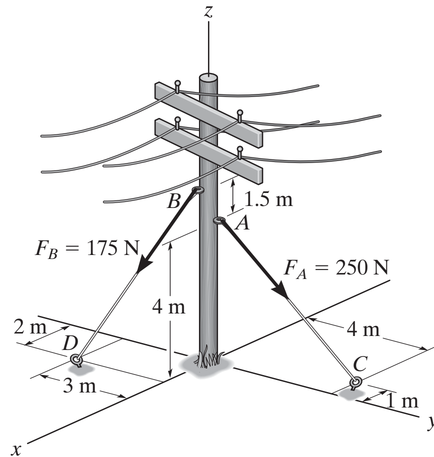

Prob. 2-96

•2-97. La puerta se mantiene abierta por medio de dos cadenas. Si las tensiones en $AB$ y $CD$ son $F_A = 300$ N y $F_C = 250$ N, respectivamente, exprese cada una de estas fuerzas en forma vectorial cartesiana.




Prob. 2-97

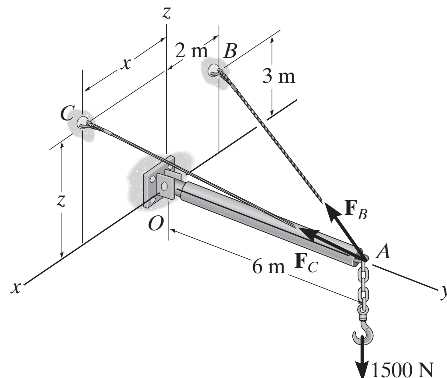
2-98. Los cables de retén se utilizan para dar soporte al poste telefónico. Represente la fuerza en cada cable en forma de vector cartesiano. Pase por alto el diámetro del poste.




Prob. 2-98

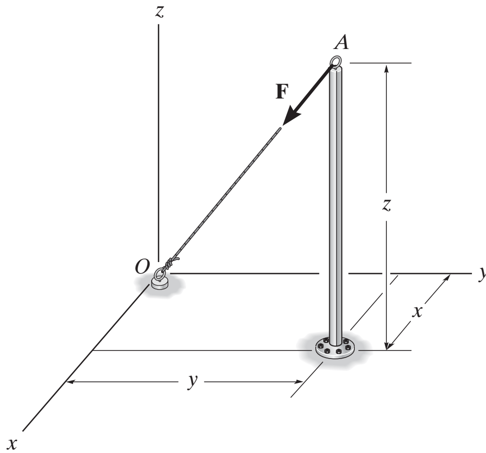
2-99. Se utilizan dos cables para asegurar la barra saliente en su posición y soportar la carga de 1500 N. Si la fuerza resultante está dirigida a lo largo de la barra desde el punto $A$ hacia $O$, determine las magnitudes de la fuerza resultante y de las fuerzas $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$. Considere $x = 3$ m y $z = 2$ m.

*2-100. Se utilizan dos cables para asegurar la barra saliente en su posición y para soportar la carga de 1500 N. Si la fuerza resultante está dirigida a lo largo de la barra desde el punto $A$ hacia $O$, determine los valores de $x$ y $z$ para las coordenadas del punto $C$ y la magnitud de la fuerza resultante. Considere $\mathbf{F}_B = 1610$ N y $\mathbf{F}_C = 2400$ N.




Probs. 2-99/100

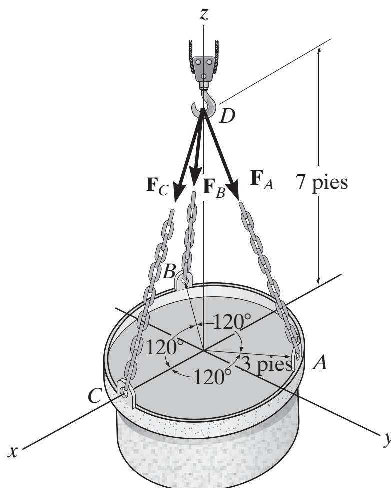
**•2-101.** El cable $AO$ ejerce una fuerza sobre la parte superior del poste de $\mathbf{F} = \{-120\mathbf{i} - 90\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\}$ lb. Si el cable tiene una longitud de 34 pies, determine la altura $z$ del poste y la ubicación $(x, y)$ de su base.




**Prob. 2-101**

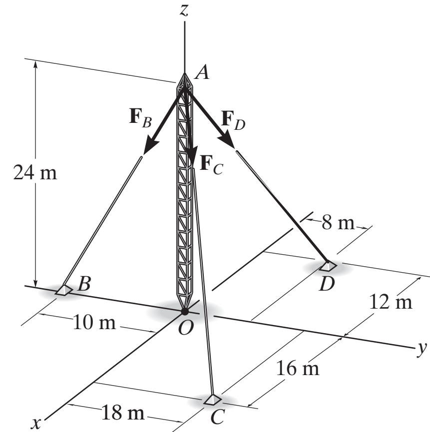
**2-102.** Si la fuerza en cada cadena tiene una magnitud de 450 lb, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

**2-103.** Si la resultante de las tres fuerzas es $\mathbf{F}_R = \{-900\mathbf{k}\}$ lb, determine la magnitud de la fuerza en cada cadena.




**Probs. 2-102/103**

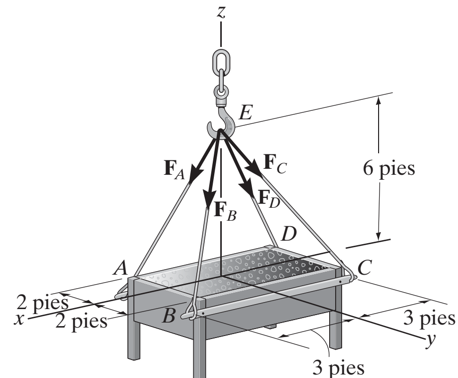
***2-104.** La torre de antena se sostiene mediante tres cables. Si las fuerzas de estos cables que actúan sobre la antena son $\mathbf{F}_B = 520$ N, $\mathbf{F}_C = 680$ N y $\mathbf{F}_D = 560$ N, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante que actúa en $A$.




**Prob. 2-104**

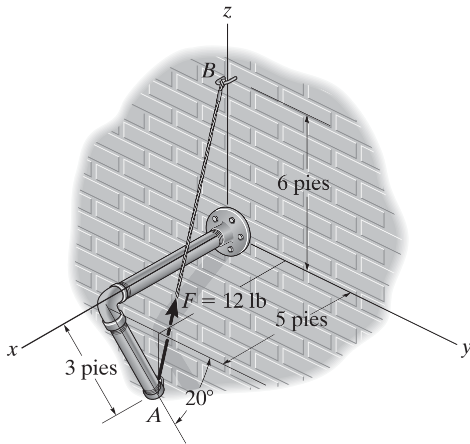
**•2-105.** Si la fuerza en cada cable atado al cofre es de 70 lb, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.

**2-106.** Si la resultante de las cuatro fuerzas es $\mathbf{F}_R = \{-360\mathbf{k}\}$ lb, determine la tensión desarrollada en cada cable. Debido a la simetría, la tensión en los cuatro cables es la misma.



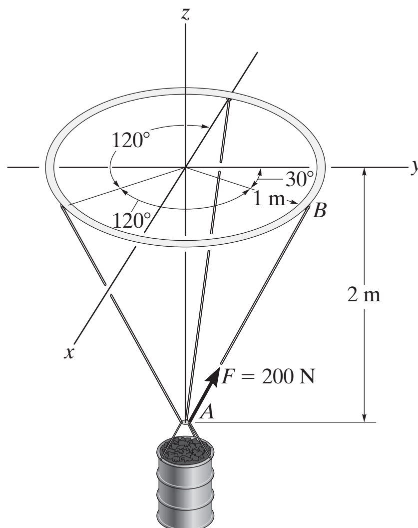

**Probs. 2-105/106**

**2-107.** El tubo está soportado en su extremo mediante una cuerda $AB$. Si la cuerda ejerce una fuerza $F = 12$ lb sobre el tubo en $A$, exprese esta fuerza como un vector cartesiano.



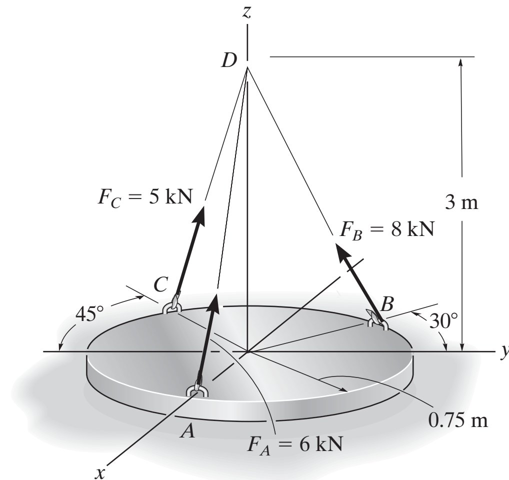

**Prob. 2-107**

*****2-108.** La carga en $A$ genera una fuerza de 200 N en el cable $AB$. Exprese esta fuerza como un vector cartesiano, que actúa en $A$ y está dirigido hacia $B$.



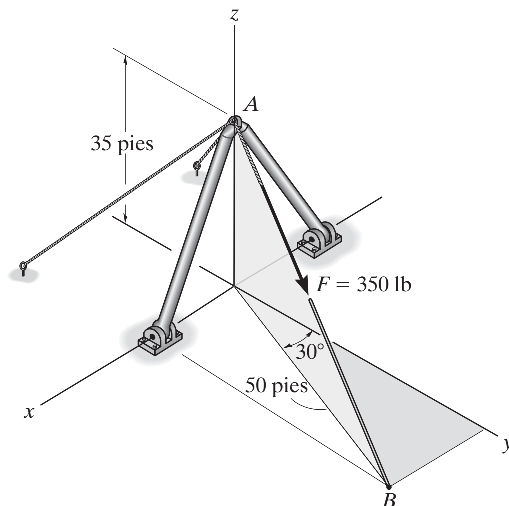

**Prob. 2-108**

•**2-109.** La placa cilíndrica está sometida a las fuerzas de tres cables que concurren en el punto $D$. Exprese cada fuerza ejercida por los cables sobre la placa como un vector cartesiano, y determine la magnitud y los ángulos directores coordenados de la fuerza resultante.




**Prob. 2-109**

**2-110.** El cable unido al brazo de la grúa ejerce una fuerza de $F = 350$ lb. Exprese esta fuerza como un vector cartesiano.




**Prob. 2-110**

## 2.9 Producto punto

Algunas veces, en estática debemos localizar el ángulo entre dos líneas o las componentes de una fuerza paralela y perpendicular a una línea. En dos dimensiones, esos problemas pueden resolverse por trigonometría puesto que las relaciones geométricas son fáciles de visualizar. Sin embargo, en tres dimensiones esto suele ser difícil, y en consecuencia deben emplearse métodos vectoriales para encontrar la solución. El producto punto define un método particular para "multiplicar" dos vectores y se usa para resolver los problemas antes mencionados.

El *producto punto* de los vectores **A** y **B**, que se escribe **A · B**, y se lee "**A** punto **B**", se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el coseno del ángulo $\theta$ entre sus colas, figura 2-42. Expresado en forma de ecuación,

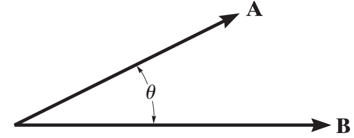


Fig. 2-42

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \tag{2-12}$$

donde $0° \leq \theta \leq 180°$. Con frecuencia, se hace referencia al producto punto como *producto escalar* de vectores puesto que el resultado es un *escalar* y no un vector.

### Leyes de operación.

1. Ley conmutativa: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
2. Multiplicación por un escalar: $a(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (a\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(a\mathbf{B})$
3. Ley distributiva: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})$

Es fácil demostrar la primera y segunda leyes por medio de la ecuación 2-12. La demostración de la ley distributiva se deja como un ejercicio (vea el problema 2-111).

**Formulación vectorial cartesiana.** La ecuación 2-12 debe usarse para hallar el producto punto de cada uno de los dos vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$ e $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$. Si queremos encontrar el producto punto de dos vectores **A** y **B** que se expresan en forma vectorial cartesiana, tenemos

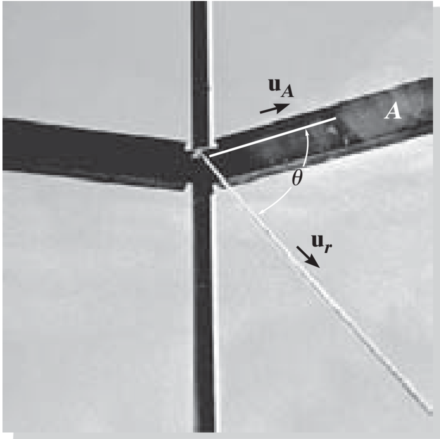
$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})\\
&= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\\
&\quad + A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\\
&\quad + A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})
\end{aligned}$$

Al realizar las operaciones del producto punto, el resultado final se convierte en

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2-13}$$

*Por tanto, para determinar el producto punto de dos vectores cartesianos, multiplique sus componentes correspondientes x, y, z, y sume sus productos algebraicamente*. Observe que el resultado será un *escalar* positivo o negativo.

2




El ángulo $\theta$ entre la cuerda y la viga de conexión puede determinarse formulando los vectores unitarios a lo largo de la viga para después usar el producto punto $\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{u}_r = (1)(1)\cos\theta$.

**Aplicaciones.** En mecánica, el producto punto tiene dos importantes aplicaciones.

- ***El ángulo formado entre dos vectores o líneas que se intersecan.*** El ángulo $\theta$ entre las colas de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ que se muestran en la figura 2-42 pueden determinarse mediante la ecuación 2-12 y escribirse como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Aquí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ se calcula con la ecuación 2-13. En particular, observe que si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0, \theta = \cos^{-1} 0 = 90^\circ$, por lo que $\mathbf{A}$ será *perpendicular* a $\mathbf{B}$.

- ***Las componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea.*** La componente de un vector $\mathbf{A}$ paralelo a, o colineal con, la línea $aa'$ en la figura 2-43 se define por $A_a$, donde $A_a = A\cos\theta$. En ocasiones, a esta componente se le llama la *proyección* de $\mathbf{A}$ sobre la línea, puesto que se forma un *ángulo recto* en la construcción. Si la *dirección* de la línea está especificada por el vector unitario $\mathbf{u}_a$, entonces como $u_a = 1$, podemos determinar $\mathbf{A}_a$ directamente con el producto punto (ecuación 2-12); esto es,

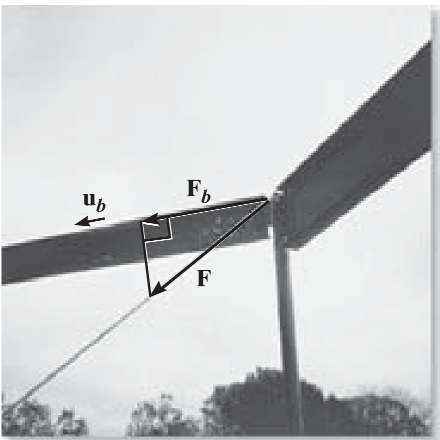
$$A_a = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_a$$

*Por consiguiente, la proyección escalar de* $\mathbf{A}$ *a lo largo de una línea se determina con el producto punto de* $\mathbf{A}$ *y el vector unitario* $\mathbf{u}_a$ *que define la dirección de la línea*. Observe que si este resultado es positivo, entonces $\mathbf{A}_a$ tiene un sentido direccional que es igual al de $\mathbf{u}_a$, mientras que si $A_a$ es un escalar negativo, entonces $\mathbf{A}_a$ tiene el sentido opuesto de dirección al de $\mathbf{u}_a$.

Por lo tanto, la componente $\mathbf{A}_a$ representada como un *vector* es

$$\mathbf{A}_a = A_a\,\mathbf{u}_a$$

También se puede obtener la componente de $\mathbf{A}$ que es perpendicular a la línea $aa$, figura 2-43. Como $\mathbf{A} = \mathbf{A}_a + \mathbf{A}_\perp$, entonces $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - \mathbf{A}_a$. Hay dos maneras posibles de obtener $A_\perp$. Una es determinar $\theta$ con el producto punto, $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_A/A)$, entonces $A_\perp = A\,\text{sen}\,\theta$. De manera alternativa, si $A_a$ es conocida, entonces por el teorema de Pitágoras también podemos escribir $A_\perp = \sqrt{A^2 - A_a{}^2}$.




La proyección de la fuerza $\mathbf{F}$ del cable a lo largo de la viga puede ser determinada al determinar primero el vector unitario $\mathbf{u}_b$ que define esta dirección. Después se aplica el producto punto, $F_b = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_b$.

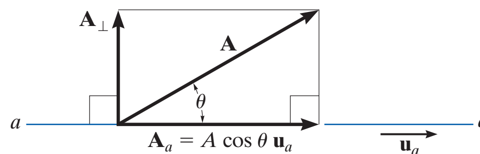



**Fig. 2-43**

## Puntos importantes

- El producto punto se usa para determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector en una dirección específica.
- Si los vectores **A** y **B** se expresan en forma de vector cartesiano, el producto punto se determina por medio de la multiplicación de las respectivas componentes escalares $x$, $y$, $z$ y la suma algebraica de los resultados, es decir, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.
- A partir de la definición del producto punto, el ángulo formado entre las colas de los vectores **A** y **B** es $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB)$.
- La magnitud de la proyección del vector **A** a lo largo de una línea *aa* cuya dirección está especificada por $\mathbf{u}_a$ se determina a partir del producto punto $A_a = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a$.

## EJEMPLO 2.16

Determine las magnitudes de la proyección de la fuerza **F** en la figura 2-44 sobre los ejes $u$ y $v$.

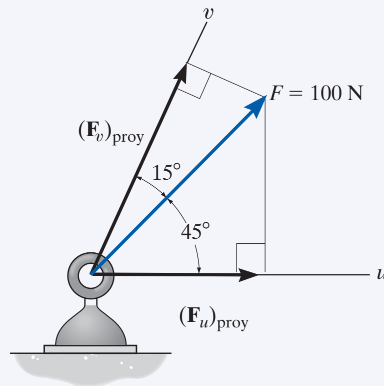



**Fig. 2-44**

### SOLUCIÓN

**Proyecciones de fuerza.** En la figura 2-44 se muestra la representación gráfica de las *proyecciones*. A partir de esta figura, las magnitudes de las proyecciones de **F** sobre los ejes $u$ y $v$ pueden obtenerse por trigonometría:

$$(F_u)_{\text{proy}} = (100 \text{ N})\cos 45° = 70.7 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

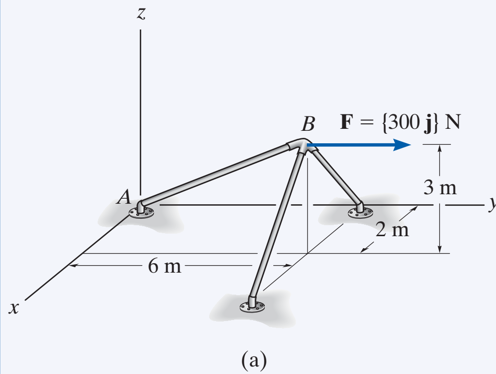
$$(F_v)_{\text{proy}} = (100 \text{ N})\cos 15° = 96.6 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** estas proyecciones no son iguales a las magnitudes de las componentes de la fuerza **F** a lo largo de los ejes $u$ y $v$ que se encontraron con la ley del paralelogramo. Sólo serán iguales si los ejes $u$ y $v$ son *perpendiculares* entre sí.

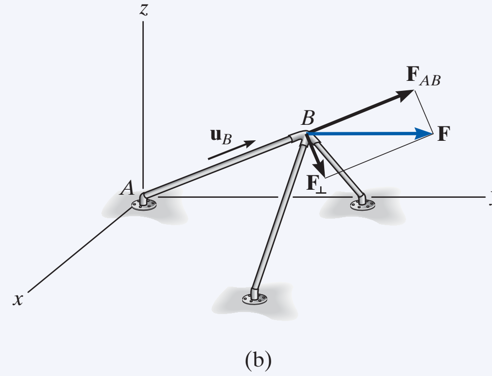
2

## EJEMPLO 2.17

La estructura que se muestra en la figura 2-45*a* está sometida a una fuerza horizontal $\mathbf{F} = \{300\mathbf{j}\}$. Determine la magnitud de las componentes de esta fuerza paralela y perpendicular al elemento $AB$.



(a)



(b)

**Fig 2-45**

### SOLUCIÓN

La magnitud de la componente de **F** a lo largo de $AB$ es igual al producto punto de **F** y el vector unitario $\mathbf{u}_B$, el cual define la dirección de $AB$, figura 2-45*b*. Como

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (3)^2}} = 0.286\,\mathbf{i} + 0.857\,\mathbf{j} + 0.429\,\mathbf{k}$$

entonces

$$\begin{aligned} F_{AB} &= F\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_B = (300\mathbf{j})\cdot(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= (0)(0.286) + (300)(0.857) + (0)(0.429) \\ &= 257.1\text{ N} \end{aligned}$$
***Resp.***

Como el resultado es un escalar positivo, $\mathbf{F}_{AB}$ tiene el mismo sentido de dirección que $\mathbf{u}_B$, figura 2-45*b*.

Si se expresa $\mathbf{F}_{AB}$ en forma de vector cartesiano, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= F_{AB}\mathbf{u}_B = (257.1\text{ N})(0.286\mathbf{i} + 0.857\mathbf{j} + 0.429\mathbf{k}) \\ &= \{73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}\}\text{N} \end{aligned}$$
***Resp.***

Por lo tanto, la componente perpendicular, figura 2-45*b*, es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\perp} &= \mathbf{F} - \mathbf{F}_{AB} = 300\mathbf{j} - (73.5\mathbf{i} + 220\mathbf{j} + 110\mathbf{k}) \\ &= \{-73.5\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 110\mathbf{k}\}\text{ N} \end{aligned}$$

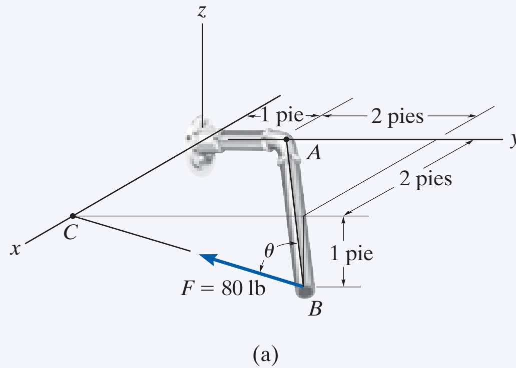
Su magnitud puede determinarse a partir de este vector o con el teorema de Pitágoras, figura 2-45*b*:

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= \sqrt{F^2 - F_{AB}^2} = \sqrt{(300\text{ N})^2 - (257.1\text{ N})^2} \\ &= 155\text{ N} \end{aligned}$$
***Resp.***

2

## EJEMPLO 2.18

El tubo en la figura 2-46*a* está sometido a la fuerza $F = 80$ lb. Determine el ángulo $\theta$ entre **F** y el segmento de tubo $BA$, así como la proyección de **F** a lo largo de este segmento.




(a)

### SOLUCIÓN

**Ángulo $\theta$.** Primero estableceremos vectores de posición de $B$ a $A$ y de $B$ a $C$; figura 2-46*b*. Luego determinaremos el ángulo $\theta$ entre las colas de estos dos vectores.

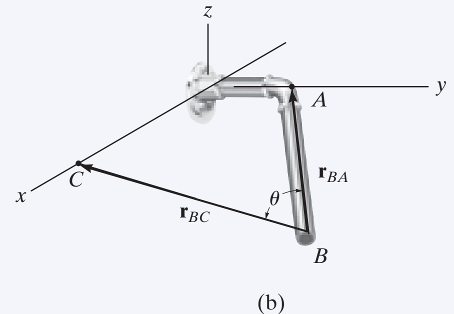
$$\mathbf{r}_{BA} = \{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}\text{ pies},\quad r_{BA} = 3\text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{BC} = \{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}\text{ pies},\quad r_{BC} = \sqrt{10}\text{ pies}$$

Así,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_{BA}\cdot\mathbf{r}_{BC}}{r_{BA}r_{BC}} = \frac{(-2)(0) + (-2)(-3) + (1)(1)}{3\sqrt{10}} = 0.7379$$

$$\theta = 42.5^\circ \qquad \textit{Resp.}$$




(b)

**Componentes de F.** En la figura 2-46*b*, se muestra la componente de **F** a lo largo de $BA$. Debemos formular primero el vector unitario a lo largo de $BA$ y la fuerza **F** como vectores cartesianos.

$$\mathbf{u}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})}{3} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

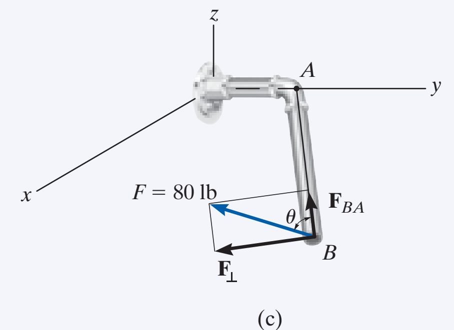
$$\mathbf{F} = 80\text{ lb}\left(\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}}\right) = 80\left(\frac{-3\mathbf{j} + 1\mathbf{k}}{\sqrt{10}}\right) = -75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k}$$

Entonces,

$$F_{BA} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{BA} = (-75.89\mathbf{j} + 25.30\mathbf{k})\cdot\left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$= 0\left(-\frac{2}{3}\right) + (-75.89)\left(-\frac{2}{3}\right) + (25.30)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 59.0\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

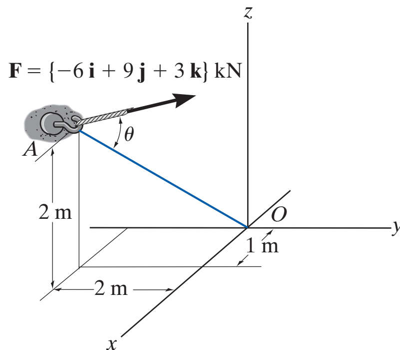
**NOTA:** como se conoce $\theta$, entonces también, $F_{BA} = F\cos\theta = 80$ lb $\cos 42.5^\circ = 59.0$ lb.

**Fig. 2-46**

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

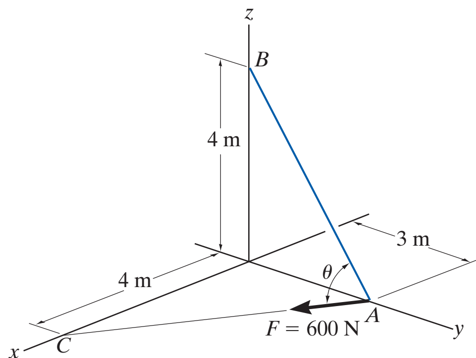


**F2-25.** Determine el ángulo $\theta$ entre la fuerza y la línea $AO$.




F2-25

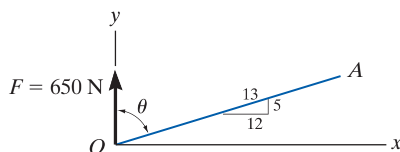
**F2-26.** Determine el ángulo $\theta$ entre la fuerza y la línea $AB$.




F2-26

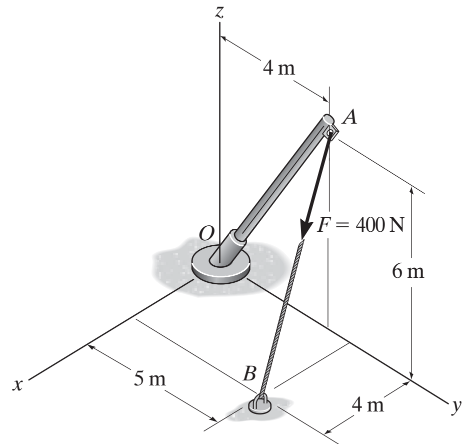
**F2-27.** Determine el ángulo $\theta$ entre la fuerza y la línea $OA$.

**F2-28.** Determine la componente de proyección de la fuerza a lo largo de la línea $OA$.



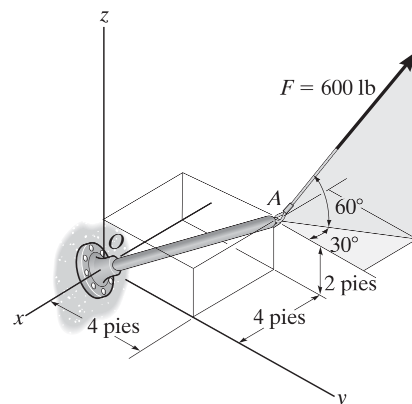

F2-27/28

**F2-29.** Encuentre la magnitud de la componente de la fuerza proyectada a lo largo del tubo.




F2-29

**F2-30.** Determine las componentes de la fuerza que actúan en forma paralela y perpendicular al eje del poste.



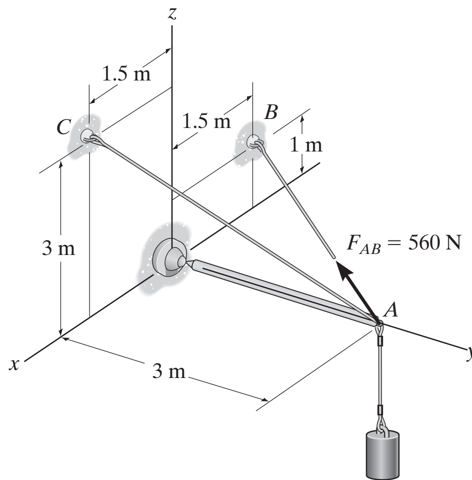

F2-30

## PROBLEMAS



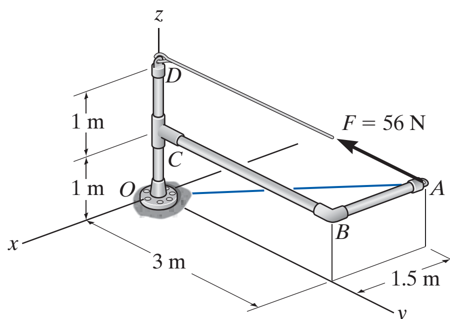
**2-111.** Dados los tres vectores **A**, **B** y **D**, muestre que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$.

***2-112.** Determine la componente proyectada de la fuerza $F_{AB} = 560$ N que actúa a lo largo del cable $AC$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



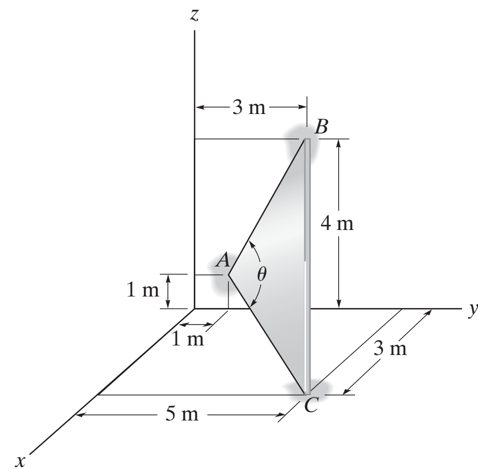

**Prob. 2-112**

**•2-113.** Determine las magnitudes de las componentes de la fuerza $F = 56$ N que actúan a lo largo de la línea $AO$ y en forma perpendicular a ésta.



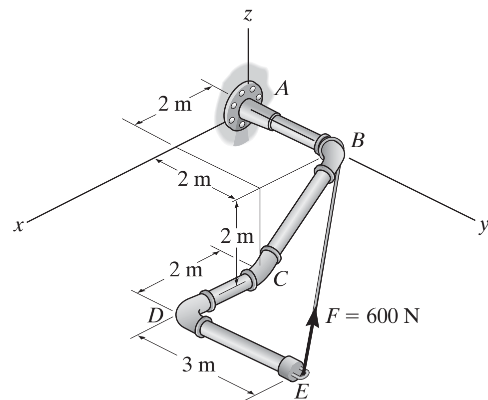

**Prob. 2-113**

**2-114.** Determine la longitud del lado $BC$ de la placa triangular. Resuelva el problema mediante la determinación de la magnitud de $\mathbf{r}_{BC}$; después verifique el resultado primero con la determinación de $\theta$, $r_{AB}$ y $r_{AC}$ y luego por la ley de los cosenos.




**Prob. 2-114**

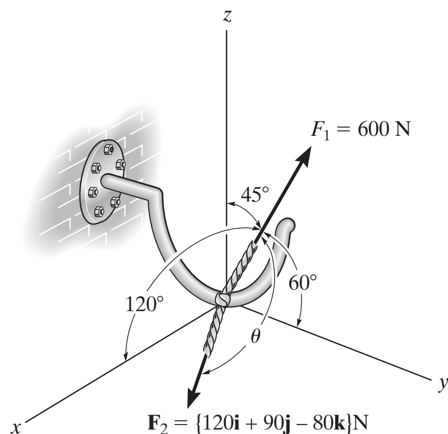
**2-115.** Para el ensamble de tubos que se muestra en la figura, determine las magnitudes de las componentes de la fuerza $F = 600$ N que actúan a lo largo del segmento $DE$ y en forma perpendicular a éste.




**Prob. 2-115**

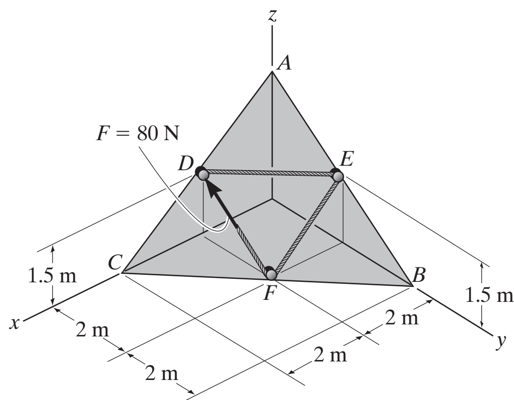
***2-116.** Determine el ángulo $\theta$ entre las dos fuerzas que actúan sobre el gancho. Asimismo, ¿cuáles son las proyecciones de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ a lo largo del eje $y$?

**•2-117.** Para las dos fuerzas que actúan sobre el gancho, determine la magnitud de la proyección de $\mathbf{F}_2$ a lo largo de $\mathbf{F}_1$.



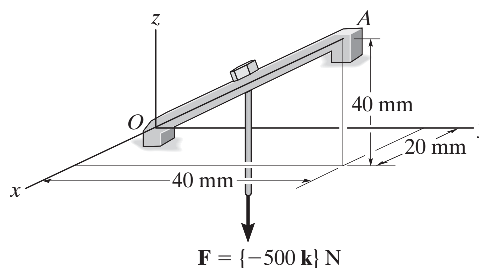

**Probs. 2-116/117**

**2-118.** Determine la proyección de la fuerza $F = 80$ N a lo largo de la línea $BC$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Prob. 2-118**

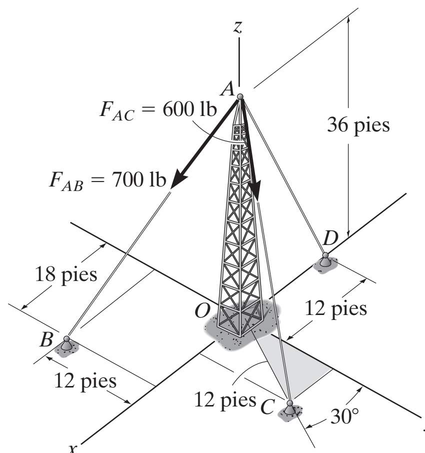
**2-119.** La abrazadera se usa sobre una plantilla. Si la fuerza vertical que actúa sobre el perno es $\mathbf{F} = \{-500\mathbf{k}\}$ N, determine las magnitudes de sus componentes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan a lo largo del eje $OA$ y en forma perpendicular a éste.




**Prob. 2-119**

***2-120.** Determine la magnitud de la componente proyectada de la fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ que actúa a lo largo del eje $z$.

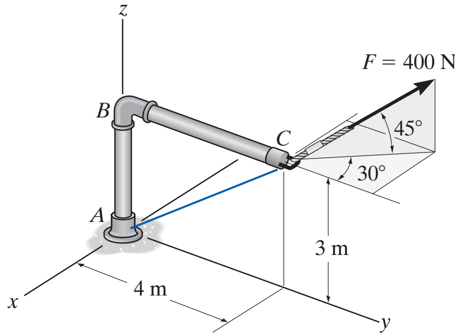
**•2-121.** Determine la magnitud de la componente proyectada de la fuerza $\mathbf{F}_{AC}$ que actúa a lo largo del eje $z$.




**Probs. 2-120/121**

**2-122.** Determine la proyección de la fuerza $F = 400$ N que actúa a lo largo de la línea $AC$ del ensamble de tubos. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**2-123.** Determine las magnitudes de las componentes de la fuerza $F = 400$ N que actúan en forma paralela y perpendicular al segmento $BC$ del ensamble de tubos.

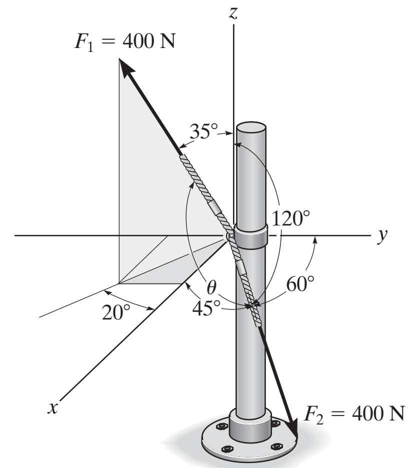



Probs. 2-122/123

**2-126.** Cada uno de los cables ejerce una fuerza de 400 N sobre el poste. Determine la magnitud de la componente de $\mathbf{F}_1$ proyectada a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}_2$.

**2-127.** Determine el ángulo $\theta$ entre los dos cables unidos al poste.

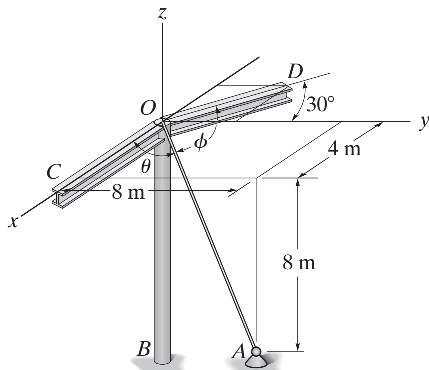





Probs. 2-126/127

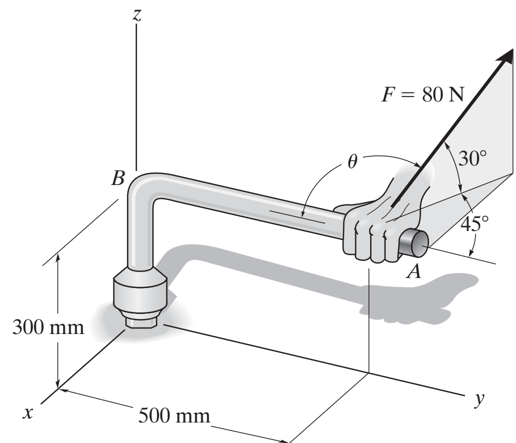
*__2-124.__ El cable $OA$ se usa para dar soporte a la columna $OB$. Determine el ángulo $\theta$ que forma el cable con la viga $OC$.

•**2-125.** El cable $OA$ se usa para dar soporte a la columna $OB$. Determine el ángulo $\phi$ que forma el cable con la viga $OD$.




Probs. 2-124/125

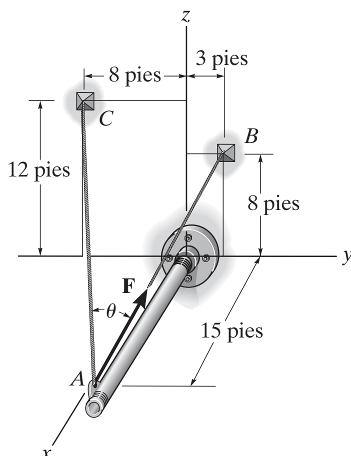
*__2-128.__ Una fuerza de $F = 80$ N se aplica al mango de una llave de torsión. Determine el ángulo $\theta$ entre la cola de la fuerza y el mango $AB$.




Prob. 2-128

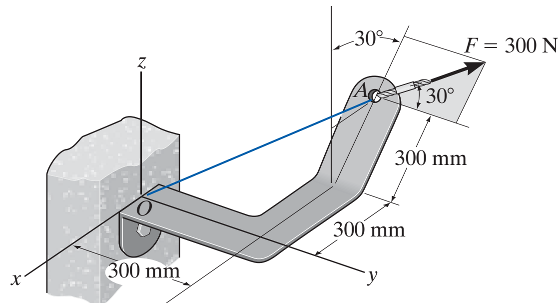
•**2-129.** Determine el ángulo $\theta$ entre los cables $AB$ y $AC$.

**2-130.** Si **F** tiene una magnitud de 55 lb, determine la magnitud de su componente proyectada que actúa a lo largo del eje $x$ y a lo largo del cable $AC$.



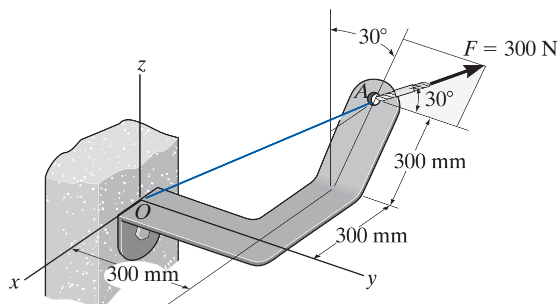

**Probs. 2-129/130**

**2-131.** Determine las magnitudes de las componentes proyectadas de la fuerza $F = 300$ N que actúan a lo largo de los ejes $x$ y $y$.




**Prob. 2-131**

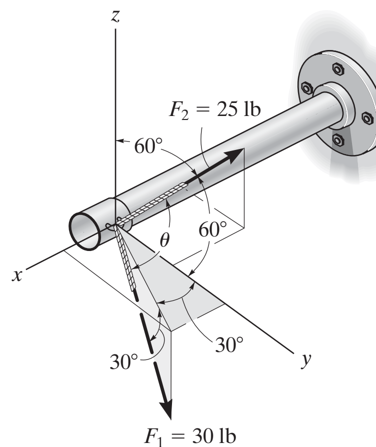
**2-132.** Determine la magnitud de la componente proyectada de la fuerza $F = 300$ N que actúa a lo largo de la línea $OA$.




**Prob. 2-132**

•**2-133.** Dos cables ejercen fuerzas sobre el tubo. Determine la magnitud de la componente de $\mathbf{F}_1$ proyectada a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}_2$.

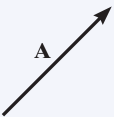
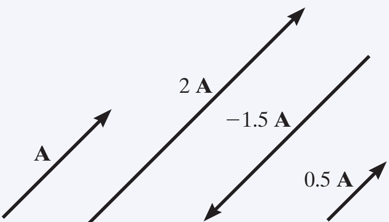
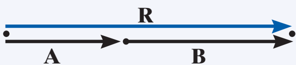
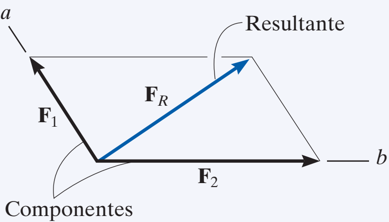
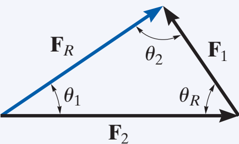
**2-134.** Determine el ángulo $\theta$ entre los dos cables unidos al tubo.




**Probs. 2-133/134**

# REPASO DEL CAPÍTULO

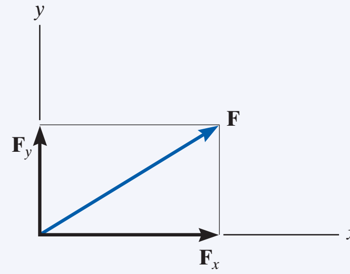


| | | |
|---|---|---|
| Un escalar es un número positivo o negativo; por ejemplo, masa y temperatura. <br><br> Un vector tiene magnitud y dirección, y la punta de la flecha indica el sentido del vector. | |   |
| La multiplicación o la división de un vector por, o entre, un escalar sólo cambiará la magnitud del vector. Si el escalar es negativo, el sentido del vector cambiará de manera que actúe en el sentido opuesto. | |   |
| Si los vectores son colineales, la resultante es simplemente la suma algebraica o escalar. | $R = A + B$ |   |
| **Ley del paralelogramo** <br> Dos fuerzas se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Las *componentes* forman los lados del paralelogramo y la *resultante* es la diagonal. <br><br> Para encontrar las componentes de una fuerza a lo largo de cualesquiera de los dos ejes, extienda líneas desde la cabeza de la fuerza, paralelas a los ejes, a fin de formar las componentes. <br><br> Para obtener las componentes de la resultante, muestre la forma en que se suman las fuerzas de punta a cola usando la regla del triángulo; después utilice la ley de los cosenos y la ley de los senos para calcular sus valores. | $F_R = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2\,F_1F_2 \cos\theta_R}$ <br><br> $\dfrac{F_1}{\text{sen}\ \theta_1} = \dfrac{F_2}{\text{sen}\ \theta_2} = \dfrac{F_R}{\text{sen}\ \theta_R}$ |   <br><br>   |

2

**Componentes rectangulares: dos dimensiones**

Los vectores $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son componentes rectangulares de **F**.



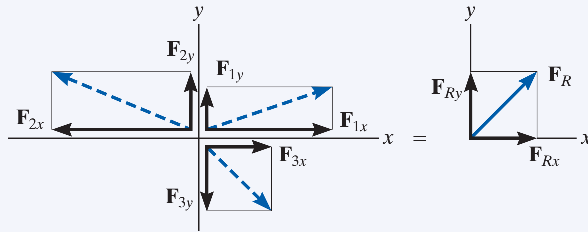

La fuerza resultante se determina a partir de la suma algebraica de sus componentes.

$$F_{Rx} = \Sigma F_x$$

$$F_{Ry} = \Sigma F_y$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2}$$

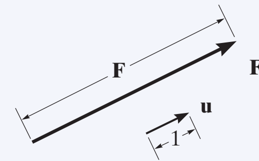
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$




**Vectores cartesianos**

El vector unitario **u** tiene una longitud de uno, sin unidades, y apunta en la dirección del vector **F**.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F}$$




Una fuerza puede descomponerse en sus componentes cartesianos a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$ de manera que $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$.

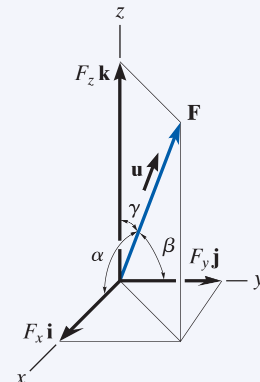
La magnitud de **F** se determina a partir de la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se determinan al formular un vector unitario en la dirección de **F**. Las componentes $x$, $y$, $z$ de **u** representan $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \frac{\mathbf{F_x}}{\mathbf{F}}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F}\mathbf{j} + \frac{F_z}{F}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$



Los ángulos directores coordenados están relacionados de manera que sólo dos de los tres ángulos son independientes entre sí.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

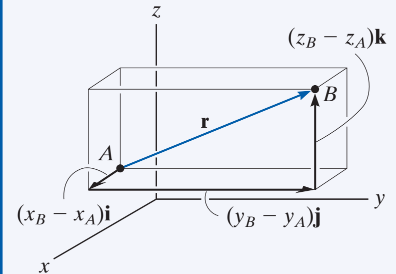
Para encontrar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, exprese cada fuerza como un vector cartesiano y sume las componentes **i**, **j**, **k** de todas las fuerzas en el sistema.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$$

**Vectores de posición y fuerza**

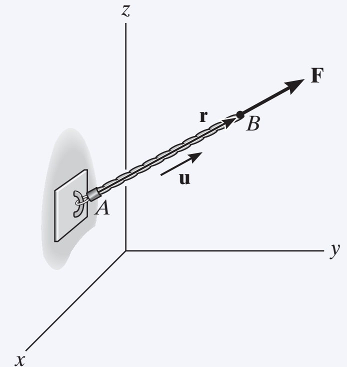
Un vector de posición ubica un punto en el espacio con relación a otro. La forma más fácil de formular las componentes de un vector de posición es determinar la distancia y dirección que debe recorrerse a lo largo de las direcciones $x$, $y$ y $z$ —desde la cola hasta la cabeza del vector.

$$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$




Si la línea de acción de una fuerza pasa a través de los puntos $A$ y $B$, entonces la fuerza actúa en la misma dirección que el vector de posición **r**, que se define mediante el vector unitario **u**. De esta manera, la fuerza puede expresarse como un vector cartesiano.

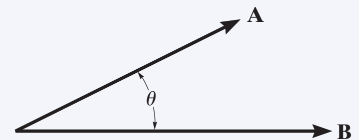
$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$




**Producto punto**

El producto punto entre dos vectores **A** y **B** genera un escalar. Si **A** y **B** se expresan en forma vectorial cartesiana, entonces el producto punto es la suma de los productos de sus componentes $x$, $y$ y $z$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

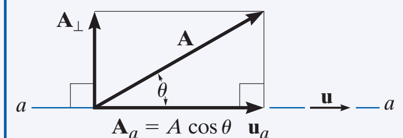



El producto punto puede usarse para determinar el ángulo entre **A** y **B**.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right)$$

El producto punto también se utiliza para determinar la componente proyectada de un vector **A** sobre un eje $aa$ que se define por medio de su vector unitario $\mathbf{u}_a$.

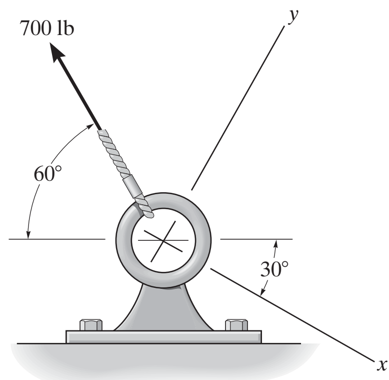
$$\mathbf{A}_a = A\cos\theta\,\mathbf{u}_a = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a$$



2

## PROBLEMAS DE REPASO

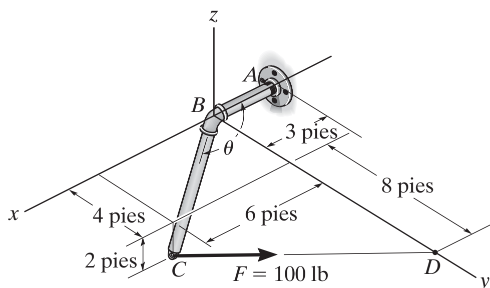
**2-135.** Determine las componentes *x* y *y* de la fuerza de 700 lb.




**Prob. 2-135**

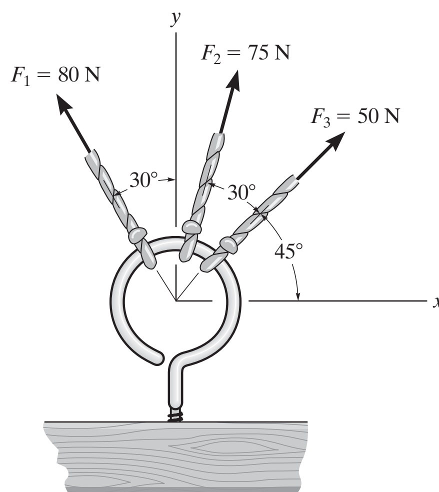
*__2-136.__ Determine la magnitud de la componente proyectada de la fuerza de 100 lb que actúa a lo largo del eje *BC* del tubo.

•**2-137.** Determine el ángulo $\theta$ entre los segmentos de tubo *BA* y *BC*.



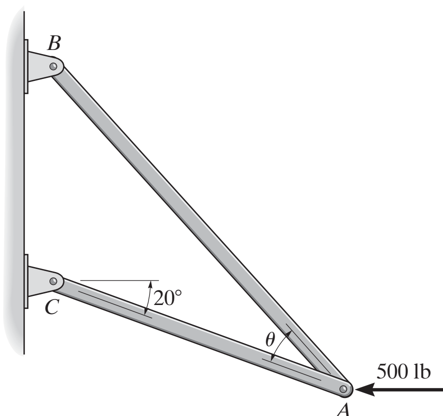

**Probs. 2-136/137**

**2-138.** Determine la magnitud y dirección de la resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ de las tres fuerzas, para lo cual encuentre primero la resultante $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3$ y después forme $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_2$. Especifique su dirección medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje *x* positivo.



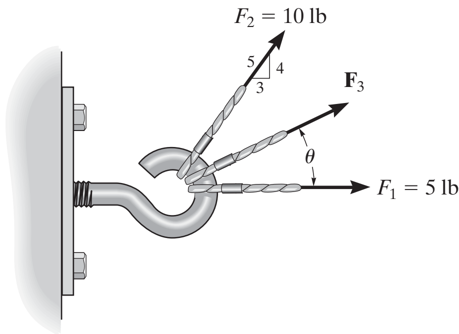

**Prob. 2-138**

**2-139.** Determine el ángulo de diseño $\theta$ ($\theta < 90°$) entre las dos barras de modo que la fuerza horizontal de 500 lb tenga una componente de 600 lb dirigida de *A* hacia *C*. ¿Cuál es la componente de la fuerza que actúa a lo largo del elemento *BA*?



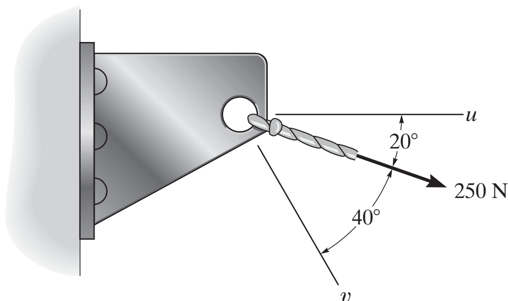

**Prob. 2-139**

*2-140. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{F}_3$ *mínima* tal que la fuerza resultante de las tres fuerzas tenga una magnitud de 20 lb.



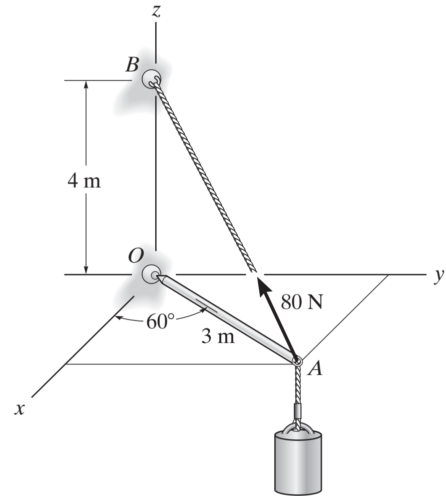

**Prob. 2-140**

•2-141. Descomponga la fuerza de 250 N en componentes que actúen a lo largo de los ejes $u$ y $v$; además, determine las magnitudes de estas componentes.



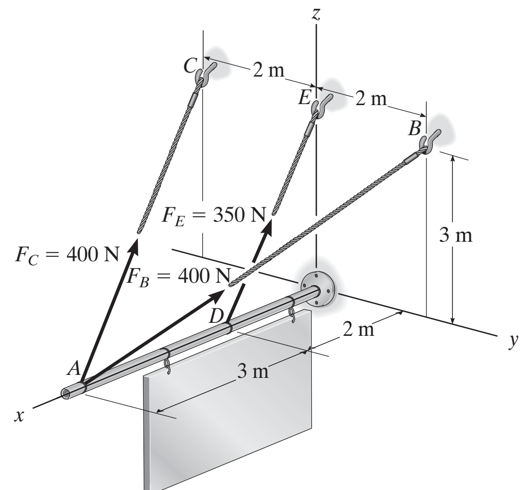

**Prob. 2-141**

2-142. El cable $AB$ ejerce una fuerza de 80 N sobre el extremo de la barra $OA$ de 3 m de largo. Determine la magnitud de la proyección de esta fuerza a lo largo de la barra.




**Prob. 2-142**

2-143. Los tres cables de soporte ejercen las fuerzas mostradas sobre el señalamiento. Represente cada fuerza como un vector cartesiano.




**Prob. 2-143**



Siempre que se usen cables para levantar cargas, deben seleccionarse de manera que no fallen cuando se les coloque en sus puntos de unión. En este capítulo mostraremos cómo calcular las cargas en los cables para tales casos.

# Equilibrio de una partícula

# 3

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre para una partícula.
- Mostrar cómo se resuelven los problemas de equilibrio de una partícula, mediante las ecuaciones de equilibrio.

## 3.1 Condiciones para el equilibrio de una partícula

Se dice que una partícula está en *equilibrio* si permanece en reposo y en un principio estaba en reposo, o si tiene una velocidad constante y originalmente estaba en movimiento. Sin embargo, más a menudo, el término “equilibrio” o, de manera más específica, “equilibrio estático” se usa para describir un objeto en reposo. Para mantener el equilibrio, es *necesario* satisfacer la primera ley del movimiento de Newton, la cual requiere que la *fuerza resultante* que actúa sobre una partícula sea igual a *cero*. Esta condición puede ser establecida matemáticamente como

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3-1}$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es el vector *suma de todas las fuerzas* que actúan sobre la partícula.

La ecuación 3-1 no sólo es una condición necesaria para el equilibrio, también es una condición *suficiente*. Esto es una consecuencia de la segunda ley del movimiento de Newton, la cual puede escribirse como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Como el sistema de fuerzas satisface la ecuación 3-1, entonces $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y por lo tanto la aceleración de la partícula $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. En consecuencia, la partícula se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

## 3.2 Diagrama de cuerpo libre

Para aplicar la ecuación de equilibrio debemos tomar en cuenta *todas* las fuerzas conocidas y desconocidas ($\Sigma \mathbf{F}$) que actúan *sobre* la partícula. La mejor manera de hacer esto es pensar en la partícula como aislada y "libre" de su entorno. Un dibujo que muestra la partícula junto con *todas* las fuerzas que actúan sobre ella se denomina *diagrama de cuerpo libre (DCL)*.

Antes de presentar un procedimiento formal de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, primero consideraremos dos tipos de conexiones que se encuentran con frecuencia en problemas de equilibrio de partículas.

3

**Resortes.** Si un *resorte elástico lineal* (o cuerda) de longitud no deformada $l_o$ se usa como soporte de una partícula, su longitud cambiará en proporción directa a la fuerza **F** que actúe sobre él, figura 3-1. Una característica que define la "elasticidad" de un resorte es la *constante de resorte* o *rigidez*, $k$.

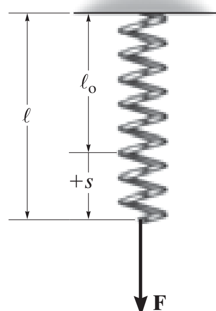


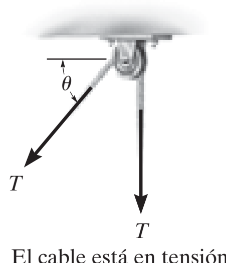

**Fig. 3-1**

La magnitud de la fuerza ejercida en un resorte elástico lineal que tiene una rigidez $k$ y está deformado (alargado o acortado) una distancia $s = l - l_o$, medida desde su posición *sin carga*, es

$$F = ks \tag{3-2}$$

Si $s$ es positiva, lo que causa un alargamiento, entonces **F** debe jalar el resorte; mientras que si $s$ es negativa, lo que causa un acortamiento, entonces **F** debe empujar el resorte. Por ejemplo, si el resorte de la figura 3-1 tiene una longitud no deformada de 0.8 m y una rigidez $k = 500$ N/m y se estira hasta una longitud de 1 m, de manera que $s = l - l_o = 1\text{ m} - 0.8\text{ m} = 0.2$ m, entonces se requiere una fuerza $F = ks = 500\text{ N/m}(0.2\text{ m}) = 100$ N.

**Cables y poleas.** A menos que se establezca lo contrario, en todo este libro, excepto en la sección 7.4, supondremos que todos los cables (o cuerdas) tienen un peso insignificante y que no se pueden deformar. Además, un cable puede soportar *sólo* una tensión o fuerza de "jalón" que actúa en la dirección del cable. En el capítulo 5 se mostrará que la fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción, debe tener una magnitud *constante* para mantener al cable en equilibrio. Por consiguiente, para cualquier ángulo $\theta$, como el que se muestra en la figura 3-2, el cable se somete a una tensión $T$ en toda su longitud.




El cable está en tensión

**Fig. 3-2**

## Procedimiento para trazar un diagrama de cuerpo libre

Para aplicar las ecuaciones de equilibrio, debemos tomar en cuenta *todas las fuerzas que actúan sobre una partícula*, por tal motivo no se debe exagerar en enfatizar la importancia de trazar primero un diagrama de cuerpo libre. Para construir un diagrama de cuerpo libre, se requiere llevar a cabo los tres pasos siguientes.

### Trace un perfil delineado.

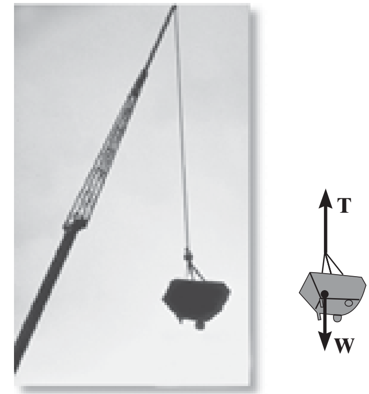
Imagine que la partícula está *aislada* o "liberada" de su entorno al trazar su perfil delineado.

### Muestre todas las fuerzas.

Indique sobre este bosquejo *todas* las fuerzas que *actúan sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas,* que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento. Para tomar en cuenta todas esas fuerzas, puede resultar útil trazar los límites de la partícula, y señalar con cuidado cada fuerza que actúa sobre ella.

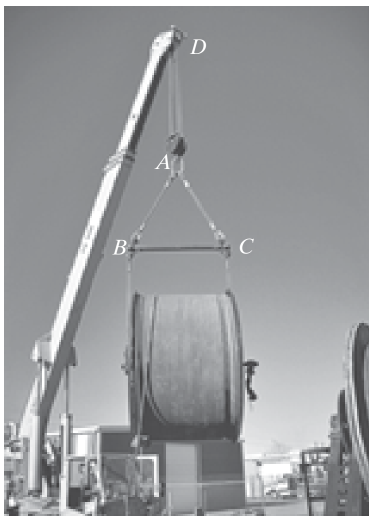
### Identifique cada una de las fuerzas.

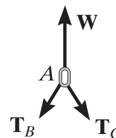
Las fuerzas que son *conocidas* deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.




La cubeta se mantiene en equilibrio mediante el cable, e instintivamente sabemos que la fuerza en el cable debe ser igual al peso de la cubeta. Al trazar un diagrama de cuerpo libre de la cubeta podemos entender por qué esto es así. Este diagrama muestra que sólo hay dos fuerzas que *actúan sobre la cubeta*, a saber, su peso **W** y la fuerza **T** del cable. Para obtener el equilibrio, la resultante de estas fuerzas debe ser igual a cero y por consiguiente $T = W$.

3

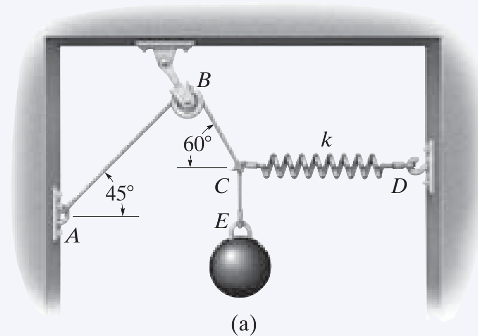



El carrete tiene un peso $W$ y está suspendido del pescante de la grúa. Si queremos obtener las fuerzas en los cables $AB$ y $AC$, podemos considerar el diagrama de cuerpo libre del anillo en $A$. Aquí, los cables $AD$ ejercen una fuerza resultante **W** sobre el anillo y la condición de equilibrio se usa para obtener $\mathbf{T}_B$ y $\mathbf{T}_C$.

## EJEMPLO 3.1

La esfera que aparece en la figura 3-3*a* tiene una masa de 6 kg y está soportada como se muestra. Trace un diagrama de cuerpo libre de la esfera, de la cuerda *CE*, y del nudo en *C*.




(a)

$\mathbf{F}_{CE}$ (Fuerza de la cuerda *CE* que actúa sobre la esfera)



58.9 N (Peso o gravedad que actúa sobre la esfera)

(b)

$\mathbf{F}_{EC}$ (Fuerza del nudo que actúa sobre la cuerda *CE*)



$\mathbf{F}_{CE}$ (Fuerza de la esfera que actúa sobre la cuerda *CE*)

(c)

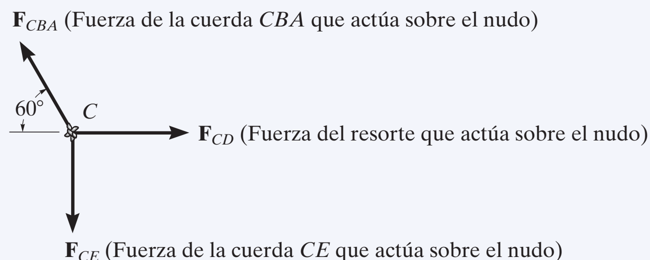
### SOLUCIÓN

**Esfera.** Por inspección, hay sólo dos fuerzas que actúan sobre la esfera, las cuales son, su peso: 6 kg $(9.81 \text{ m/s}^2) = 58.9$ N, y la fuerza en la cuerda *CE*. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-3*b*.

**Cuerda *CE*.** Cuando la cuerda *CE* se aísla de su entorno, su diagrama de cuerpo libre muestra sólo dos fuerzas que actúan sobre ella, a saber, la fuerza de la esfera y la fuerza del nudo, figura 3-3*c*. Observe que la $\mathbf{F}_{CE}$ mostrada aquí es igual pero opuesta a la mostrada en la figura 3-3*b*, una consecuencia de la tercera ley de Newton de acción y reacción. Además, $\mathbf{F}_{CE}$ y $\mathbf{F}_{EC}$ jalan la cuerda y la mantienen en tensión de manera que no colapse. Para lograr el equilibrio, $F_{CE} = F_{EC}$.

**Nudo.** El nudo en *C* está sometido a tres fuerzas, figura 3-3*d*. Éstas son causadas por las cuerdas *CBA* y *CE* y el resorte *CD*. Como se requiere, el diagrama de cuerpo libre muestra todas esas fuerzas marcadas con sus magnitudes y direcciones. Es importante darse cuenta que el peso de la esfera no actúa directamente sobre el nudo, sino que la cuerda *CE* somete el nudo a esta fuerza.

$\mathbf{F}_{CBA}$ (Fuerza de la cuerda *CBA* que actúa sobre el nudo)




$\mathbf{F}_{CD}$ (Fuerza del resorte que actúa sobre el nudo)

$\mathbf{F}_{CE}$ (Fuerza de la cuerda *CE* que actúa sobre el nudo)

(d)

**Fig. 3-3**

# 3.3 Sistemas de fuerzas coplanares

Si una partícula está sometida a un sistema de fuerzas coplanares que se encuentran en el plano *x-y* como en la figura 3-4, entonces cada fuerza puede descomponerse en sus componentes **i** y **j**. Para lograr el equilibrio, estas fuerzas deben sumarse para producir una fuerza resultante cero, es decir,

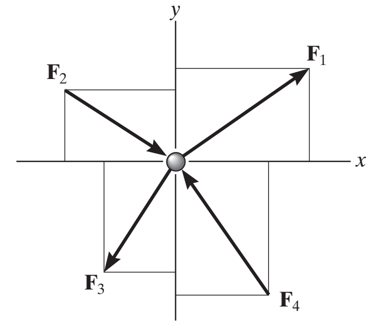



Fig. 3-4

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Para que se satisfaga esta ecuación vectorial, ambas componentes *x* y *y* deben ser iguales a cero. Por lo tanto,

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse cuando mucho para dos incógnitas, representadas generalmente como ángulos y magnitudes de fuerzas mostradas sobre el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

Cuando se aplica cada una de las dos ecuaciones de equilibrio, debemos tomar en cuenta el sentido de cada componente con un *signo algebraico* que corresponde a la dirección de la cabeza de flecha de la componente a lo largo de los ejes *x* o *y*. Es importante observar que si una fuerza tiene una *magnitud desconocida*, entonces el sentido de la cabeza de la flecha de la fuerza en el diagrama de cuerpo libre puede *suponerse*. De esta forma, si la *solución* genera un *escalar negativo*, el sentido de la fuerza es opuesto al sentido que se supuso.

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la partícula sometida a las dos fuerzas que se muestran en la figura 3-5. Aquí se *supone* que la fuerza *desconocida* **F** actúa hacia la derecha para mantener el equilibrio. Al aplicar la ecuación de equilibrio a lo largo del eje *x*, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad +F + 10\text{ N} = 0$$

Ambos términos son "positivos" puesto que las dos fuerzas actúan en la dirección *x* positiva. Cuando se resuelve esta ecuación, $F = -10$ N. Aquí, el *signo negativo* indica que **F** debe actuar hacia la izquierda para sostener la partícula en equilibrio, figura 3-5. Observe que si el eje $+x$ de la figura 3-5 estuviese dirigido hacia la izquierda, en la ecuación anterior ambos términos serían negativos pero, de nuevo, después de resolver $F = -10$ N, lo que indica que **F** estaría dirigida hacia la izquierda.

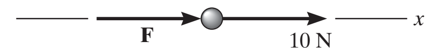



Fig. 3-5

## Procedimiento para el análisis

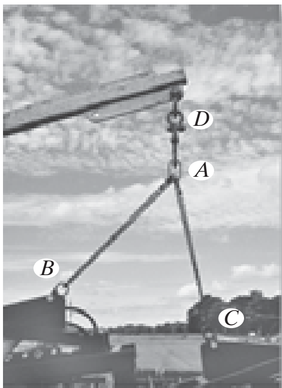
Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para una partícula pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

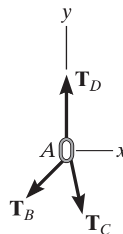
### Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes $x$, $y$ en cualquier orientación adecuada.
- Marque en el diagrama todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas.
- Puede suponer el sentido de una fuerza con una magnitud desconocida.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Aplique las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$.
- Las componentes son positivas si están dirigidas a lo largo de un eje positivo, y negativas si están dirigidas a lo largo de un eje negativo.
- Si hay más de dos incógnitas y el problema implica un resorte, aplique $F = ks$ para relacionar la fuerza del resorte con la deformación $s$ del mismo.
- Como la magnitud de una fuerza siempre es una cantidad positiva, si la solución produce un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado sobre el diagrama de cuerpo libre.

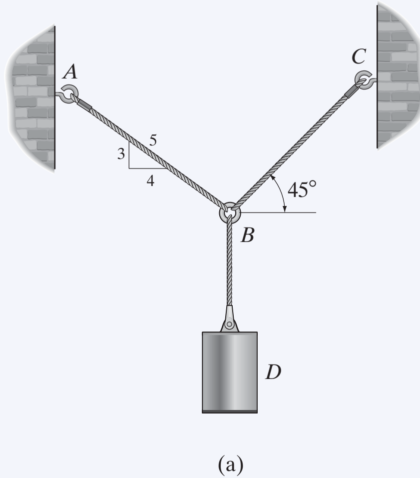


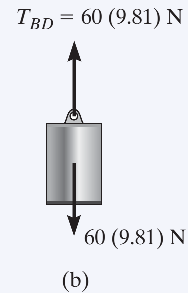

Estas cadenas ejercen tres fuerzas sobre el anillo localizado en $A$, como se muestra en su diagrama de cuerpo libre. El anillo no se moverá, o se moverá con velocidad constante, siempre que la suma de esas fuerzas a lo largo de los ejes $x$ y $y$ en el diagrama de cuerpo libre sea igual a cero. Si se conoce una de las tres fuerzas, las magnitudes de las otras dos pueden obtenerse a partir de las dos ecuaciones de equilibrio.

## EJEMPLO 3.2

Determine la tensión necesaria en los cables $BA$ y $BC$ para sostener el cilindro de 60 kg que se muestra la figura 3-6a.




(a)




(b)

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Debido al equilibrio, el peso del cilindro ocasiona que la tensión en el cable $BD$ sea $T_{BD} = 60(9.81)$ N, figura 3-6*b*. Las fuerzas en los cables $BA$ y $BC$ pueden determinarse al investigar el equilibrio del anillo $B$. Su diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-6*c*. Las magnitudes de $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_C$ se desconocen, pero sus direcciones son conocidas.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al aplicar las ecuaciones de equilibrio a lo largo de los ejes $x$ y $y$, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad T_C \cos 45° - \left(\tfrac{4}{5}\right)T_A = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_C \operatorname{sen} 45° + \left(\tfrac{3}{5}\right)T_A - 60(9.81) \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (1) puede escribirse como $T_A = 0.8839T_C$. Al sustituir esto en la ecuación (2) resulta

$$T_C \operatorname{sen} 45° + \left(\tfrac{3}{5}\right)(0.8839T_C) - 60(9.81) \text{ N} = 0$$

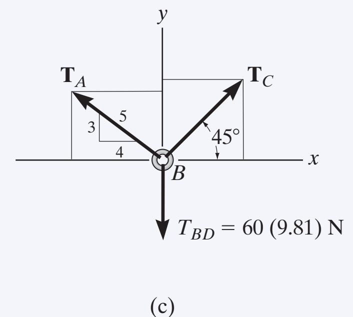
De forma que

$$T_C = 475.66 \text{ N} = 476 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (1) o la ecuación (2), obtenemos

$$T_A = 420 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** por supuesto, la exactitud de esos resultados depende de la exactitud de los datos, es decir, de las medidas geométricas y de las cargas. Para la mayor parte de los trabajos de ingeniería que implican un problema como éste, los datos medidos con tres cifras significativas serían suficientes.



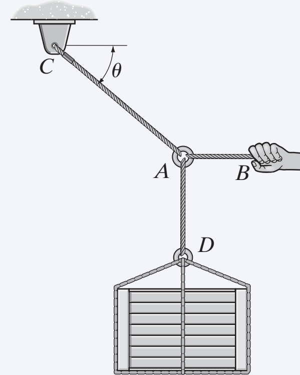

(c)

**Fig. 3-6**

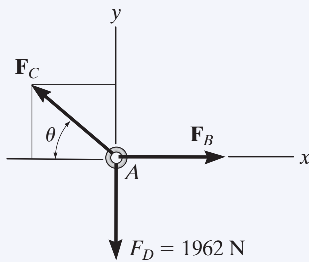
3

## EJEMPLO 3.3

La caja de 200 kg que se muestra en la figura 3-7*a* está suspendida por las cuerdas *AB* y *AC*. Cada cuerda puede soportar una fuerza máxima de 10 kN antes de que se rompa. Si *AB* siempre permanece horizontal, determine el ángulo mínimo $\theta$ al que se puede suspender la caja antes de que una de las cuerdas se rompa.




(a)




(b)

**Fig. 3-7**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Estudiaremos el equilibrio del anillo *A*. Hay tres fuerzas que actúan sobre él, figura 3-7*b*. La magnitud de $\mathbf{F}_D$ es igual al peso de la caja, es decir, $F_D = 200\,(9.81)\text{ N} = 1962\text{ N} < 10\text{ kN}$.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al aplicar las ecuaciones de equilibrio a lo largo de los ejes *x* y *y*,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -F_C \cos\theta + F_B = 0; \quad F_C = \frac{F_B}{\cos\theta} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_C \operatorname{sen}\theta - 1962\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

A partir de la ecuación (1), $F_C$ siempre es mayor que $F_B$ puesto que $\cos\theta \leq 1$. Por lo tanto, la cuerda *AC* alcanzará la fuerza de tensión máxima de 10 kN *antes* que la cuerda *AB*. Al sustituir $F_C = 10$ kN en la ecuación (2), obtenemos

$$[10(10^3)\text{ N}] \operatorname{sen}\theta - 1962\text{ N} = 0$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.1962) = 11.31° = 11.3°$$

***Resp.***

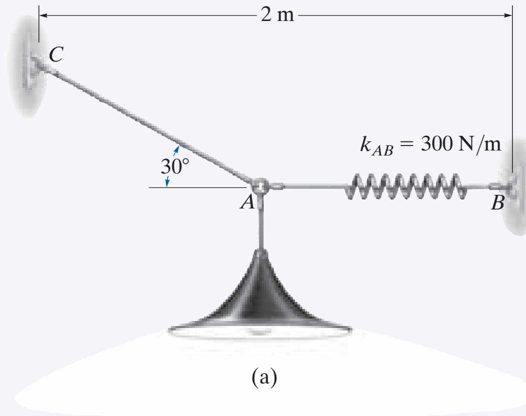
La fuerza desarrollada en la cuerda *AB* puede obtenerse al sustituir los valores de $\theta$ y $F_C$ en la ecuación (1).

$$10(10^3)\text{ N} = \frac{F_B}{\cos 11.31°}$$

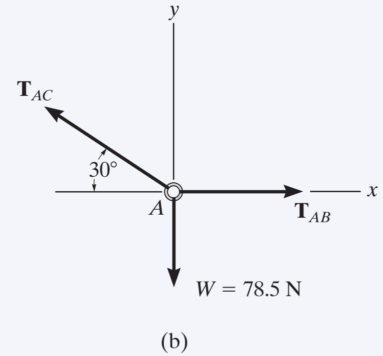
$$F_B = 9.81\text{ kN}$$

## EJEMPLO 3.4

Determine la longitud requerida para el cable de corriente alterna de la figura 3-8*a*, de manera que la lámpara de 8 kg esté suspendida en la posición que se muestra. La longitud *no deformada* del resorte $AB$ es $l'_{AB} = 0.4$ m, y el resorte tiene una rigidez de $k_{AB} = 300$ N/m.




(a)




(b)

**Fig. 3-8**

### SOLUCIÓN

Si se conoce la fuerza presente en el resorte $AB$, el alargamiento del resorte se puede encontrar mediante $F = ks$. A partir de la geometría del problema, es posible calcular la longitud requerida de $AC$.

**Diagrama de cuerpo libre.** La lámpara tiene un peso $W = 8(9.81) = 78.5$ N y entonces el diagrama de cuerpo libre del anillo en $A$ se muestra en la figura 3-8*b*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Si utilizamos los ejes $x$, $y$,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{AB} - T_{AC}\cos 30^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{AC}\,\text{sen}\,30^\circ - 78.5\text{ N} = 0$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos

$$T_{AC} = 157.0\text{ N}$$

$$T_{AB} = 135.9\text{ N}$$

Entonces, el estiramiento del resorte $AB$ es

$$T_{AB} = k_{AB}s_{AB}; \qquad 135.9\text{ N} = 300\text{ N/m}(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.453\text{ m}$$

y la longitud alargada es, por tanto

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB}$$

$$l_{AB} = 0.4\text{ m} + 0.453\text{ m} = 0.853\text{ m}$$

La distancia horizontal de $C$ a $B$, figura 3-8*a*, requiere que

$$2\text{ m} = l_{AC}\cos 30^\circ + 0.853\text{ m}$$

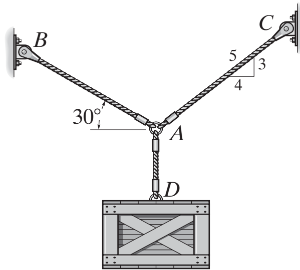
$$l_{AC} = 1.32\text{ m}$$ ***Resp.***

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES



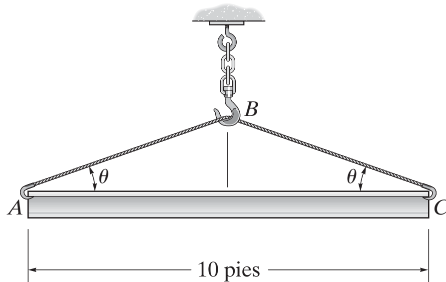
*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

**F3-1.** La caja tiene un peso de 550 lb. Determine la fuerza en cada cable de soporte.



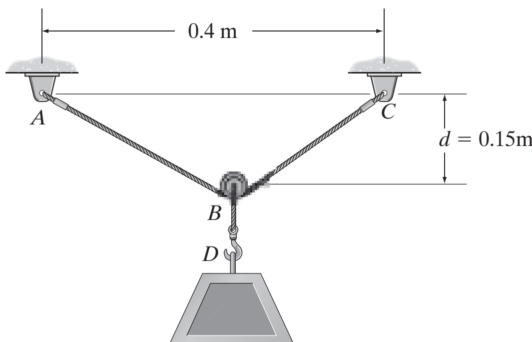

**F3-1**

**F3-2.** La viga tiene un peso de 700 lb. Determine el cable $ABC$ más corto que puede usarse para levantarla, si la fuerza máxima que puede soportar el cable es de 1500 lb.



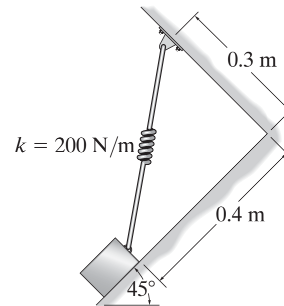

**F3-2**

**F3-3.** Si el bloque de 5 kg se suspende de la polea $B$ y la flecha de la cuerda es $d = 0.15$ m, determine la fuerza en la cuerda $ABC$. No tome en cuenta el tamaño de la polea.



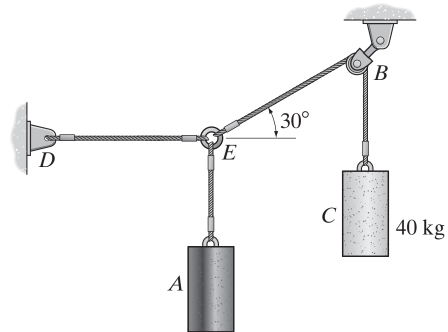

**F3-3**

**F3-4.** El bloque tiene una masa de 5 kg y descansa sobre un plano inclinado liso. Determine la longitud sin estirar del resorte.



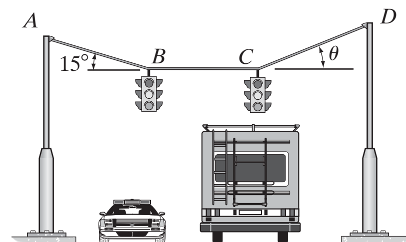

**F3-4**

**F3-5.** Si la masa del cilindro $C$ es de 40 kg, determine la masa del cilindro $A$ a fin de sostener el ensamble en la posición mostrada.




**F3-5**

**F3-6.** Determine la tensión necesaria en los cables $AB$, $BC$ y $CD$ para sostener los semáforos de 10 kg y 15 kg en $B$ y $C$, respectivamente. Además, determine el ángulo $\theta$.



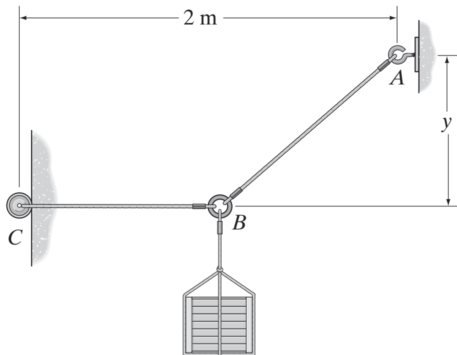

**F3-6**

## PROBLEMAS

*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

•**3-1.** Determine la fuerza en cada cuerda para mantener el equilibrio de la caja de 200 kg. La cuerda $BC$ permanece horizontal debido al rodillo en $C$, y $AB$ tiene una longitud de 1.5 m. Considere $y = 0.75$ m.

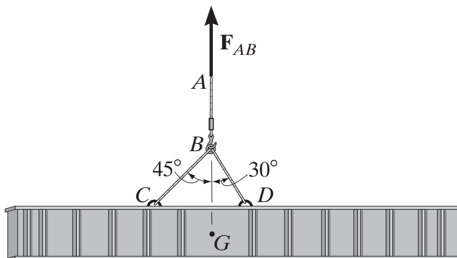
**3-2.** Si la cuerda $AB$ de 1.5 m de largo puede soportar una fuerza máxima de 3500 N, determine la fuerza en la cuerda $BC$ y la distancia $y$ de modo que se pueda sostener la caja de 200 kg.




**Probs. 3-1/2**

**3-3.** Si la masa de la viga es de 3 Mg y su centro de masa se ubica en el punto $G$, determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $BC$ y $BD$ para lograr el equilibrio.

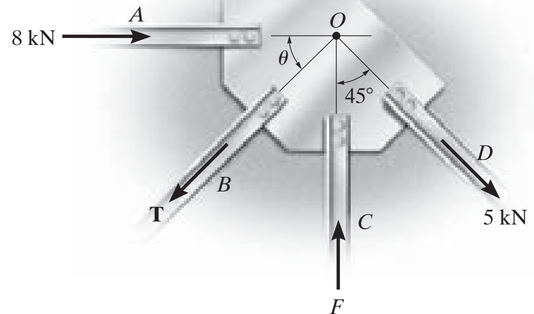
***3-4.** Si los cables $BD$ y $BC$ pueden soportar una fuerza de tensión máxima de 20 kN, determine la viga con la masa máxima que puede colgarse del cable $AB$ de forma que ninguno de los cables falle. El centro de masa de la viga se localiza en el punto $G$.




**Probs. 3-3/4**

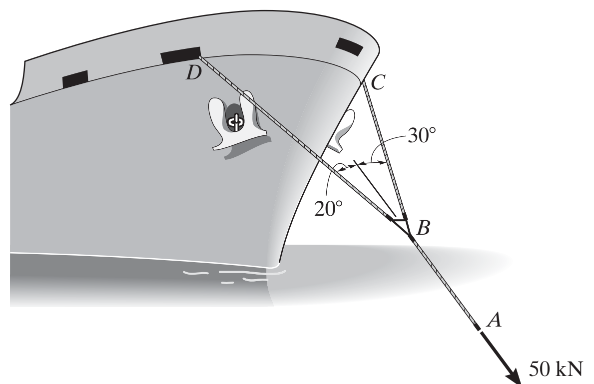
•**3-5.** Los elementos de una armadura están conectados a la placa de refuerzo. Si las fuerzas son concurrentes en el punto $O$, determine las magnitudes **F** y **T** para lograr el equilibrio. Considere $\theta = 30°$.

**3-6.** La placa de refuerzo está sometida a las fuerzas de cuatro elementos. Determine la fuerza en el elemento $B$ y su orientación $\theta$ adecuada para lograr el equilibrio. Las fuerzas son concurrentes en el punto $O$. Considere $F = 12$ kN.




**Probs. 3-5/6**

**3-7.** El suspensor de remolque $AB$ está sometido a la fuerza de 50 kN ejercida por un remolcador. Determine la fuerza en cada una de las retenidas $BC$ y $BD$, si el barco se mueve hacia delante con velocidad constante.

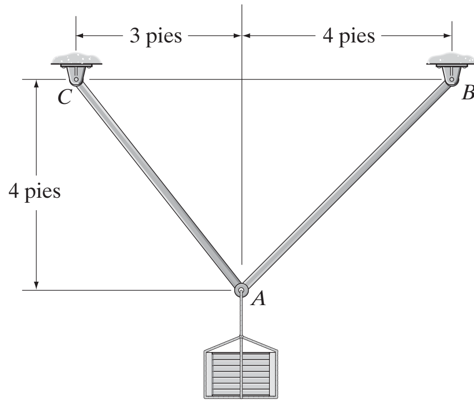



**Prob. 3-7**

3

*3-8. Los elementos $AC$ y $AB$ sostienen la caja de 300 lb. Determine la fuerza de tensión desarrollada en cada elemento.

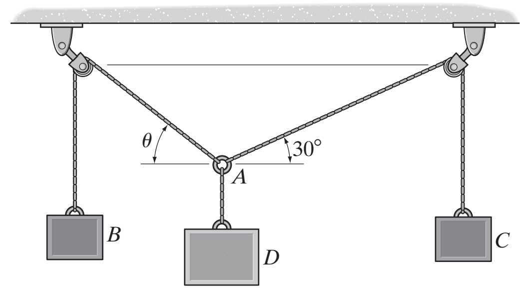
•3-9. Si los elementos $AC$ y $AB$ pueden soportar una tensión máxima de 300 lb y 250 lb, respectivamente, determine el peso máximo de la caja que pueden sostener con seguridad.




Probs. 3-8/9

*3-12. Si el bloque $B$ pesa 200 lb y el bloque $C$ pesa 100 lb, determine el peso requerido del bloque $D$ y el ángulo $\theta$ para lograr el equilibrio.

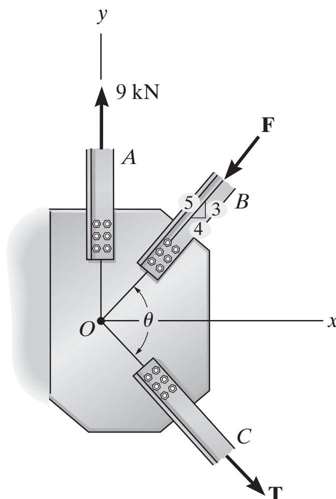
•3-13. Si el bloque $D$ pesa 300 lb y el bloque $B$ pesa 275 lb, determine el peso requerido del bloque $C$ y el ángulo $\theta$ para lograr el equilibrio.




Probs. 3-12/13

3-10. Los elementos de una armadura están conectados a la placa de refuerzo. Si las fuerzas son concurrentes en el punto $O$, determine las magnitudes **F** y **T** para lograr el equilibrio. Considere $\theta = 90°$.

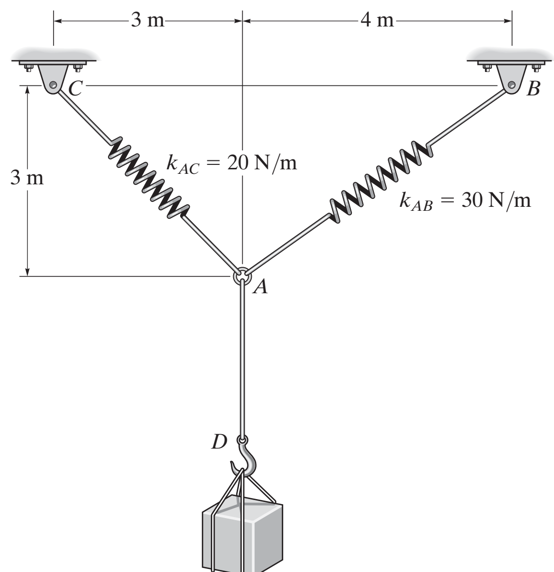
3-11. La placa de refuerzo está sometida a las fuerzas de tres elementos. Determine la fuerza de tensión en el elemento $C$ y su ángulo $\theta$ adecuado para el equilibrio. Las fuerzas son concurrentes en el punto $O$. Considere $F = 8$ kN.




Probs. 3-10/11

3-14. Determine el alargamiento en los resortes $AC$ y $AB$ cuando el bloque de 2 kg está en equilibrio. Los resortes se muestran en la posición de equilibrio.

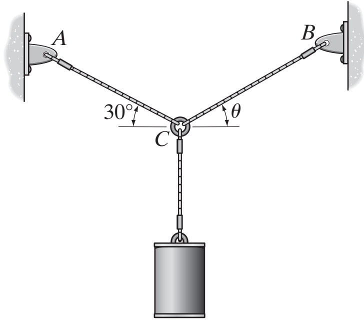
3-15. La longitud no alargada del resorte $AB$ es de 3 m. Si el bloque se mantiene en la posición de equilibrio mostrada, determine la masa del bloque en $D$.




Probs. 3-14/15

*3-16. Determine la tensión desarrollada en los cables *CA* y *CB* que se requiere para lograr el equilibrio del cilindro de 10 kg. Considere $\theta = 40°$.

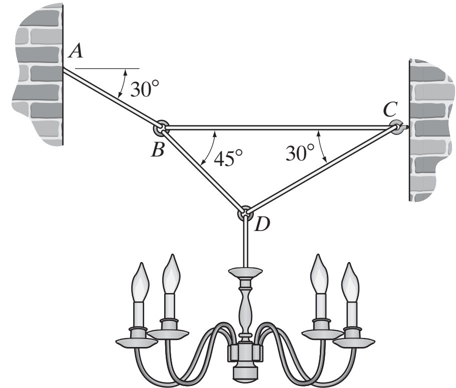
•3-17. Si el cable *CB* está sometido a una tensión que es dos veces mayor que la del cable *CA*, determine el ángulo $\theta$ necesario para lograr el equilibrio del cilindro de 10 kg. Además, ¿cuáles son las tensiones en los cables *CA* y *CB*?




**Probs. 3-16/17**

*3-20. Determine la tensión desarrollada en cada cable usado para sostener el candelabro de 50 kg.

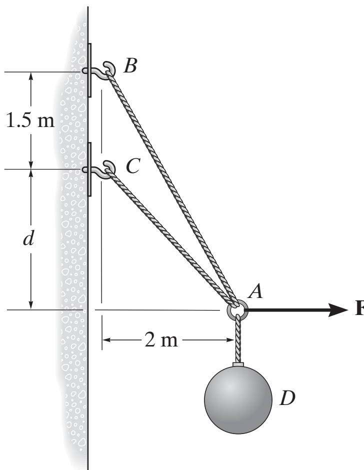
•3-21. Si la tensión desarrollada en cada uno de los cuatro cables no debe exceder 600 N, determine la masa máxima del candelabro que se puede sostener.




**Probs. 3-20/21**

3-18. Determine las fuerzas necesarias en los cables *AC* y *AB* para mantener en equilibrio la bola *D* de 20 kg. Considere $F = 300$ N y $d = 1$ m.

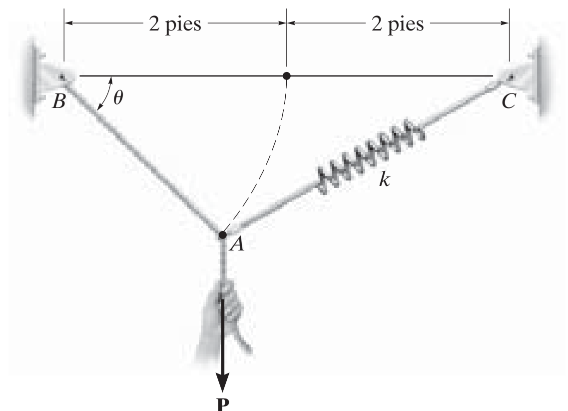
3-19. La bola *D* tiene masa de 20 kg. Si se aplica una fuerza $F = 100$ N de manera horizontal en el anillo localizado en *A*, determine la dimensión *d* necesaria para que la fuerza en el cable *AC* sea igual a cero.




**Probs. 3-18/19**

■3-22. Una fuerza vertical $P = 10$ lb se aplica a los extremos de la cuerda *AB* de 2 pies y del resorte *AC*. Si el resorte tiene una longitud no alargada de 2 pies, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. Considere $k = 15$ lb/pie.

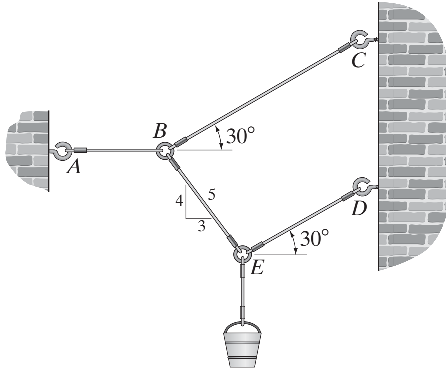
3-23. Determine la longitud no alargada del resorte *AC* si una fuerza $P = 80$ lb genera el ángulo $\theta = 60°$ para la posición de equilibrio. La cuerda *AB* tiene 2 pies de longitud. Considere $k = 50$ lb/pie.




**Probs. 3-22/23**

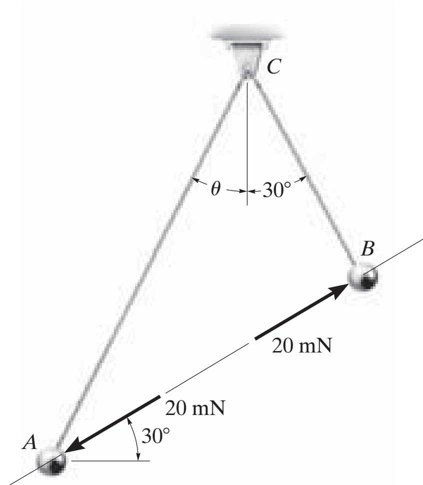
*__3-24.__ Si la cubeta pesa 50 lb, determine la tensión desarrollada en cada uno de los cables.

•**3-25.** Determine el peso máximo de la cubeta que puede sostener el sistema de cables, de forma que ninguno de los cables desarrolle una tensión superior a 100 lb.




**Probs. 3-24/25**

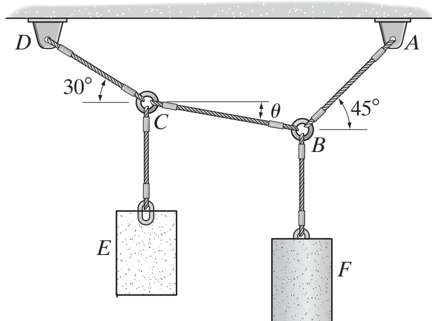
*__3-28.__ Dos esferas $A$ y $B$ tienen igual masa y están cargadas electrostáticamente de manera que la fuerza repulsiva que actúa entre ellas tiene una magnitud de 20 mN y está dirigida a lo largo de la línea $AB$. Determine el ángulo $\theta$, la tensión en las cuerdas $AC$ y $BC$ y la masa $m$ de cada esfera.




**Prob. 3-28**

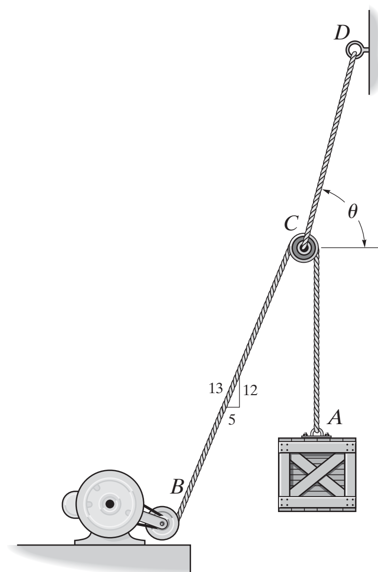
**3-26.** Determine las tensiones desarrolladas en los cables $CD$, $CB$ y $BA$ y el ángulo $\theta$ requerido para lograr el equilibrio del cilindro $E$ de 30 lb y el cilindro $F$ de 60 lb.

**3-27.** Si el cilindro $E$ pesa 30 lb y $\theta = 15°$, determine el peso del cilindro $F$.




**Probs. 3-26/27**

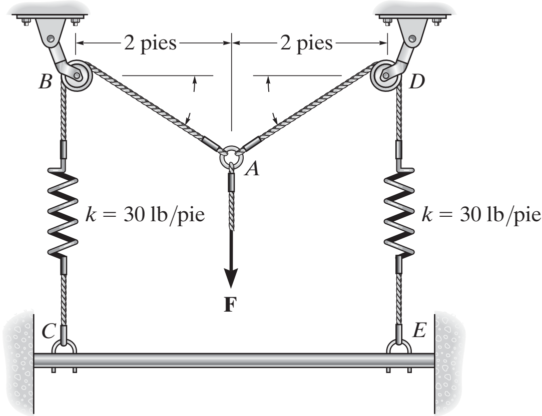
•**3-29.** Cada una de las cuerdas $BCA$ y $CD$ puede soportar una carga máxima de 100 lb. Determine el peso máximo de la caja que puede ser levantado a velocidad constante, y el ángulo $\theta$ necesario para mantener el equilibrio. No tome en cuenta el tamaño de la pequeña polea en $C$.




**Prob. 3-29**

•**3-30.** Los resortes en el ensamble de cuerdas están originalmente sin estirar cuando $\theta = 0°$. Determine la tensión en cada cuerda cuando $F = 90$ lb. No tome en cuenta el tamaño de las poleas localizadas en $B$ y $D$.

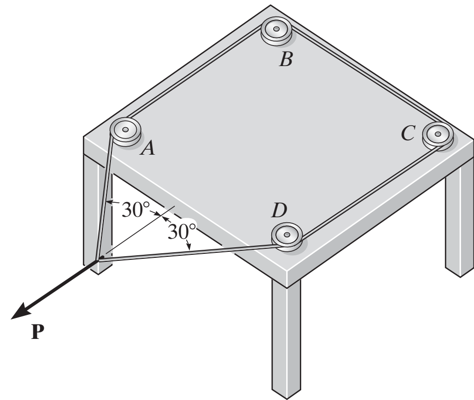
**3-31.** Los resortes en el ensamble de cuerdas están originalmente estirados 1 pie cuando $\theta = 0°$. Determine la fuerza vertical **F** que debe aplicarse para que $\theta = 30°$.




**Probs. 3-30/31**

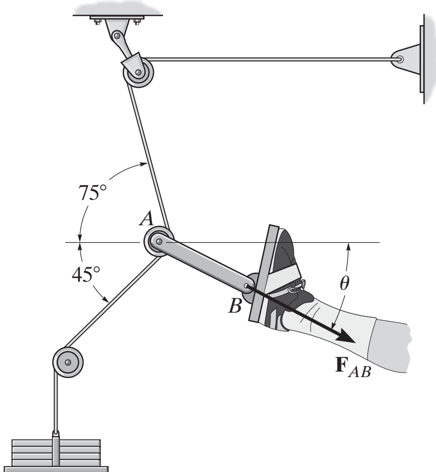
•**3-33.** El alambre forma un lazo y pasa sobre las pequeñas poleas en $A$, $B$, $C$ y $D$. Si su extremo está sujeto a una fuerza $P = 50$ N, determine la fuerza en el alambre y la magnitud de la fuerza resultante que ejerce el alambre sobre cada una de las poleas.

**3-34.** El cable forma un lazo y pasa sobre las pequeñas poleas en $A$, $B$, $C$ y $D$. Si la *fuerza resultante* máxima que puede ejercer el cable sobre cada polea es de 120 N, determine la máxima fuerza $P$ que puede aplicarse al cable según se muestra en la figura.



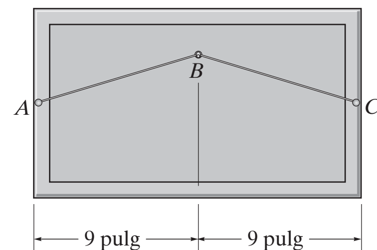

**Probs. 3-33/34**

*__3-32.__ Determine la magnitud y la dirección $\theta$ de la fuerza de equilibrio $F_{AB}$ ejercida a lo largo del eslabón $AB$ mediante el aparato de tracción que se muestra en la figura. La masa suspendida pesa 10 kg. No tome en cuenta el tamaño de la polea ubicada en $A$.



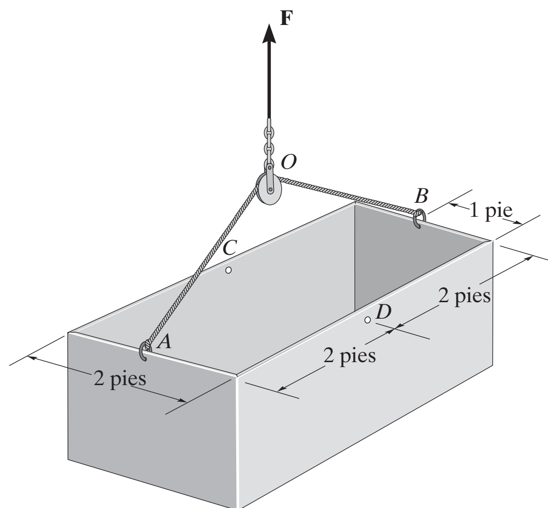

**Prob. 3-32**

**3-35.** El cuadro pesa 10 lb y se le va a colgar del pasador liso $B$. Si una cuerda se une al marco en los puntos $A$ y $C$, y la fuerza máxima que la cuerda puede soportar es de 15 lb, determine la cuerda más corta que puede usarse con seguridad.




**Prob. 3-35**

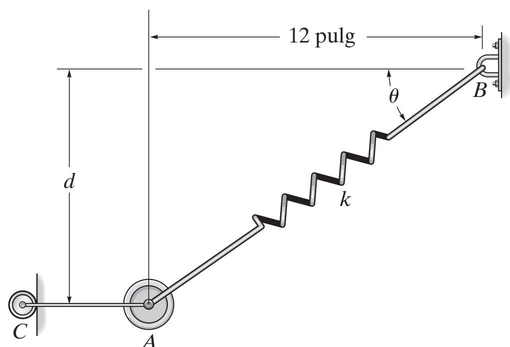
*3-36. El tanque de dimensiones uniformes y 200 lb de peso está suspendido por medio de un cable de 6 pies de longitud, el cual está unido a dos lados del tanque y pasa sobre la pequeña polea localizada en $O$. Si el cable puede unirse a los puntos $A$ y $B$ o $C$ y $D$, determine cuál unión produce la menor tensión en el cable. ¿Cuál es el valor de esta tensión?




Prob. 3-36

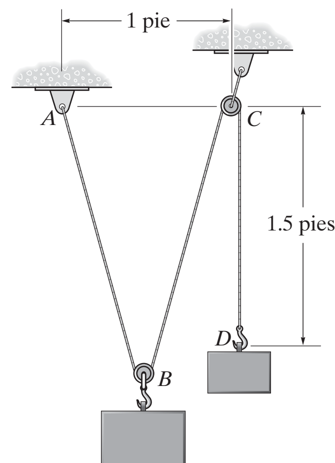
•3-37. El peso de 10 lb se sostiene mediante la cuerda $AC$ y el rodillo, así como por medio del resorte que tiene una rigidez $k = 10$ lb/pulg y una longitud sin estirar de 12 pulg. Determine la distancia $d$ a la que se ubica el peso cuando éste se encuentra en equilibrio.

3-38. El peso de 10 lb se sostiene mediante la cuerda $AC$ y el rodillo, así como por medio de un resorte. Si el resorte tiene una longitud sin estirar de 8 pulg y el peso está en equilibrio cuando $d = 4$ pulg, determine la rigidez $k$ del resorte.



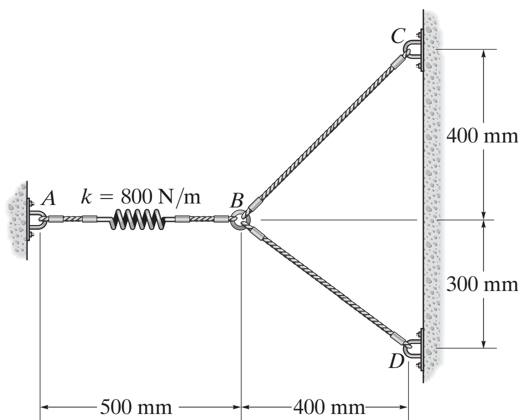

Probs. 3-37/38

•3-39. Se construye una "balanza" con una cuerda de 4 pies de longitud y el bloque $D$ de 10 lb. La cuerda está fija a un pasador situado en $A$ y pasa sobre dos *pequeñas* poleas en $B$ y $C$. Determine el peso del bloque suspendido $B$ si el sistema está en equilibrio.



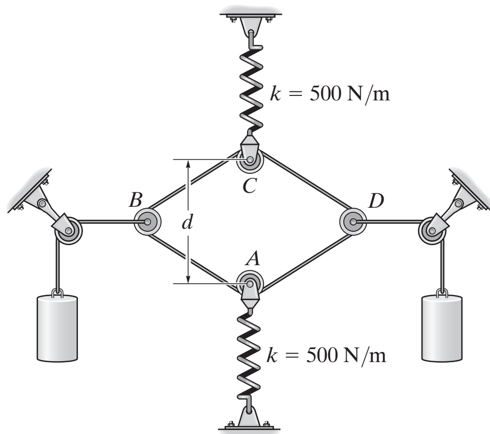

Prob. 3-39

•*3-40. El resorte tiene una rigidez $k = 800$ N/m y una longitud no alargada de 200 mm. Determine la fuerza en los cables $BC$ y $BD$ cuando el resorte se mantiene en la posición mostrada.



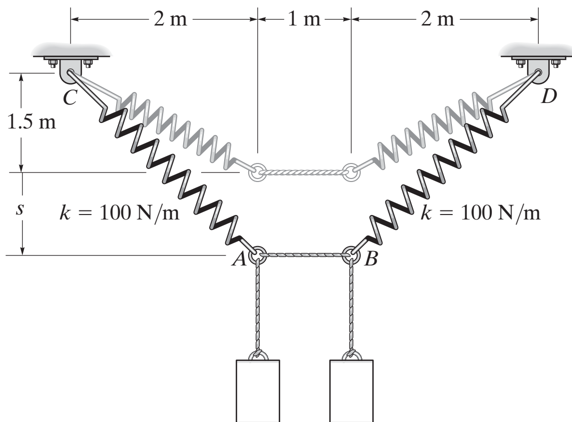

Prob. 3-40

**•3-41.** Un cable continuo con longitud total de 4 m se enrolla alrededor de las *pequeñas* poleas en $A$, $B$, $C$ y $D$. Si cada resorte se estira 300 mm, determine la masa $m$ de cada bloque. No tome en cuenta el peso de las poleas y las cuerdas. Los resortes están sin estirar cuando $d = 2$ m.



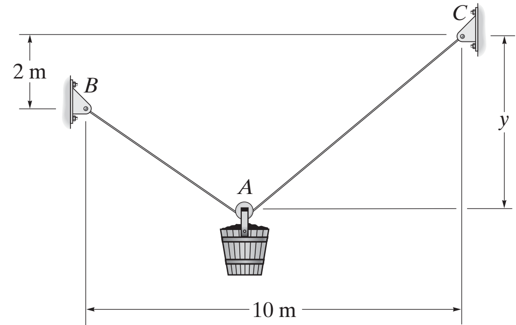

**Prob. 3-41**

**3-42.** Determine la masa de cada uno de los dos cilindros si éstos ocasionan una comba de $s = 0.5$ m cuando se cuelgan de los anillos en $A$ y $B$. Observe que cuando los cilindros se retiran, $s = 0$.



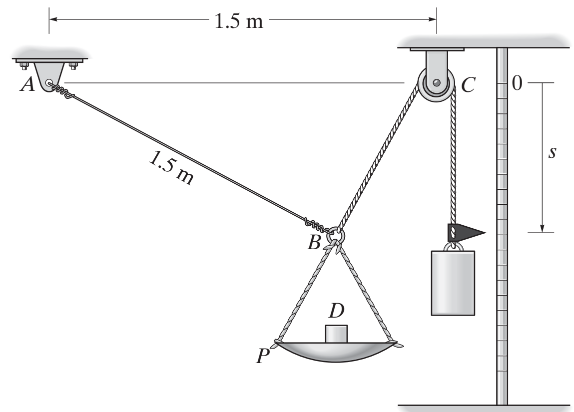

**Prob. 3-42**

**•3-43.** La cubeta y su contenido tienen una masa de 60 kg. Si el cable $BAC$ tiene 15 m de longitud, determine la distancia $y$ de la polea ubicada en $A$ necesaria para lograr el equilibrio. No tome en cuenta el tamaño de la polea.




**Prob. 3-43**

**•*3-44.** Una balanza se construye con la masa de 10 kg, el platillo $P$ de 2 kg, y el arreglo de polea y cuerda. La cuerda $BCA$ tiene 2 m de longitud. Si $s = 0.75$ m, determine la masa $D$ en el platillo. No tome en cuenta el tamaño de la polea.



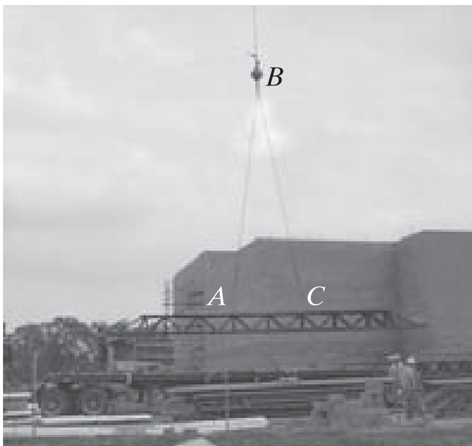

**Prob. 3-44**

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

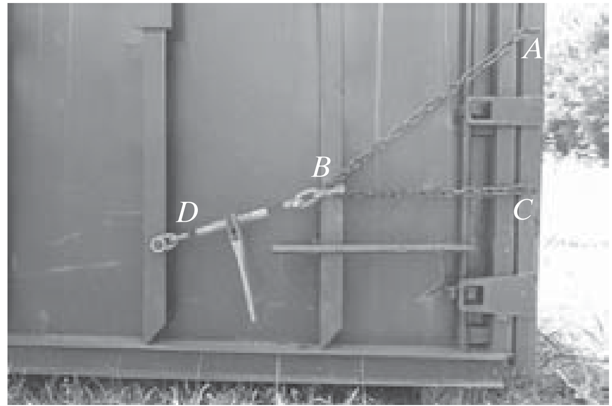
**P3-1.** El panel de concreto para pared se coloca en posición mediante los dos cables *AB* y *AC* de igual longitud. Establezca las dimensiones adecuadas y utilice un análisis de equilibrio para mostrar que cuanto más largos sean los cables, menor será la fuerza en cada cable.



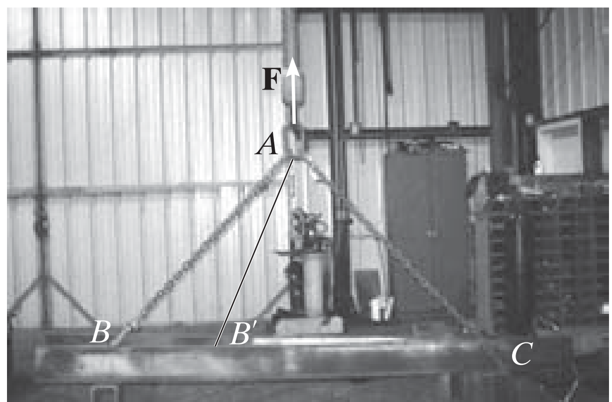

**P3-2.** La armadura se eleva con el cable *ABC* que pasa a través de una polea muy pequeña en *B*. Si la armadura se coloca en una posición inclinada, demuestre que ésta siempre regresará a la posición horizontal para mantener el equilibrio.




**P3-3.** El dispositivo *DB* se usa para jalar la cadena *ABC* a fin de mantener cerrada la puerta del contenedor. Si el ángulo entre *AB* y el segmento horizontal *BC* es de 30°, determine el ángulo entre *DB* y la horizontal de manera que se mantenga el equilibrio.




**P3-4.** Las cadenas *AB* y *AC* tienen la misma longitud y están sometidas a la fuerza vertical **F**. Si a *AB* la reemplaza una cadena más corta, muestre que esta cadena tendría que soportar una fuerza de tensión más grande que *AB* para poder mantener el equilibrio.



# 3.4 Sistemas de fuerzas tridimensionales

En la sección 3.1 establecimos que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio de una partícula es

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3-4}$$

En el caso de un sistema de fuerza tridimensional, como el de la figura 3-9, podemos descomponer las fuerzas en sus respectivas componentes **i**, **j**, **k**, de manera que $\Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$. Para satisfacer esta ecuación requerimos

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \tag{3-5}$$

Estas tres ecuaciones establecen que la *suma algebraica* de las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula a lo largo de cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero. Si las utilizamos, podremos resolver un máximo de tres incógnitas que por lo común se representan como ángulos o magnitudes de fuerzas los cuales se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la partícula.

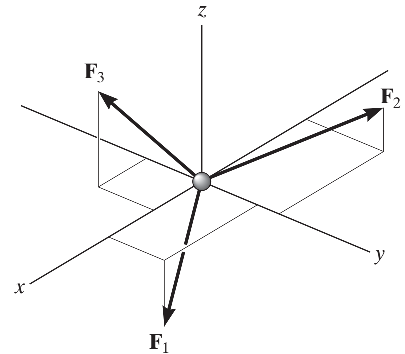



**Fig. 3-9**

3

## Procedimiento para el análisis

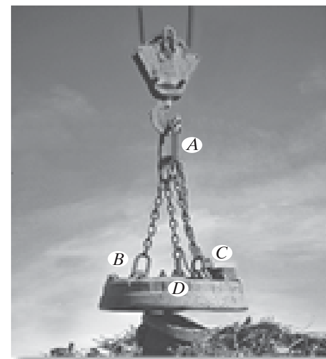
Los problemas de equilibrio de fuerzas tridimensionales para una partícula pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

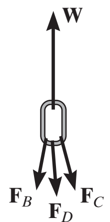
### Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes *x*, *y*, *z* en cualquier orientación adecuada.
- Marque todas las magnitudes y direcciones de las fuerzas conocidas y desconocidas sobre el diagrama.
- El sentido de una fuerza que tenga magnitud desconocida puede suponerse.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Use las ecuaciones escalares de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, en los casos en que sea fácil descomponer cada fuerza en sus componentes *x*, *y*, *z*.
- Si la geometría tridimensional le parece difícil, entonces exprese primero cada fuerza como un vector cartesiano en el diagrama de cuerpo libre, sustituya esos vectores en $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$, y después iguale a cero las componentes **i**, **j**, **k**.
- Si la solución para una fuerza da un resultado negativo, esto indica que el sentido de la fuerza es el inverso del mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

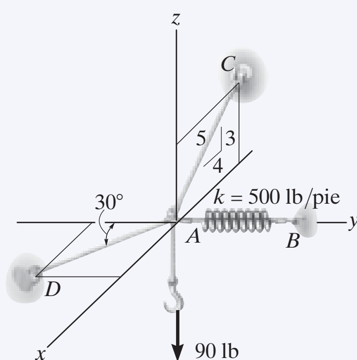


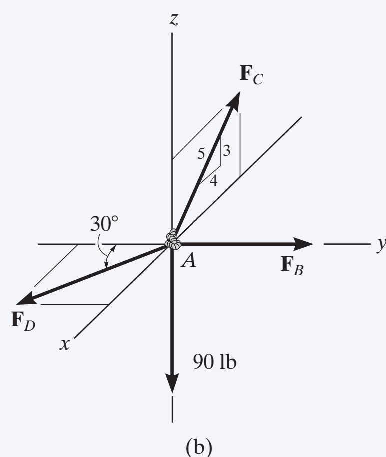

El anillo en *A* está sometido a la fuerza del gancho, así como a las fuerzas de cada una de las tres cadenas. Si el electroimán y su carga tienen un peso *W*, entonces la fuerza del gancho será **W** y las tres ecuaciones escalares de equilibrio pueden aplicarse al diagrama de cuerpo libre del anillo, a fin de determinar las fuerzas en las cadenas, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_D$.

## EJEMPLO 3.5

3




(a)




(b)

**Fig. 3-10**

Una carga de 90 lb está suspendida del gancho que se muestra en la figura 3-10*a*. Si la carga se sostiene mediante dos cables y un resorte con rigidez $k = 500$ lb/pie, determine la fuerza presente en los cables y el alargamiento del resorte para lograr la posición de equilibrio. El cable *AD* se encuentra en el plano *x-y* y el cable *AC* está en plano *x-z*.

### SOLUCIÓN

El alargamiento del resorte se puede determinar una vez que se haya calculado la fuerza que hay en él.

**Diagrama de cuerpo libre.** Se selecciona la conexión en *A* para el análisis del equilibrio puesto que las fuerzas presentes en los cables son concurrentes en este punto. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-10*b*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Por inspección, cada fuerza se puede separar fácilmente en sus componentes *x*, *y*, *z* y, por lo tanto, es posible aplicar directamente las tres ecuaciones escalares de equilibrio. Si consideramos las componentes dirigidas a lo largo de los ejes positivos como "positivas", tenemos

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_D \operatorname{sen} 30° - \left(\tfrac{4}{5}\right)F_C = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -F_D \cos 30° + F_B = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \left(\tfrac{3}{5}\right)F_C - 90 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$

Al despejar $F_C$ de la ecuación (3), luego $F_D$ de la ecuación (1) y finalmente $F_B$ de la ecuación (2), se obtiene

$$F_C = 150 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$F_D = 240 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$F_B = 207.8 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Entonces, el alargamiento del resorte es

$$F_B = ks_{AB}$$

$$207.8 \text{ lb} = (500 \text{ lb/pie})(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.416 \text{ pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** como los resultados para todas las fuerzas en los cables son positivos, cada uno de los cables se encuentra en tensión; es decir, jala desde el punto *A* como era de esperarse, figura 3-10*b*.

## EJEMPLO 3.6

La lámpara de 10 kg que se muestra en la figura 3-11*a* está suspendida de tres cuerdas que tienen la misma longitud. Determine su mínima distancia vertical *s* medida desde el techo, si la fuerza desarrollada en cualquier cuerda no puede ser mayor que 50 N.

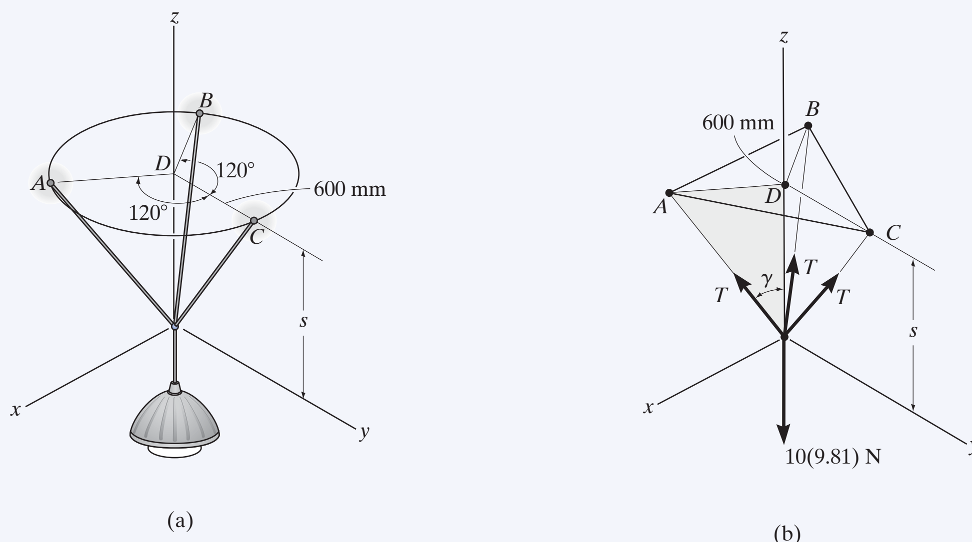



**Fig. 3-11**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Debido a la simetría, figura 3-11*b*, la distancia $DA = DB = DC = 600$ mm. A partir de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se deduce que la tensión $T$ en cada cuerda será la misma. Asimismo, el ángulo entre cada cuerda y el eje $z$ es $\gamma$.

**Ecuación de equilibrio.** Si aplicamos la ecuación de equilibrio a lo largo del eje $z$, con $T = 50$ N, tenemos

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 3[(50\text{ N})\cos\gamma] - 10(9.81)\text{ N} = 0$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{98.1}{150} = 49.16°$$

A partir del triángulo sombreado de la figura 3-11*b*,

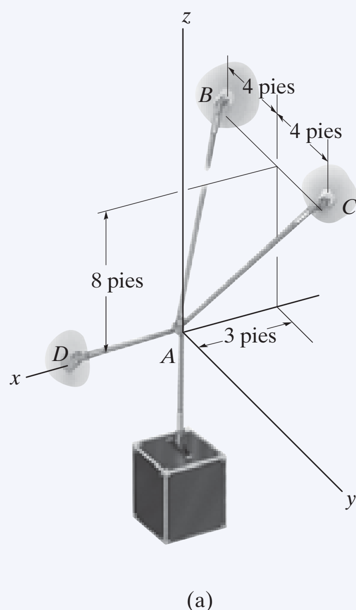
$$\tan 49.16° = \frac{600\text{ mm}}{s}$$

$$s = 519\text{ mm} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

3

## EJEMPLO 3.7

Determine la fuerza en cada cable que se ha usado para sostener la caja de 40 lb que se muestra en la figura 3-12*a*.




(a)

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 3-12*b*, se considera el diagrama de cuerpo libre del punto *A* para "exponer" las tres fuerzas desconocidas en los cables.

**Ecuaciones de equilibrio.** Primero expresaremos cada fuerza en su forma de vector cartesiano. Como las coordenadas de los puntos *B* y *C* son *B*(−3 pies, −4 pies, 8 pies) y *C*(−3 pies, 4 pies, 8 pies), tenemos

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$

$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$

$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}\text{ lb}$$

El equilibrio requiere que

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$-0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$

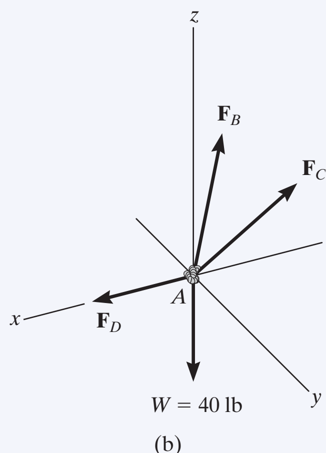
$$- 0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Al igualar a cero las respectivas componentes **i**, **j**, **k** resulta

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (3)$$




(b)

**Fig. 3-12**

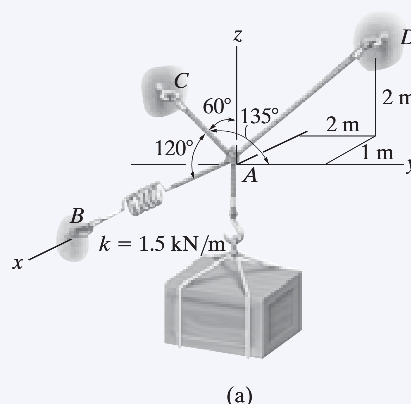
La ecuación (2) establece que $F_B = F_C$. Entonces, al despejar $F_B$ y $F_C$ de la ecuación (3) y sustituir el resultado en la ecuación (1) para obtener $F_D$, tenemos

$$F_B = F_C = 23.6\text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$F_D = 15.0\text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 3.8

Determine la tensión en cada una de las cuerdas usadas para sostener el cajón de 100 kg que se muestra en la figura 3-13*a*.




(a)

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** La fuerza en cada una de las cuerdas se puede determinar si investigamos el equilibrio del punto $A$. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 3-13*b*. El peso de la caja es $W = 100(9.81) = 981$ N.

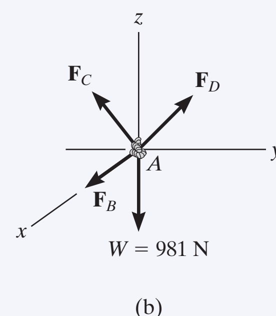
**Ecuaciones de equilibrio.** Cada fuerza incluida en el diagrama de cuerpo libre se expresa primero en forma vectorial cartesiana. Con la ecuación 2-9 para $\mathbf{F}_C$ y el punto $D(-1 \text{ m}, 2 \text{ m}, 2 \text{ m})$ para $\mathbf{F}_D$, tenemos

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \cos 120°\mathbf{i} + F_C \cos 135°\mathbf{j} + F_C \cos 60°\mathbf{k}$$
$$= -0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= -0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = \{-981\mathbf{k}\} \text{ N}$$




(b)

**Fig. 3-13**

Para el equilibrio se requiere que

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$F_B\mathbf{i} - 0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$
$$- 0.333F_D\,\mathbf{i} + 0.667F_D\,\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Al igualar a cero las respectivas componentes **i**, **j**, **k** resulta

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.707F_C + 0.667F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0 \qquad (3)$$

Al despejar $F_D$ de la ecuación (2) en términos de $F_C$, y sustituir el resultado en la ecuación (3), se obtiene $F_C$. Luego, se determina $F_D$ a partir de la ecuación (2). Por último, al sustituir los resultados en la ecuación (1) se obtiene $F_B$. Por consiguiente,

$F_C = 813$ N ***Resp.***

$F_D = 862$ N ***Resp.***

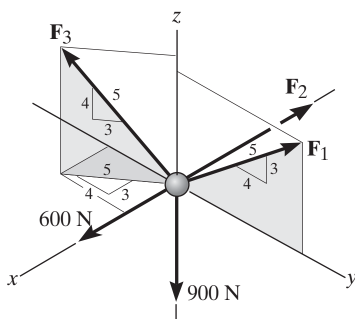
$F_B = 694$ N ***Resp.***

3

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

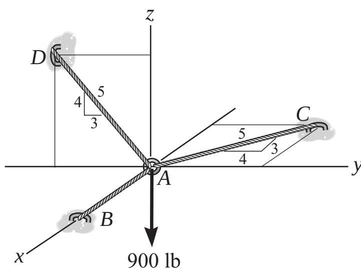
*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

**F3-7.** Determine la magnitud de las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, de manera que la partícula se mantenga en equilibrio.



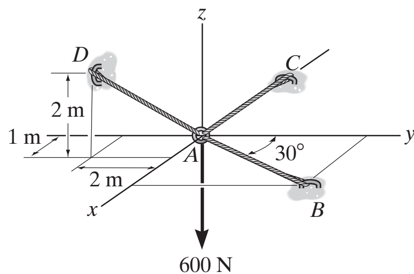

**F3-7**

**F3-8.** Determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $AC$ y $AD$.



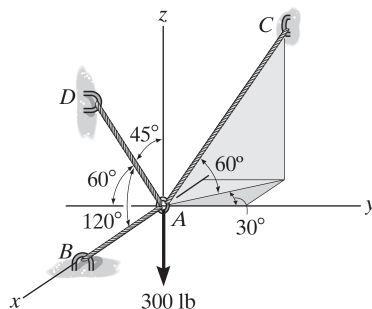

**F3-8**

**F3-9.** Determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $AC$ y $AD$.



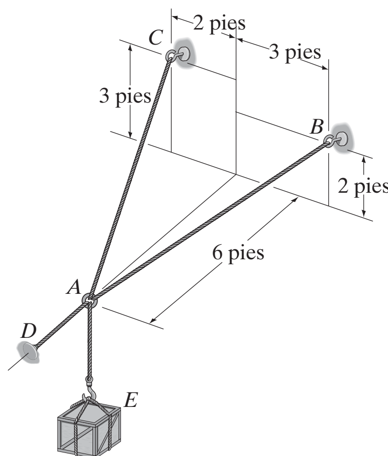

**F3-9**

**F3-10.** Determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $AC$ y $AD$.




**F3-10**

**F3-11.** La caja de 150 lb se sostiene mediante los cables $AB$, $AC$ y $AD$. Determine la tensión en estos cables.



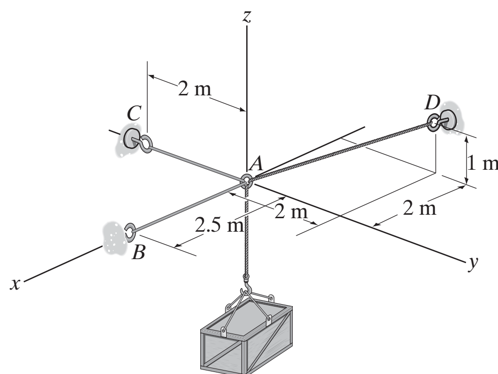

**F3-11**

## PROBLEMAS

*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

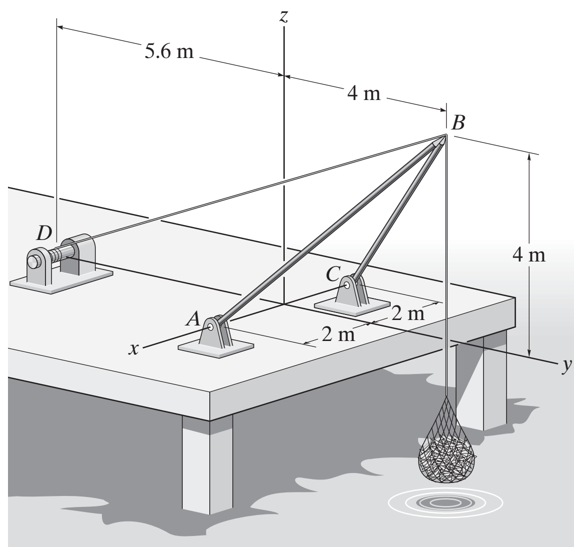
•**3-45.** Determine la tensión que hay en los cables para poder mantener la caja de 100 kg en la posición de equilibrio que se muestra en la figura.

**3-46.** Determine la masa máxima que puede tener la caja si la tensión desarrollada en cada cable no debe exceder 3 kN.




**Probs. 3-45/46**

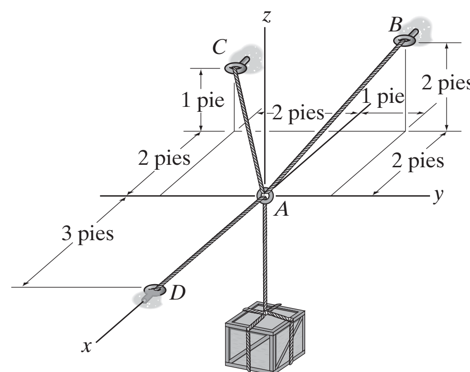
**3-47.** La grúa de brazos de corte se utiliza para llevar la red de pescado de 200 kg hacia el muelle. Determine la fuerza de compresión a lo largo de cada uno de los brazos $AB$ y $CB$, y la tensión en el cable $DB$ del cabestrante. Suponga que la fuerza presente en cada brazo actúa a lo largo de su eje.




**Prob. 3-47**

*__3-48.__ Determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $AC$ y $AD$ que se requiere para lograr el equilibrio de la caja de 300 lb.

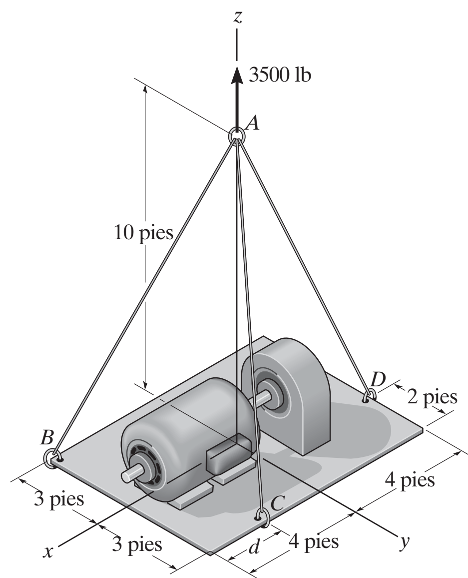
•**3-49.** Determine el peso máximo de la caja si la tensión desarrollada en cualquiera de los cables no debe exceder 450 lb.




**Probs. 3-48/49**

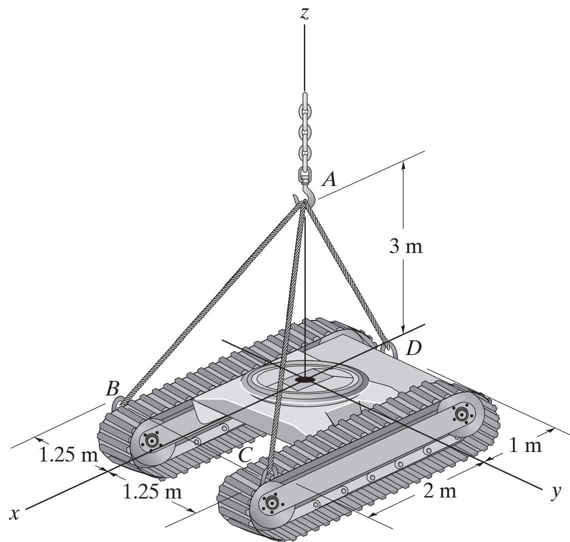
**3-50.** Determine la fuerza necesaria en cada cable para sostener la plataforma de 3500 lb. Considere $d = 2$ pies.

**3-51.** Determine la fuerza necesaria en cada cable para sostener la plataforma de 3500 lb. Considere $d = 4$ pies.



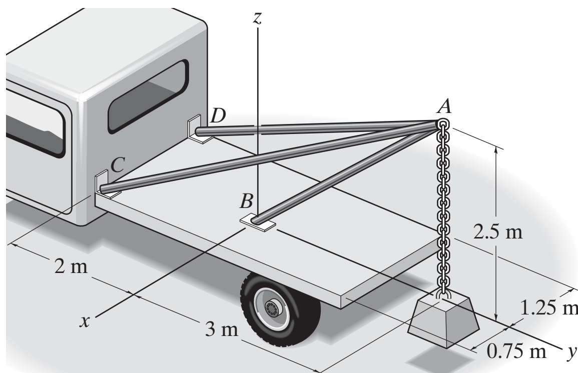

**Probs. 3-50/51**

*3-52. Determine la fuerza necesaria en cada uno de los tres cables para elevar el tractor cuya masa es de 8 Mg.




Prob. 3-52

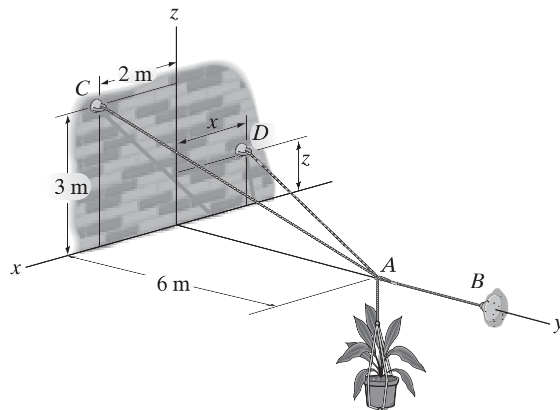
•3-53. Determine la fuerza que actúa a lo largo del eje $x$ de cada uno de los tres puntales necesarios para sostener el bloque de 500 kg.




Prob. 3-53

3-54. Si la masa de la maceta es de 50 kg, determine la tensión desarrollada en cada alambre para lograr el equilibrio. Considere $x = 1.5$ m y $z = 2$ m.

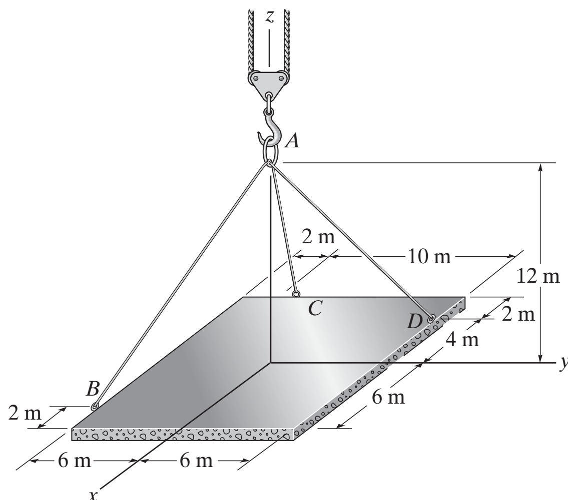
3-55. Si la masa de la maceta es de 50 kg, determine la tensión desarrollada en cada cable para lograr el equilibrio. Considere $x = 2$ m y $z = 1.5$ m.




Probs. 3-54/55

*3-56. Los extremos de los tres cables están unidos a un anillo localizado en $A$, al borde de una placa uniforme de 150 kg. Determine la tensión necesaria en cada uno de los tres cables para lograr el equilibrio.

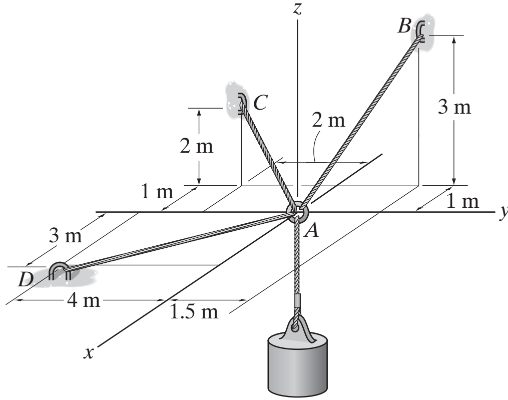
•3-57. Los extremos de los tres cables están unidos a un anillo localizado en $A$, al borde de una placa uniforme. Determine la masa máxima que puede tener la placa si cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 15 kN.




Probs. 3-56/57

**3-58.** Determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $AC$ y $AD$ que es necesaria para lograr el equilibrio del cilindro de 75 kg.

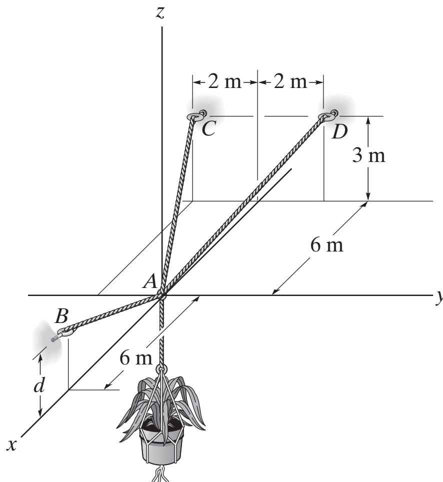
**3-59.** Si cada uno de los cables puede soportar una tensión máxima de 1000 N, determine la masa máxima del cilindro para que se pueda mantener el equilibrio.




**Probs. 3-58/59**

*__3-60.__ La maceta de 50 kg está soportada en $A$ por los tres cables que se muestran. Determine la fuerza que actúa en cada cable para lograr el equilibrio. Considere $d = 2.5$ m.

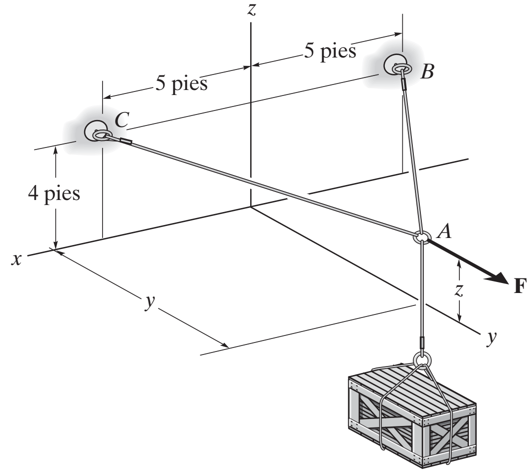
•**3-61.** Determine la altura $d$ del cable $AB$ de manera que la fuerza en los cables $AD$ y $AC$ tenga la mitad del valor de la fuerza del cable $AB$. ¿Cuál es la fuerza de cada cable para este caso? La maceta tiene una masa de 50 kg.




**Probs. 3-60/61**

**3-62.** Una fuerza de $F = 100$ lb mantiene en equilibrio a la caja de 400 lb. Determine las coordenadas $(0, y, z)$ del punto $A$ si la tensión en cada una de las cuerdas $AC$ y $AB$ es de 700 lb.

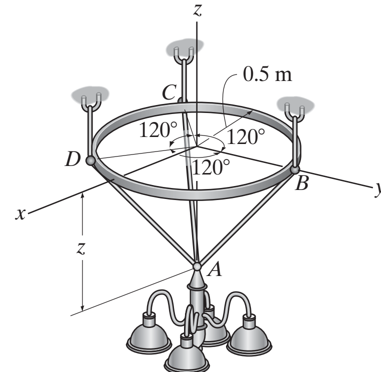
**3-63.** Si la tensión máxima permitida en los cables $AB$ y $AC$ es de 500 lb, determine la altura máxima $z$ a la cual se puede elevar la caja de 200 lb. ¿Cuál es la fuerza horizontal $F$ que debe aplicarse? Considere $y = 8$ pies.




**Probs. 3-62/63**

*__3-64.__ El anillo delgado se puede ajustar verticalmente entre tres cables que tienen la misma longitud, de éstos se suspende un candelabro de 100 kg. Si el anillo permanece en el plano horizontal y $z = 600$ mm, determine la tensión en cada uno de los cables.

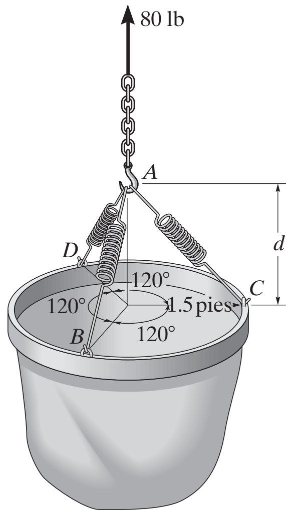
•**3-65.** El anillo delgado se puede ajustar verticalmente entre tres cables que tienen la misma longitud, de éstos se suspende un candelabro de 100 kg. Si el anillo permanece en el plano horizontal y la tensión en cada uno de los cables no debe exceder 1 kN, determine la distancia $z$ mínima permisible que se requiere para lograr el equilibrio.




**Probs. 3-64/65**

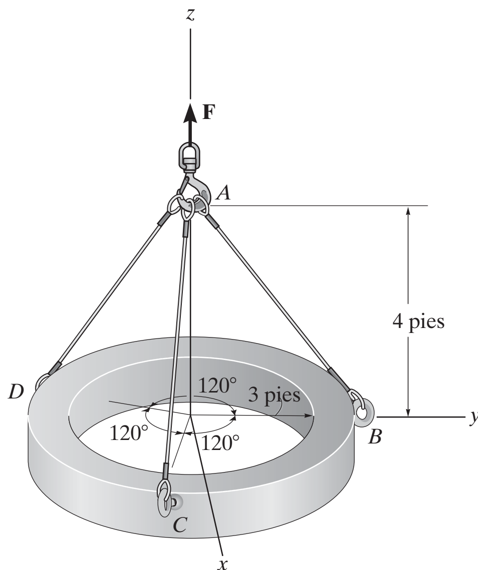
3

**3-66.** El cazo tiene un peso de 80 lb y se eleva mediante el uso de tres resortes, cada uno de los cuales tiene una longitud no alargada de $l_o = 1.5$ pies y una rigidez $k = 50$ lb/pie. Determine la distancia vertical $d$ desde el aro hasta el punto $A$ necesaria para lograr el equilibrio.



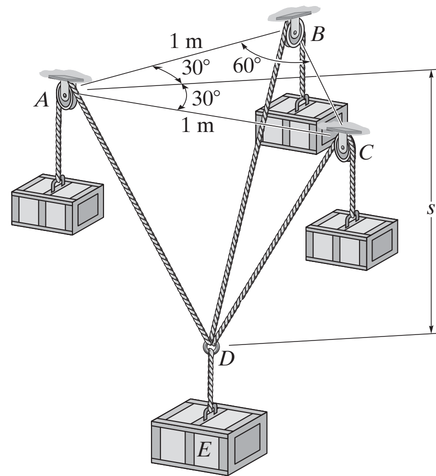

**Prob. 3-66**

**3-67.** Se utilizan tres cables para sostener un anillo de 900 lb. Determine la tensión que se necesita en cada cable para lograr la posición de equilibrio.



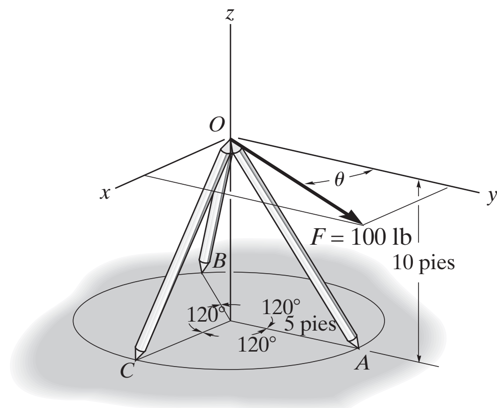

**Prob. 3-67**

***3-68.** Cada uno de los tres bloques exteriores tiene una masa de 2 kg, y el bloque central $E$ tiene una masa de 3 kg. Determine la flecha $s$ necesaria para el equilibrio del sistema.



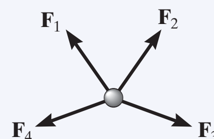
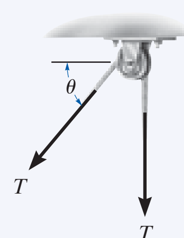
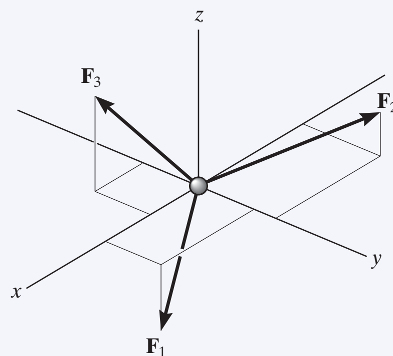

**Prob. 3-68**

**•3-69.** Determine el ángulo $\theta$ requerido para que se desarrolle una fuerza igual en los brazos $OB$ y $OC$. ¿Cuál es la fuerza en cada brazo si ésta se dirige a lo largo del eje del brazo? La fuerza **F** se encuentra en el plano $x$-$y$. Los soportes en $A$, $B$ y $C$ pueden ejercer fuerzas en cualquier dirección a lo largo de los brazos unidos.



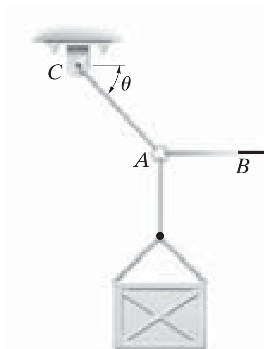

**Prob. 3-69**

## REPASO DEL CAPÍTULO

| | | |
|---|---|---|
| **Partícula en equilibrio**<br>Cuando una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en equilibrio. Esto requiere que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula formen una fuerza resultante que sea igual a cero.<br><br>Para tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, es necesario trazar su diagrama de cuerpo libre. Este diagrama es un perfil delineado de la partícula que muestra todas las fuerzas enlistadas con sus magnitudes y direcciones conocidas o desconocidas. | $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ |  |
| **Dos dimensiones**<br>Las dos ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas pueden aplicarse con referencia a un sistema coordenado *x*, *y* establecido.<br><br>La fuerza de tensión desarrollada en un *cable continuo* que pasa sobre una polea sin fricción debe tener una magnitud *constante* a lo largo del cable para poder mantenerlo en equilibrio.<br><br>Si el problema implica un resorte elástico lineal, entonces el alargamiento o la compresión *s* del resorte puede relacionarse con la fuerza aplicada a éste. | $\Sigma F_x = 0$<br>$\Sigma F_y = 0$<br><br>$F = ks$ | <br>El cable está en tensión |
| **Tres dimensiones**<br>Si la geometría tridimensional es difícil de visualizar, la ecuación de equilibrio debe aplicarse con un análisis de vector cartesiano. Esto requiere expresar primero cada fuerza incluida en el diagrama de cuerpo libre como un vector cartesiano. Cuando las fuerzas se suman y se igualan a cero, las componentes **i**, **j** y **k** también son iguales a cero. | $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$<br><br>$\Sigma F_x = 0$<br>$\Sigma F_y = 0$<br>$\Sigma F_z = 0$ |  |

## PROBLEMAS DE REPASO

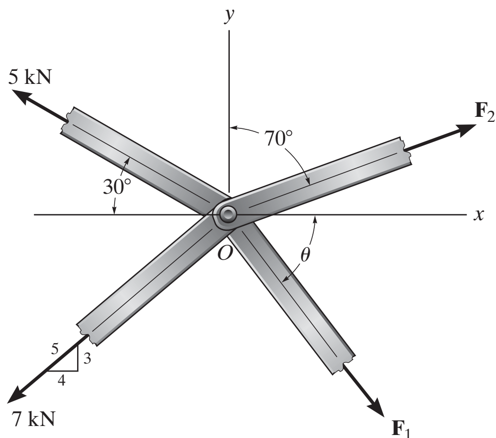
**3-70.** La caja de 500 lb se eleva usando las cuerdas *AB* y *AC*. Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de 2500 lb antes de romperse. Si *AB* siempre permanece horizontal, determine el ángulo $\theta$ mínimo con el que se puede levantar la caja.




**Prob. 3-70**

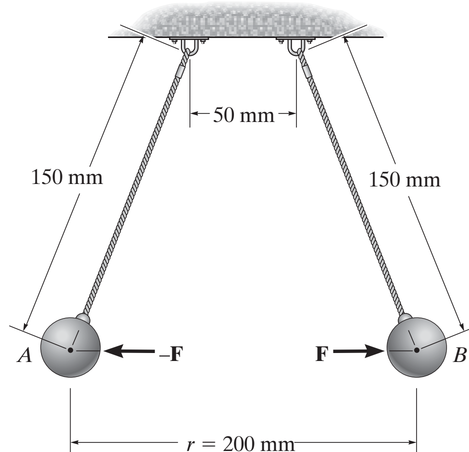
**3-71.** Los elementos de una armadura están articulados en la junta *O*. Determine la magnitud de $\mathbf{F}_1$ y su ángulo $\theta$ necesarios para el equilibrio. Considere $F_2 = 6$ kN.

***3-72.** Los elementos de una armadura están articulados en la junta *O*. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ necesarias para el equilibrio. Considere $\theta = 60°$.



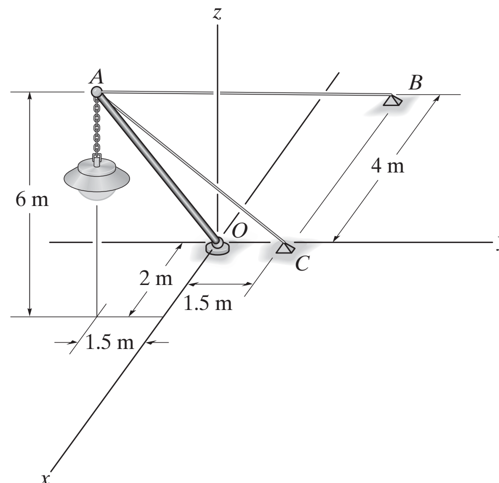

**Probs. 3-71/72**

•**3-73.** Dos bolas cargadas eléctricamente, cada una con una masa de 0.15 g, están suspendidas de cuerdas delgadas de igual longitud. Determine la magnitud de la fuerza repulsiva horizontal *F*, que actúa sobre cada bola si la distancia medida entre ellas es $r = 200$ mm.



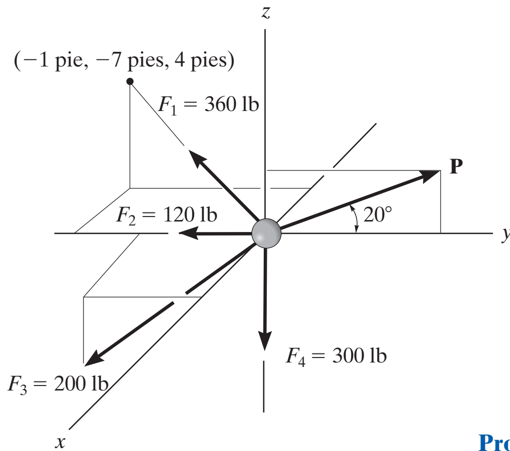

**Prob. 3-73**

**3-74.** La lámpara tiene una masa de 15 kg y está sostenida mediante un poste *AO* y por medio de los cables *AB* y *AC*. Si la fuerza en el poste actúa a lo largo de su eje, determine las fuerzas requeridas en *AO*, *AB* y *AC* para mantener el equilibrio.



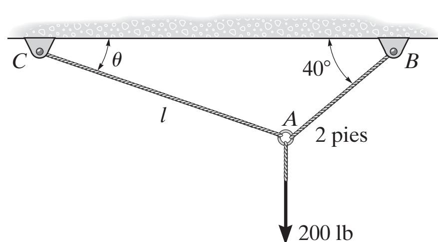

**Prob. 3-74**

**3-75.** Determine la magnitud de **P** y los ángulos directores coordenados de $\mathbf{F}_3$ requeridos para el equilibrio de la partícula. Observe que $\mathbf{F}_3$ actúa en el octante mostrado.



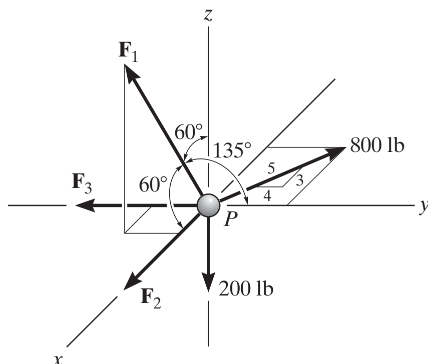

**Prob. 3-75**

*__3-76.__ El anillo de tamaño insignificante está sometido a una fuerza vertical de 200 lb. Determine la máxima longitud $l$ de la cuerda $AC$ de manera que la tensión que actúa en $AC$ sea de 160 lb. Además, ¿cuál es la fuerza que actúa en la cuerda $AB$? *Sugerencia*: use la condición de equilibrio para determinar el ángulo $\theta$ requerido para la unión, luego determine $l$ usando trigonometría aplicada a $\Delta ABC$.



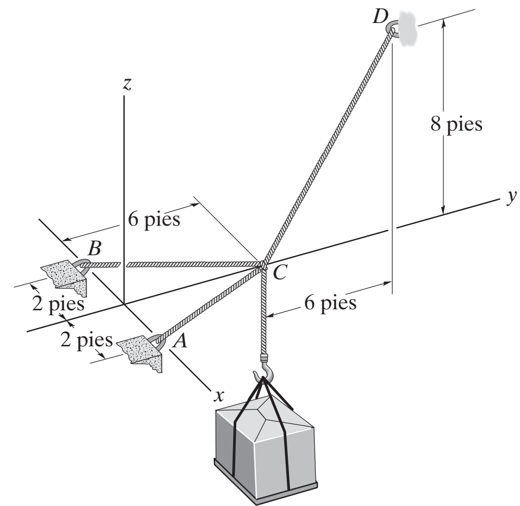

**Prob. 3-76**

•**3-77.** Determine las magnitudes necesarias de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ para que la partícula esté en equilibrio.



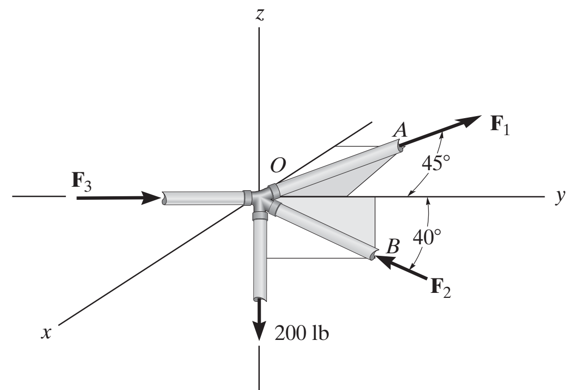

**Prob. 3-77**

**3-78.** Determine la fuerza necesaria en cada cable para sostener la carga de 500 lb.




**Prob. 3-78**

**3-79.** La junta de un marco espacial está sometido a cuatro fuerzas en los elementos. El elemento $OA$ se encuentra en el plano $x$-$y$ y el elemento $OB$ en el plano $y$-$z$. Determine las fuerzas que actúan en cada elemento y que se requieren para obtener el equilibrio de la junta.




**Prob. 3-79**



La aplicación de fuerzas sobre los manerales de estas llaves de torsión producirá una tendencia a que cada llave gire en torno a su extremo. Es importante saber cómo calcular este efecto y, en algunos casos, ser capaz de simplificar el sistema para sus resultantes.

# Resultantes de sistemas de fuerzas

# 4

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar el concepto del momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una ubicación específica.

## 4.1 Momento de una fuerza, formulación escalar

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo, ésta producirá una tendencia a que el cuerpo gire alrededor de un punto que no está en la línea de acción de la fuerza. Esta tendencia a girar se conoce en ocasiones como *par de torsión*, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el *momento*. Por ejemplo, considere una llave de torsión que se usa para desenroscar el perno de la figura 4-1*a*. Si se aplica una fuerza al maneral de la llave ésta tenderá a girar el perno alrededor del punto $O$ (o el eje $z$). La magnitud del momento es directamente proporcional a la magnitud de **F** y a la distancia perpendicular o *brazo de momento d*. Cuanto más grande sea la fuerza o más grande sea el brazo de momento, mayor será el momento o el efecto de giro. Observe que si se aplica la fuerza **F** a un ángulo $\theta \neq 90°$, figura 4-1*b*, entonces será más difícil girar el perno puesto que el brazo de momento $d' = d \operatorname{sen} \theta$ será menor que $d$. Si se aplica **F** a lo largo de la llave, figura 4-1*c*, su brazo de momento será igual a cero puesto que la línea de acción de **F** intersecará el punto $O$ (el eje $z$). En consecuencia, el momento de **F** respecto de $O$ también es cero y no puede ocurrir el giro.

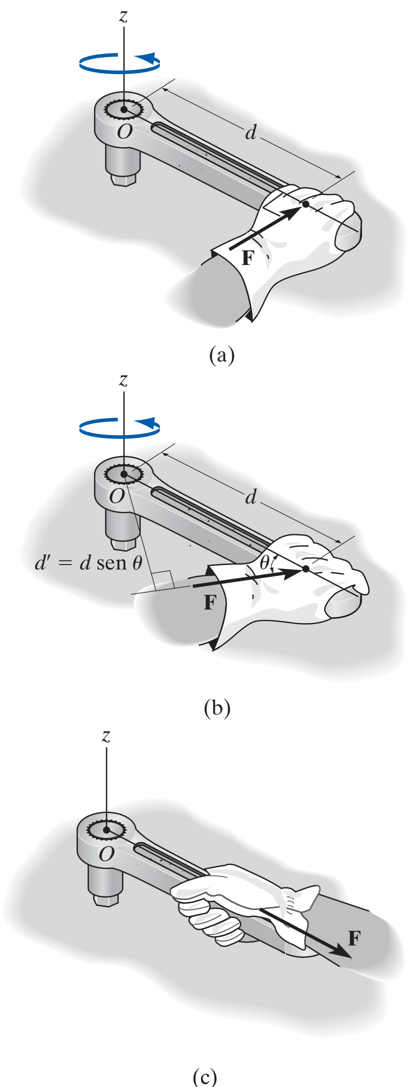


**Fig. 4-1**

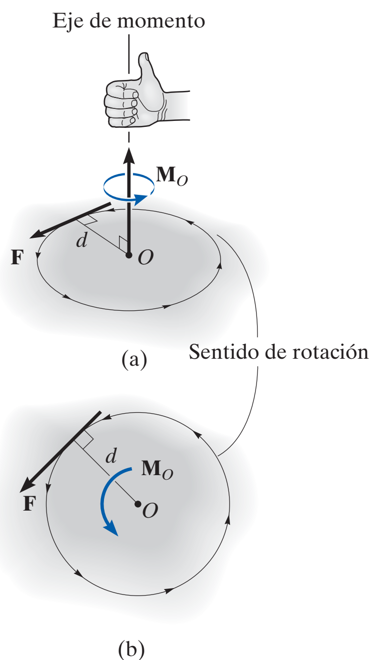



**Fig. 4-2**

Ahora podemos generalizar el análisis anterior y considerar la fuerza **F** y el punto $O$ que se encuentran en un plano sombreado como se muestra en la figura 4-2*a*. El momento $\mathbf{M}_O$ con respecto al punto $O$, o con respecto a un eje que pase por $O$ y sea perpendicular al plano, es una *cantidad vectorial* puesto que tiene magnitud y dirección específicas.

**Magnitud.** La magnitud de $\mathbf{M}_O$ es

$$M_O = Fd \tag{4-1}$$

donde $d$ es el *brazo de momento* o *distancia perpendicular* desde el eje en el punto $O$ hasta la línea de acción de la fuerza. Las unidades de la magnitud del momento son el producto de la fuerza multiplicada por la distancia, es decir, N · m o lb · pie.

**Dirección.** La dirección de $\mathbf{M}_O$ está definida por su *eje de momento*, el cual es perpendicular al plano que contiene la fuerza **F**, y por su brazo de momento $d$. Para establecer el sentido de dirección de $\mathbf{M}_O$ se utiliza la regla de la mano derecha. De acuerdo con esta regla, el curveo natural de los dedos de la mano derecha cuando éstos se doblan sobre la palma representa la tendencia para la rotación causada por el momento. Cuando se realiza esta acción, el pulgar de la mano derecha dará el sentido de la dirección de $\mathbf{M}_O$, figura 4-2*a*. Observe que, en tres dimensiones, el vector de momento se ilustra mediante una flecha curva alrededor de una flecha. En dos dimensiones, este vector se representa sólo con la flecha curva como en la figura 4-2*b*. Como en este caso el momento tenderá a causar una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el vector de momento se dirige en realidad hacia fuera de la página.

**Momento resultante.** Para problemas bidimensionales, donde todas las fuerzas se encuentran en el plano *x-y*, figura 4-3, el momento resultante $(\mathbf{M}_R)_o$ con respecto al punto $O$ (el eje $z$) puede determinarse al *encontrar la suma algebraica* de los momentos causados por todas las fuerzas en el sistema. Como convención consideraremos de manera general los *momentos positivos* como *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* por estar dirigidos a lo largo del eje positivo $z$ (fuera de la página). Los *momentos en el sentido de las manecillas del reloj* serán *negativos*. Al hacer esto, el sentido de dirección de cada momento puede representarse mediante un signo de *más* o de *menos*. Por lo tanto, si se utiliza esta convención de signos, el momento resultante en la figura 4-3 es

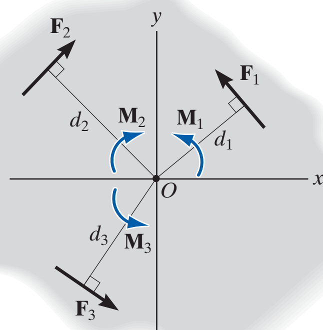



**Fig. 4-3**

$$\circlearrowleft + (M_R)_o = \Sigma Fd; \qquad (M_R)_o = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

Si el resultado numérico de esta suma es un escalar positivo, $(\mathbf{M}_R)_o$ será un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj (fuera de la página); y si el resultado es negativo, $(\mathbf{M}_R)_o$ será un momento en el sentido de las manecillas del reloj (dentro de la página).

## EJEMPLO 4.1

Para cada caso ilustrado en la figura 4-4, determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS ESCALAR)*

La línea de acción de cada fuerza está extendida como una línea discontinua para establecer el brazo de momento $d$. También se ilustra la tendencia de rotación del elemento causada por la fuerza. Además, la órbita de la fuerza respecto de $O$ se muestra con una flecha curva de color azul. Entonces,

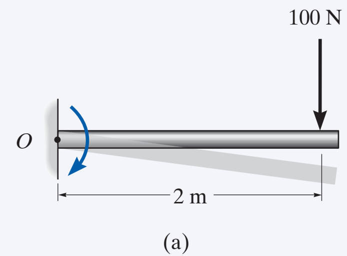
Fig. 4-4*a* $M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N}\cdot\text{m} \curvearrowright$ ***Resp.***

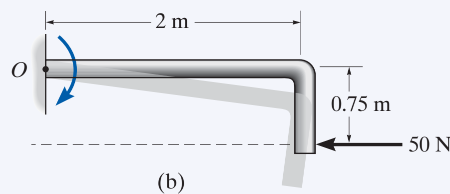
Fig. 4-4*b* $M_O = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N}\cdot\text{m} \curvearrowright$ ***Resp.***

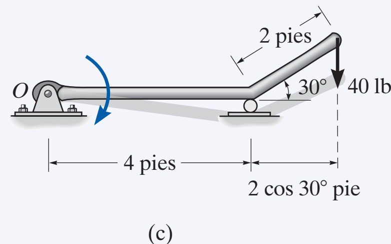
Fig. 4-4*c* $M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ pies} + 2 \cos 30° \text{ pie})$
$= 229 \text{ lb}\cdot\text{pie} \curvearrowright$ ***Resp.***

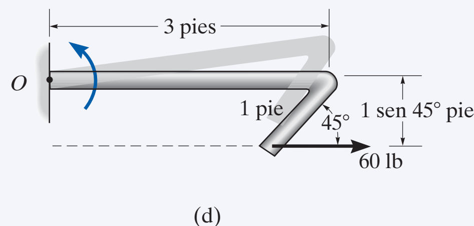
Fig. 4-4*d* $M_O = (60 \text{ lb})(1 \text{ sen } 45° \text{ pie}) = 42.4 \text{ lb}\cdot\text{pie} \curvearrowleft$ ***Resp.***

Fig. 4-4*e* $M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft$ ***Resp.***



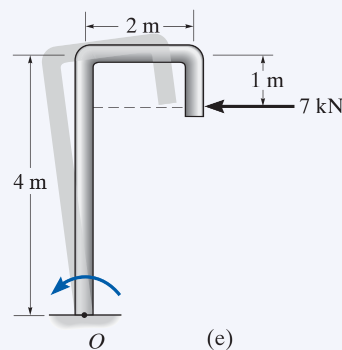




**Fig. 4-4**

4

## EJEMPLO 4.2

Determine el momento resultante de las cuatro fuerzas que actúan sobre la barra de la figura 4-5 con respecto al punto $O$.

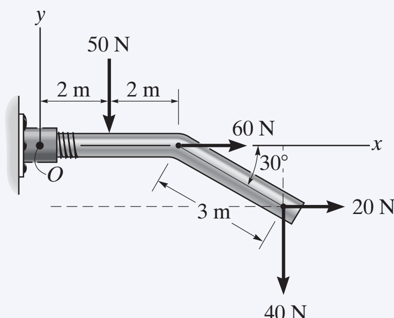



**Fig. 4-5**

### SOLUCIÓN

Si se supone que los momentos positivos actúan en la dirección $+\mathbf{k}$, es decir, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos

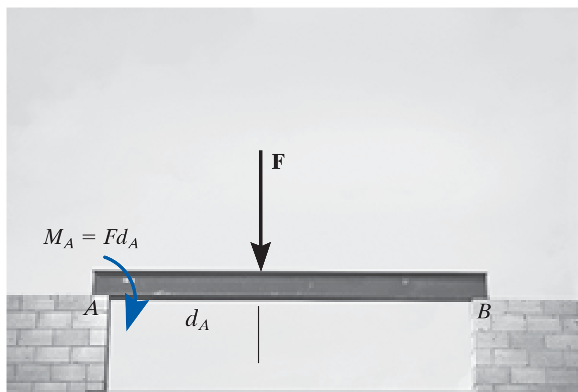
$$\circlearrowleft +M_{R_O} = \Sigma Fd;$$

$$M_{R_O} = -50\text{ N}(2\text{ m}) + 60\text{ N}(0) + 20\text{ N}(3\text{ sen }30^\circ\text{ m})$$

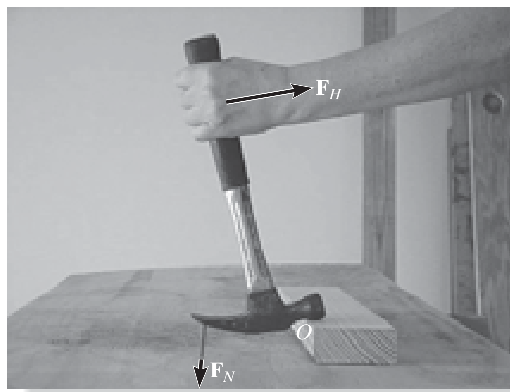
$$-40\text{ N}(4\text{ m} + 3\cos 30^\circ\text{ m})$$

$$M_{R_O} = -334\text{ N}\cdot\text{m} = 334\text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

Para este cálculo, observe cómo se establecen las distancias de brazo de momento para las fuerzas de 20 N y 40 N desde las líneas de acción extendidas (línea discontinua) de cada una de estas fuerzas.




Como se ilustra en los problemas de ejemplo, el momento de una fuerza no siempre ocasiona rotación. Por ejemplo, la fuerza **F** tiende a girar la viga en el sentido de las manecillas del reloj en torno a su soporte en $A$ con un momento $M_A = Fd_A$. Si se quitara el soporte en $B$ se daría la rotación real.




Para poder sacar el clavo se requerirá que el momento de $\mathbf{F}_H$ con respecto al punto $O$ sea más grande que el momento de la fuerza $\mathbf{F}_N$ con respecto a $O$ que se necesita para sacar el clavo.

## 4.2 Producto cruz

El momento de una fuerza se formulará mediante vectores cartesianos en la siguiente sección. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario ampliar nuestro conocimiento del álgebra vectorial e introducir el método del producto cruz de la multiplicación vectorial.

El *producto cruz* de dos vectores **A** y **B** da como resultado el vector **C**, el cual se escribe

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{4-2}$$

y se lee "**C** es igual a **A** cruz **B**".

**Magnitud.** La *magnitud* de **C** se define como el producto de las magnitudes de **A** y **B** y el seno del ángulo $\theta$ entre sus colas ($0° \leq \theta \leq 180°$). Así, $C = AB \text{ sen } \theta$.

**Dirección.** El vector **C** tiene una *dirección* perpendicular al plano que contiene a **A** y **B** de tal manera que **C** se especifica mediante la regla de la mano derecha; es decir, al cerrar los dedos de la mano derecha desde el vector **A** (cruz) hacia el vector **B**, el pulgar señala entonces la dirección de **C**, como se muestra en la figura 4-6.

Dado que se conoce la magnitud y la dirección de **C**, podemos escribir

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \text{ sen } \theta)\mathbf{u}_C \tag{4-3}$$

donde el escalar $AB \text{ sen } \theta$ define la *magnitud* de **C** y el vector unitario $\mathbf{u}_C$ define la *dirección* de **C**. Los términos de la ecuación 4-3 se ilustran de manera gráfica en la figura 4-6.

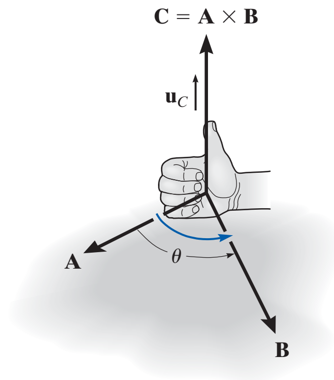



Fig. 4-6

4

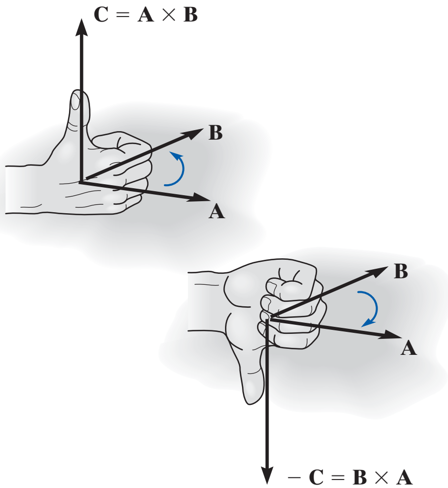



Fig. 4-7

## Leyes de operación

- La ley conmutativa *no* es válida, es decir $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$. En vez de eso,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Esto se muestra en la figura 4-7 por la regla de la mano derecha. El producto cruz $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ produce un vector que tiene la misma magnitud pero actúa en dirección opuesta a $\mathbf{C}$; esto es, $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$.

- Si el producto cruz se multiplica por un escalar $a$, obedece la ley asociativa:

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

Esta propiedad es fácil de demostrar puesto que la magnitud del vector resultante ($|a|AB$ sen $\theta$) y su dirección son las mismas en cada caso.

- El producto cruz de vectores también obedece la ley distributiva de la suma,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

- La demostración de esta identidad se deja como ejercicio (vea el problema 4-1). Es importante observar que debe mantenerse el *orden adecuado* de los productos cruz, dado que no son conmutativos.

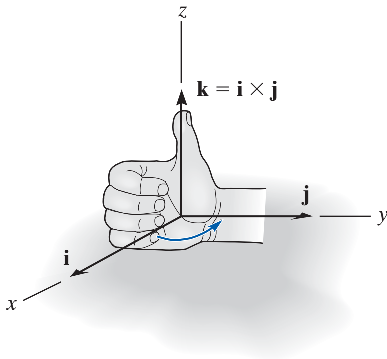



Fig. 4-8

**Formulación vectorial cartesiana.** La ecuación 4-3 puede usarse para encontrar el producto cruz de cualquier par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo, para determinar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la magnitud del vector resultante es $(i)(j)(\text{sen } 90°) = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección se determina por la regla de la mano derecha. Como se muestra en la figura 4-8, el vector resultante señala en la dirección $+\mathbf{k}$. Así, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (1)\mathbf{k}$. Del mismo modo,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

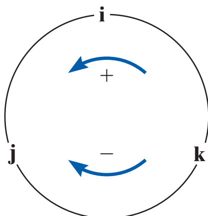



Fig. 4-9

Estos resultados *no* deben memorizarse; antes bien, entender de manera clara cómo se obtiene cada uno cuando se emplean la regla de la mano derecha y la definición del producto cruz. El esquema sencillo que se muestra en la figura 4-9 ayuda a obtener los mismos resultados cuando se requiere. Si el círculo se construye como se muestra, entonces, al "cruzar" dos vectores unitarios en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del círculo, se obtiene el tercer vector unitario *positivo*; por ejemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Al "cruzar" en el *sentido de las manecillas del reloj*, se obtiene un vector unitario *negativo*; por ejemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Considere ahora el producto cruz de dos vectores generales **A** y **B** los cuales se expresan en forma vectorial cartesiana. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k})\end{aligned}$$

Al realizar las operaciones de productos cruz y combinar términos resulta

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \quad (4\text{-}4)$$

Esta ecuación también puede escribirse en una forma de determinante más compacta como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (4\text{-}5)$$

Así, para determinar el producto cruz de dos vectores cartesianos **A** y **B** cualesquiera, es necesario desarrollar un determinante cuya primera fila de elementos conste de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** y cuyas segunda y tercera filas representen las componentes $x$, $y$, $z$ de los dos vectores **A** y **B**, respectivamente.*

*Un determinante con tres filas y tres columnas se puede desarrollar si se usan tres menores, cada uno de los cuales se multiplica por uno de los tres términos en la primera fila. Hay cuatro elementos en cada menor, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

Por *definición*, esta notación determinante representa los términos $(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$, lo cual es simplemente el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y a la derecha $(A_{11}A_{22})$ *menos* el producto de los dos elementos de la flecha inclinada hacia abajo y hacia la izquierda $(A_{12}A_{21})$. Para un determinante de 3 × 3, como el de la ecuación 4-5, los tres menores se pueden generar de acuerdo con el siguiente esquema:

Para el elemento **i**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y)$

Recuerde el signo negativo

Para el elemento **j**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_xB_z - A_zB_x)$

Para el elemento **k**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

Al sumar los resultados y tomar nota de que el elemento **j** *debe incluir el signo menos* se obtiene la forma desarrollada de **A** × **B** dada en la ecuación 4-4.

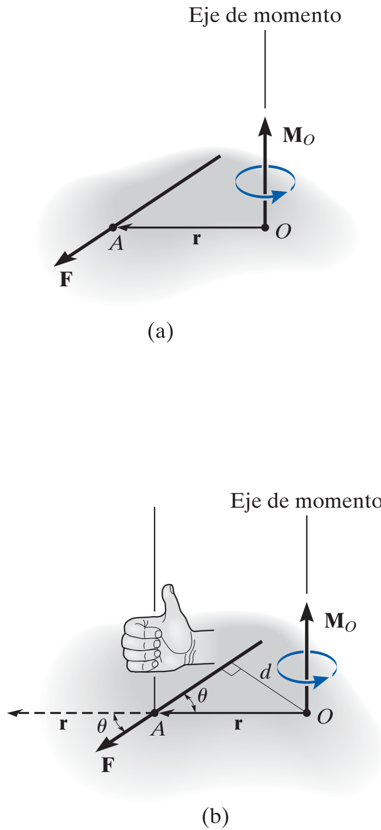



Fig. 4-10



## 4.3 Momento de una fuerza, formulación vectorial

El momento de una fuerza **F** con respecto al punto $O$, o realmente con respecto al eje del momento que pasa por $O$ y es perpendicular al plano que contiene a $O$ y a **F**, figura 4-10*a*, puede expresarse por el producto cruz vectorial, a saber,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-6}$$

Aquí **r** representa un vector de posición trazado *desde O* hasta *cualquier punto* que se encuentre sobre la línea de acción de **F**. Ahora mostraremos que en realidad el momento $\mathbf{M}_O$, al ser determinado por este producto cruz, tiene la magnitud y la dirección adecuadas.

**Magnitud.** La magnitud del producto cruz se define con la ecuación 4-3 como $M_O = rF \operatorname{sen} \theta$, donde el ángulo $\theta$ se mide entre las *colas* de **r** y **F**. Para establecer este ángulo, se debe tratar a **r** como un vector deslizante, de manera que $\theta$ se pueda construir correctamente; figura 4-10*b*. Como el brazo de momento $d = r \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = F(r \operatorname{sen} \theta) = Fd$$

lo que concuerda con la ecuación 4-1.

**Dirección.** La dirección y el sentido de $\mathbf{M}_O$ en la ecuación 4-6 están determinados mediante la regla de la mano derecha, tal como se aplica ésta al producto cruz. Así, al deslizar **r** a la posición de la línea discontinua y cerrar los dedos de la mano derecha de **r** hacia **F**, "**r** cruz **F**", el pulgar está dirigido hacia arriba o perpendicularmente al plano que contiene a **r** y a **F**, esto es, en la *misma dirección* que $\mathbf{M}_O$, el momento de la fuerza respecto al punto $O$, figura 4-10*b*. Observe que el "curveo" de los dedos como el curveo alrededor del vector momento, indica el sentido de rotación causado por la fuerza. Como el producto cruz no obedece la ley conmutativa, es importante conservar el orden de $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para producir el sentido correcto de la dirección para $\mathbf{M}_O$.

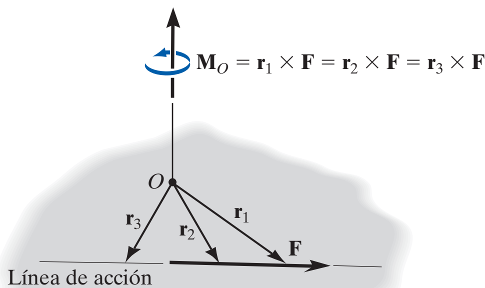



Fig. 4-11

**Principio de transmisibilidad.** A menudo, la operación del producto cruz se usa en tres dimensiones porque no se requiere la distancia perpendicular o el brazo de momento desde el punto $O$ hasta la línea de acción de la fuerza. En otras palabras, podemos usar cualquier vector de posición **r** medido desde el punto $O$ hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza **F**, figura 4-11. Así,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$

Como **F** se puede aplicar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción y aún así crear el *mismo momento* con respecto al punto $O$, entonces **F** puede considerarse un *vector deslizante*. Esta propiedad se llama *principio de transmisibilidad* de una fuerza.

**Formulación vectorial cartesiana.** Si establecemos ejes coordenados $x$, $y$, $z$, el vector posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ pueden expresarse como vectores cartesianos, figura 4-12*a*. Al aplicar la ecuación 4-5, tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (4\text{-}7)$$

donde

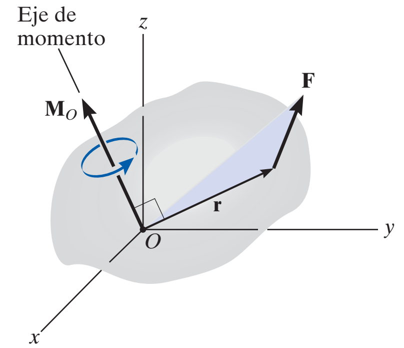
$r_x, r_y, r_z$ representan las componentes $x$, $y$, $z$ del vector de posición trazado desde el punto $O$ hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza

$F_x, F_y, F_z$ representan las componentes $x$, $y$, $z$ del vector fuerza

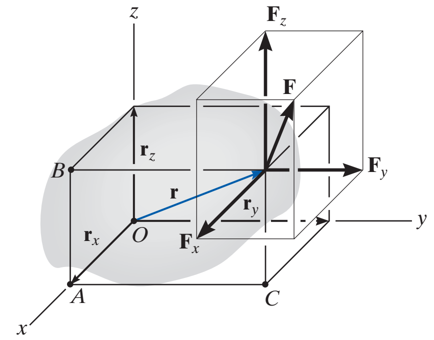
Si se desarrolla el determinante, como en la ecuación 4-4 tenemos

$$\mathbf{M}_O = (r_yF_z - r_zF_y)\mathbf{i} - (r_xF_z - r_zF_x)\mathbf{j} + (r_xF_y - r_yF_x)\mathbf{k} \qquad (4\text{-}8)$$

El significado físico de esas tres componentes de momento resulta evidente al estudiar la figura 4-12*b*. Por ejemplo, la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{M}_O$ puede determinarse a partir de los momentos de $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ con respecto al eje $x$. La componente $\mathbf{F}_x$ *no* genera un momento o tendencia a girar con respecto al eje $x$ puesto que esta fuerza es *paralela* al eje $x$. La línea de acción de $\mathbf{F}_y$ pasa por el punto $B$ y entonces la magnitud del momento de $\mathbf{F}_y$ con respecto al punto $A$ sobre el eje $x$ es $r_zF_y$. Por la regla de la mano derecha, esta componente actúa en la dirección $\mathbf{i}$ *negativa*. De igual forma, $\mathbf{F}_z$ pasa por el punto $C$ y por lo tanto aporta una componente de momento de $r_yF_z\mathbf{i}$ con respecto al eje. Así, $(M_O)_x = (r_yF_z - r_zF_y)$ como se muestra en la ecuación 4-8. Como ejercicio, establezca las componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de $\mathbf{M}_O$ de esta manera y demuestre que en realidad la forma desarrollada del determinante, ecuación 4-8, representa el momento de la fuerza respecto del punto $O$. Una vez determinada $\mathbf{M}_O$ observe que siempre será *perpendicular* al plano sombreado en azul que contiene los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, figura 4-12*a*.



(a)



(b)

**Fig. 4-12**

**Momento resultante de un sistema de fuerzas.** Si un sistema de fuerzas actúa sobre un cuerpo, figura 4-13, el momento resultante de las fuerzas respecto al punto $O$ puede ser determinado mediante la adición del momento de cada fuerza. Esta resultante se puede escribir simbólicamente como

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (4\text{-}9)$$

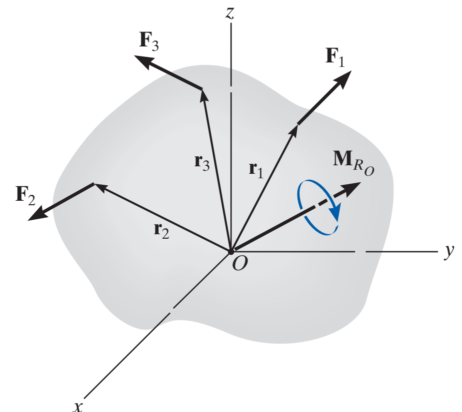
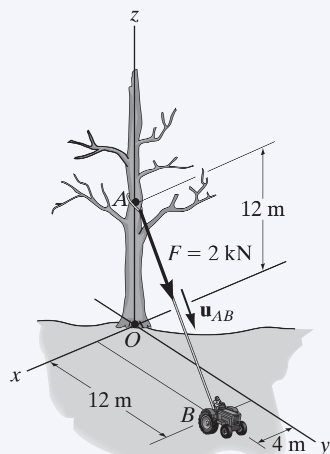


**Fig. 4-13**

4

## EJEMPLO 4.3




(a)

Determine el momento producido por la fuerza **F** que se muestra en la figura 4-14*a*, respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

### SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura 4-14*a*, puede usarse $\mathbf{r}_A$ o bien $\mathbf{r}_B$ para determinar el momento respecto al punto *O*. Estos vectores de posición son

$$\mathbf{r}_A = \{12\mathbf{k}\}\text{ m} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\}\text{ m}$$

La fuerza **F** expresada como un vector cartesiano es

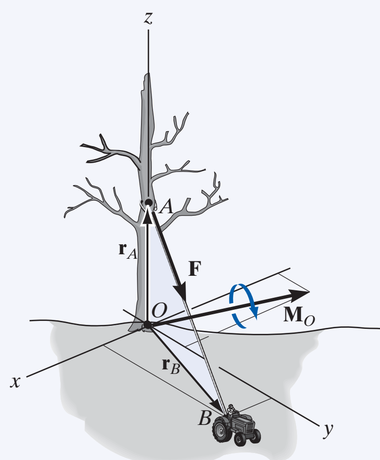
$$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 2\text{ kN}\left[\frac{\{4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(4\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2 + (-12\text{ m})^2}}\right]$$
$$= \{0.4588\mathbf{i} + 1.376\mathbf{j} - 1.376\mathbf{k}\}\text{ kN}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$
$$= [0(-1.376) - 12(1.376)]\mathbf{i} - [0(-1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{j}$$
$$+ [0(1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{k}$$
$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

o bien

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 12 & 0 \\ 0.4588 & 1.376 & -1.376 \end{vmatrix}$$
$$= [12(-1.376) - 0(1.376)]\mathbf{i} - [4(-1.376) - 0(0.4588)]\mathbf{j}$$
$$+ [4(1.376) - 12(0.4588)]\mathbf{k}$$
$$= \{-16.5\mathbf{i} + 5.51\mathbf{j}\}\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$



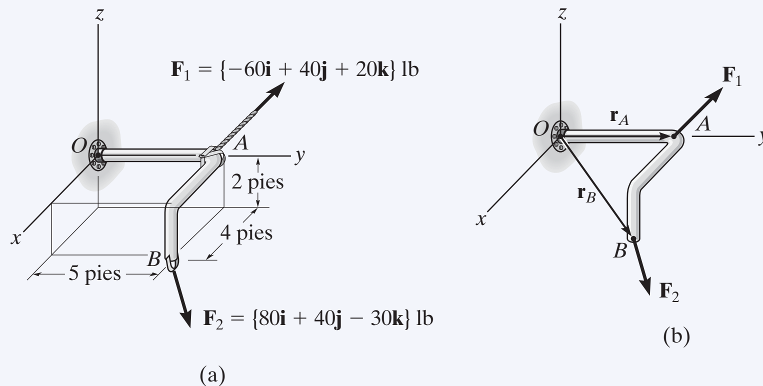

(b)

**Fig. 4-14**

**NOTA:** como se muestra en la figura 4-14*b*, $\mathbf{M}_O$ actúa perpendicular al plano que contiene a **F**, $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. Después de trabajar con este problema a partir de $M_O = Fd$, observe la dificultad que puede surgir al obtener el brazo de momento *d*.

## EJEMPLO 4.4

Dos fuerzas actúan sobre la barra en la figura 4-15*a*. Determine el momento resultante que generan con respecto al soporte en $O$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




### SOLUCIÓN

Los vectores de posición están dirigidos desde el punto $O$ hacia cada fuerza, como se muestra en la figura 4-15*b*. Esos vectores son

$$\mathbf{r}_A = \{5\mathbf{j}\} \text{ pie}$$

$$\mathbf{r}_B = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} \text{ pie}$$

Por lo tanto, el momento resultante con respecto a $O$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{R_O} &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_3 \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix} \\
&= [5(20) - 0(40)]\mathbf{i} - [0]\mathbf{j} + [0(40) - (5)(-60)]\mathbf{k} \\
&\quad + [5(-30) - (-2)(40)]\mathbf{i} - [4(-30) - (-2)(80)]\mathbf{j} + [4(40) - 5(80)]\mathbf{k} \\
&= \{30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 60\mathbf{k}\} \text{ lb} \cdot \text{pie}
\end{aligned}$$

***Resp.***

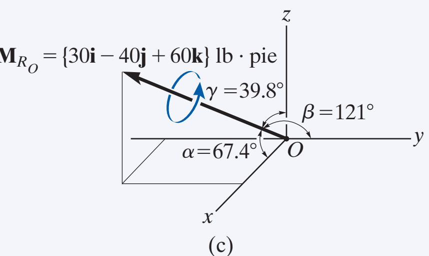



**Fig. 4-15**

**NOTA:** este resultado se presenta en la figura 4-15*c*. Los ángulos directores coordenados se determinaron a partir del vector unitario para $M_{R_O}$. Tenga en cuenta que las dos fuerzas tienden a ocasionar que la barra gire con respecto al eje de momento en la manera que muestra la flecha curva sobre el vector de momento.

4

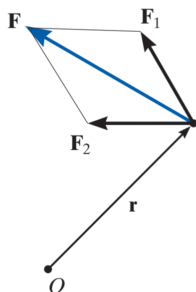



Fig 4-16

## 4.4 Principio de momentos

Un concepto que se usa a menudo en mecánica es el *principio de momentos*, al cual también se le llama a veces *teorema de Varignon* puesto que originalmente lo desarrolló el matemático francés Varignon (1654-1722). El principio establece que *el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto*. Este teorema puede probarse fácilmente por el producto cruz, puesto que dicho producto obedece la *ley distributiva*. Por ejemplo, considere los momentos de la fuerza **F** y dos de sus componentes respecto del punto $O$, figura 4-16. Como $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, tenemos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

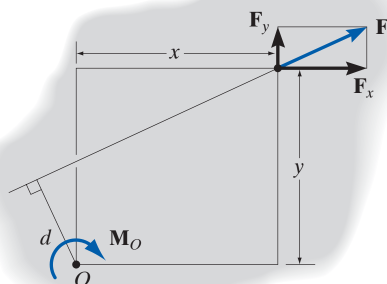
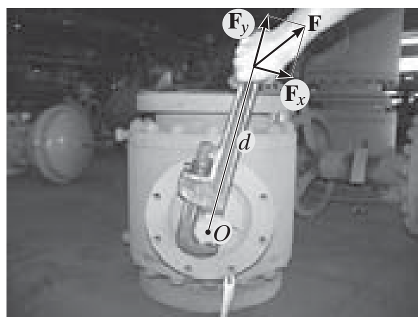



Fig. 4-17

Para problemas en dos dimensiones, figura 4-17, podemos usar el principio de momentos para descomponer la fuerza en sus componentes rectangulares y después determinar el momento con un análisis escalar. Así,

$$M_O = F_x y - F_y x$$

Por lo general, este método es más sencillo que determinar el mismo momento con $M_O = Fd$.



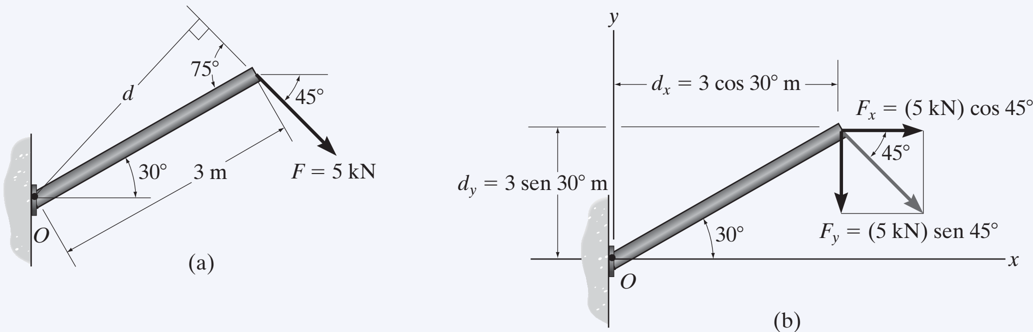

El momento de la fuerza aplicada **F** con respecto al punto $O$ es fácil de determinar si utilizamos el principio de momentos. Éste es simplemente $M_O = F_x d$.

### Puntos importantes

- El momento de una fuerza crea la tendencia de un cuerpo a girar con respecto a un eje que pasa por un punto específico $O$.
- Mediante la regla de la mano derecha, el sentido de rotación está indicado por la flexión de los dedos y el pulgar se dirige a lo largo del eje de momento, o línea de acción del momento.
- La magnitud del momento se determina mediante $M_O = Fd$, donde $d$ se denomina brazo de momento y representa la distancia perpendicular más corta desde el punto $O$ hasta la línea de acción de la fuerza.
- En tres dimensiones, se usa el producto cruz para determinar el momento, es decir, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Recuerde que **r** está dirigido *desde* el punto $O$ *hacia cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**.
- El principio de momentos establece que el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto. Éste es un método muy conveniente para usarlo en dos dimensiones.

## EJEMPLO 4.5

Determine el momento de la fuerza que se muestra en la figura 4-18*a* respecto del punto *O*.




### SOLUCIÓN I

El brazo de momento *d* en la figura 4-18*a* puede encontrarse por trigonometría.

$$d = (3 \text{ m}) \text{ sen } 75° = 2.898 \text{ m}$$

Así,

$$M_O = Fd = (5 \text{ kN})(2.898 \text{ m}) = 14.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como la fuerza tiende a rotar u orbitar en el sentido de las manecillas del reloj respecto del punto *O*, el momento está dirigido hacia dentro de la página.

### SOLUCIÓN II

En la figura 4-18*b* se indican las componentes *x* y *y* de la fuerza. Si consideramos los momentos en sentido contrario al de las manecillas del reloj como positivos, y aplicamos el principio de momentos, tenemos

$$\circlearrowleft + M_O = -F_x d_y - F_y d_x$$
$$= -(5 \cos 45° \text{ kN})(3 \text{ sen } 30° \text{ m}) - (5 \text{ sen } 45° \text{ kN})(3 \cos 30° \text{ m})$$
$$= -14.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = 14.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

### SOLUCIÓN III

Los ejes *x* y *y* pueden establecerse paralelos y perpendiculares al eje de la varilla como se muestra en la figura 4-18*c*. Aquí $\mathbf{F}_x$ no produce momento con respecto al punto *O* puesto que su línea de acción pasa a través de este punto. Por lo tanto,

$$\circlearrowleft + M_O = -F_y d_x$$
$$= -(5 \text{ sen } 75° \text{ kN})(3 \text{ m})$$
$$= -14.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = 14.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

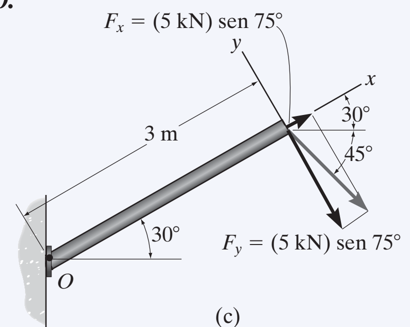



**Fig. 4-18**

4

4

## EJEMPLO 4.6

La fuerza **F** actúa en el extremo de la ménsula de la figura 4-19*a*. Determine el momento de la fuerza con respecto al punto *O*.



### SOLUCIÓN I *(ANÁLISIS ESCALAR)*

La fuerza se descompone en sus componentes *x* y *y* como se muestra en la figura 4-19*b*, entonces

$$\circlearrowleft +M_O = 400 \text{ sen } 30° \text{ N}(0.2 \text{ m}) - 400 \cos 30° \text{ N}(0.4 \text{ m})$$

$$= -98.6 \text{ N}\cdot\text{m} = 98.6 \text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright$$

o bien

$$\mathbf{M}_O = \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***



### SOLUCIÓN II *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

Si aplicamos un método vectorial cartesiano, los vectores de fuerza y posición mostrados en la figura 4-19*c* son

$$\mathbf{r} = \{0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{F} = \{400 \text{ sen } 30°\mathbf{i} - 400 \cos 30°\mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$= \{200.0\mathbf{i} - 346.4\mathbf{j}\} \text{ N}$$

Por lo tanto, el momento es

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 200.0 & -346.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + [0.4(-346.4) - (-0.2)(200.0)]\mathbf{k}$$

$$= \{-98.6\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

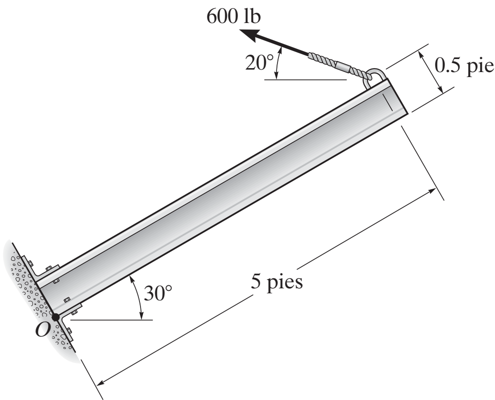


**Fig. 4-19**

**NOTA:** observe que el análisis escalar (solución I) proporciona un *método más conveniente* que la solución II, puesto que la dirección del momento y el brazo de momento para cada componente de fuerza son fáciles de establecer. Por consiguiente, suele recomendarse el uso de este método para resolver problemas bidimensionales, en tanto que el análisis vectorial cartesiano se recomienda sólo para resolver problemas tridimensionales.

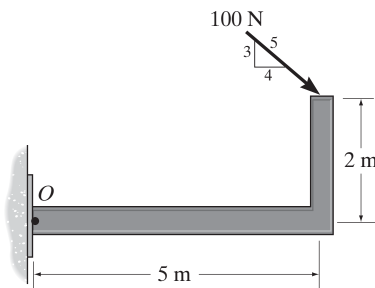
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F4-1.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.



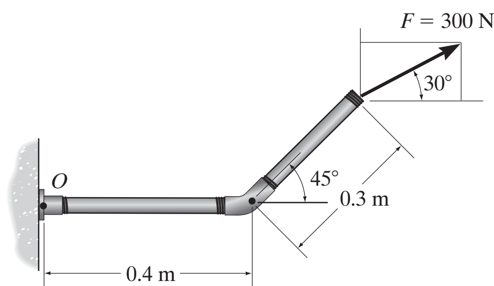

**F4-1**

**F4-2.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.



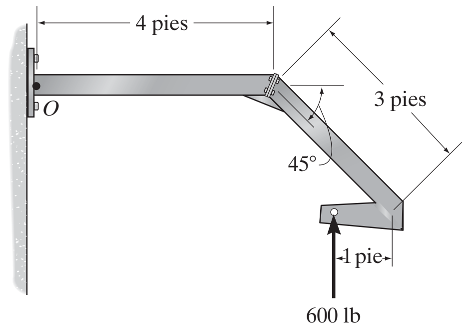

**F4-2**

**F4-3.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.



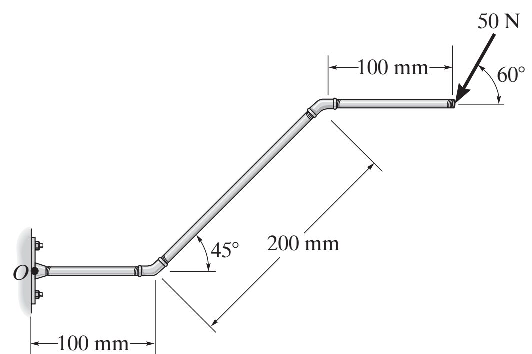

**F4-3**

**F4-4.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.



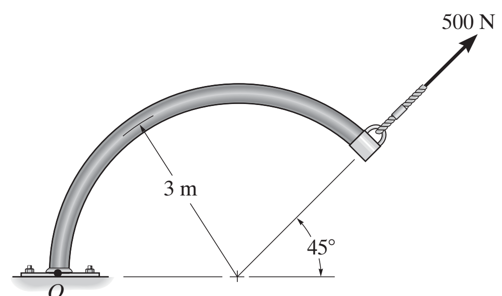

**F4-4**

**F4-5.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$. No tome en cuenta el grosor del elemento.



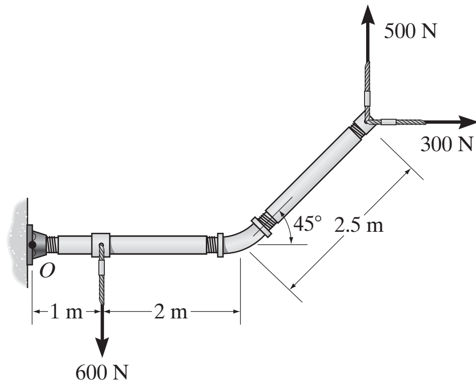

**F4-5**

**F4-6.** Determine el momento de la fuerza con respecto al punto $O$.



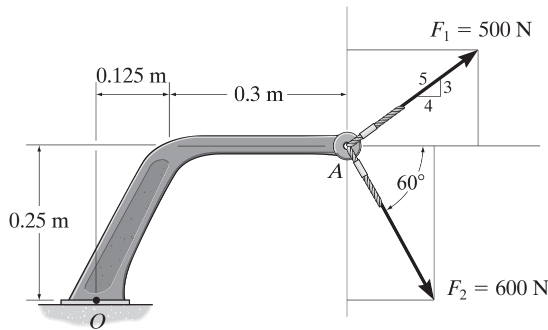

**F4-6**

**F4-7.** Determine el momento resultante producido por las fuerzas con respecto al punto $O$.



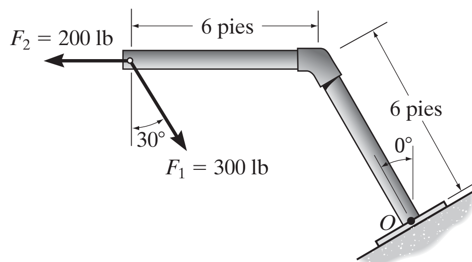

F4-7

**F4-8.** Determine el momento resultante producido por las fuerzas con respecto al punto $O$.



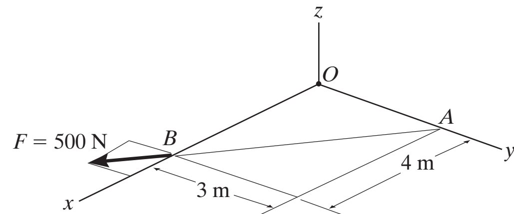

F4-8

**F4-9.** Determine el momento resultante producido por las fuerzas con respecto al punto $O$.



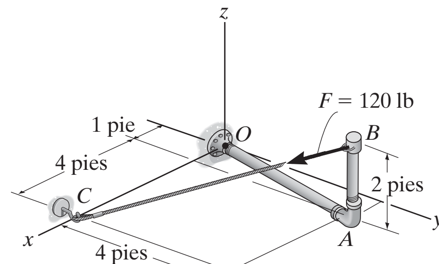

F4-9

**F4-10.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto al punto $O$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



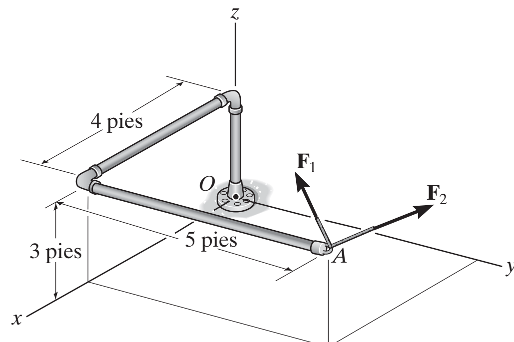

F4-10

**F4-11.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto al punto $O$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




F4-11

**F4-12.** Si $\mathbf{F}_1 = \{100\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 75\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{-200\mathbf{i} + 250\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}$ lb, determine el momento resultante producido por estas fuerzas con respecto al punto $O$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




F4-12

## PROBLEMAS

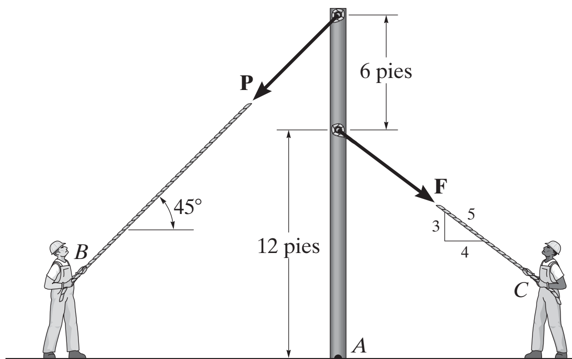
•**4-1.** Si **A**, **B** y **D** son vectores dados, demuestre la ley distributiva para el producto cruz, es decir, que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$.

**4-2.** Demuestre la identidad del triple producto escalar. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

**4-3.** Dados los tres vectores no nulos **A**, **B** y **C**, demuestre que si $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0$, los tres vectores *deben* encontrarse en el mismo plano.

*__4-4.__ Dos hombres ejercen fuerzas de $F = 80$ lb y $P = 50$ lb sobre las cuerdas. Determine el momento de cada fuerza respecto de $A$. ¿De qué forma girará el poste, en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario?

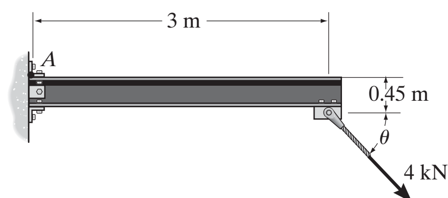
•**4-5.** Si el hombre en $B$ ejerce una fuerza de $P = 30$ lb sobre su cuerda, determine la magnitud de la fuerza **F** que el hombre en $C$ debe ejercer para evitar que el poste gire, es decir, de manera que el momento resultante de ambas fuerzas con respecto a $A$ sea cero.




**Probs. 4-4/5**

**4-6.** Si $\theta = 45°$, determine el momento producido por la fuerza de 4 kN respecto del punto $A$.

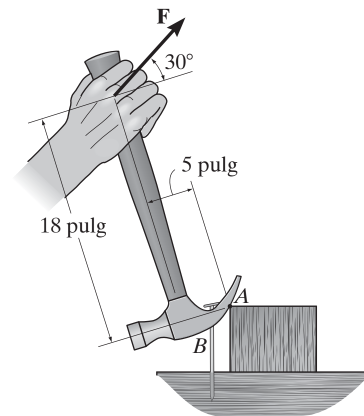
**4-7.** Si el momento producido por la fuerza de 4 kN respecto al punto $A$ es de 10 kN · m en el sentido de las manecillas del reloj, determine el ángulo $\theta$, donde $0° \leq \theta \leq 90°$.




**Probs. 4-6/7**

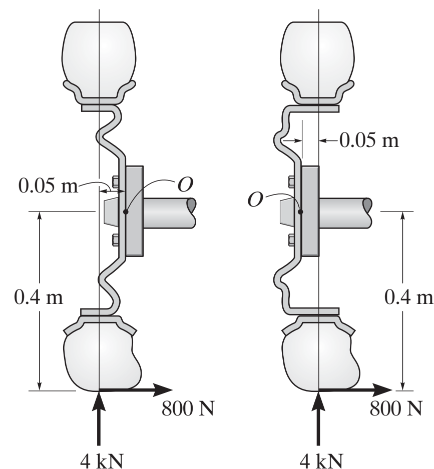
*__4-8.__ El mango del martillo está sometido a la fuerza de $F = 20$ lb. Determine el momento de esta fuerza respecto del punto $A$.

•**4-9.** Para poder sacar el clavo en $B$, la fuerza **F** ejercida sobre el mango del martillo debe producir un momento en el sentido de las manecillas del reloj de 500 lb · pulg respecto del punto $A$. Determine la magnitud requerida de la fuerza **F**.




**Probs. 4-8/9**

**4-10.** El cubo de la rueda se puede unir al eje con excentricidad negativa (izquierda) o positiva (derecha). Si la llanta está sometida a cargas normal y radial como las que se muestran en la figura, determine en ambos casos el momento resultante de esas cargas con respecto al punto $O$ localizado sobre el eje.

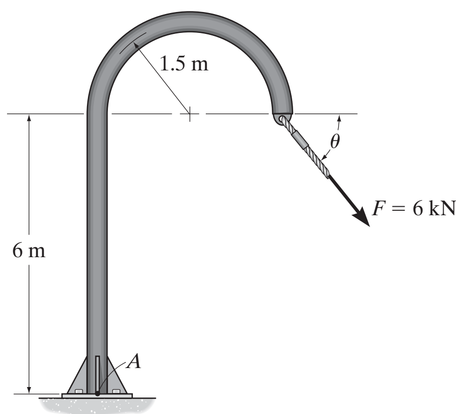



**Prob. 4-10**

**4-11.** El elemento está sometido a una fuerza de $F = 6$ kN. Si $\theta = 45°$, determine el momento producido por **F** respecto al punto $A$.

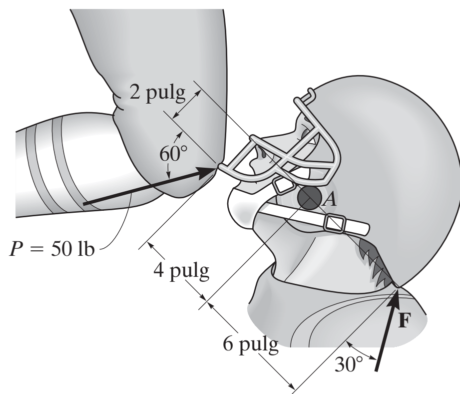
*__4-12.__ Determine el ángulo $\theta$ ($0° \leq \theta \leq 180°$) de la fuerza **F** de manera que produzca un momento máximo y un momento mínimo respecto al punto $A$. Además encuentre cuáles son las magnitudes de estos momentos máximo y mínimo.

•**4-13.** Determine el momento producido por la fuerza **F** respecto al punto $A$ en términos del ángulo $\theta$. Trace la gráfica de $M_A$ contra $\theta$, donde $0° \leq \theta \leq 180°$.




**Probs. 4-11/12/13**

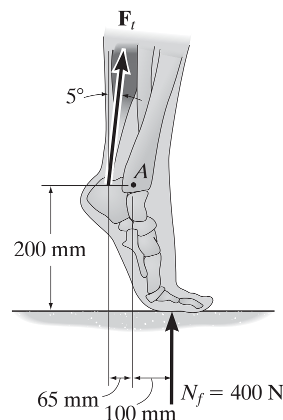
**4-14.** Cuando un jugador de fútbol americano recibe un golpe en la protección facial de su casco, como se muestra en la figura, puede sufrir lesiones graves de cuello al activarse un mecanismo de guillotina. Determine el momento de la fuerza de la rodilla $P = 50$ lb respecto del punto $A$. ¿Cuál sería la magnitud de la fuerza **F** del cuello, de manera que hubiera un momento con respecto a $A$ que equilibrara las fuerzas?




**Prob. 4-14**

**4-15.** La fuerza del tendón de Aquiles de $F_t = 650$ N se activa cuando el hombre trata de pararse sobre los dedos de sus pies. Cuando hace esto, cada uno de sus pies está sometido a una fuerza reactiva de $N_f = 400$ N. Determine el momento resultante de $\mathbf{F}_t$ y $\mathbf{N}_f$ con respecto a la unión del tobillo $A$.

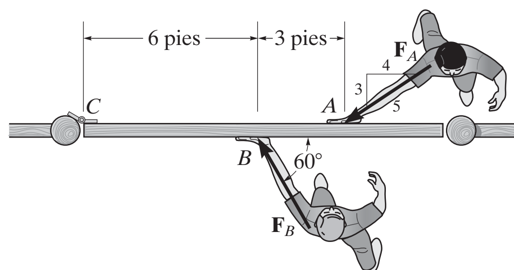
*__4-16.__ La fuerza del tendón de Aquiles $\mathbf{F}_t$ se activa cuando el hombre trata de pararse sobre los dedos de sus pies. Cuando hace esto, cada uno de sus pies está sometido a una fuerza reactiva de $N_t = 400$ N. Si el momento resultante producido por las fuerzas $\mathbf{F}_t$ y $\mathbf{N}_t$ con respecto a la unión del tobillo $A$ debe ser cero, determine la magnitud de $\mathbf{F}_t$.




**Probs. 4-15/16**

•**4-17.** Los dos muchachos empujan la reja con fuerzas de $F_A = 30$ lb y $F_B = 50$ lb como se muestra en la figura. Determine el momento de cada fuerza con respecto a $C$. ¿En qué forma girará la reja, en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario? No considere el espesor de la reja.

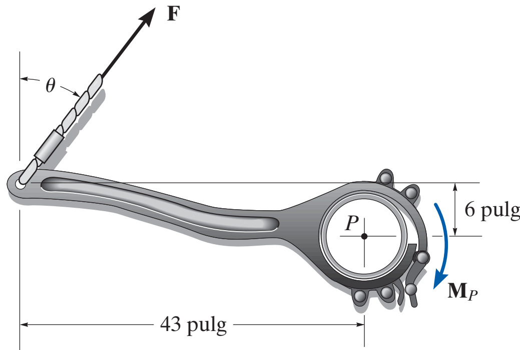
**4-18.** Dos muchachos empujan la reja como se muestra en la figura. Si el muchacho situado en $B$ ejerce una fuerza de $F_B = 30$ lb, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_A$ que el ubicado en $A$ debe ejercer para impedir que la reja gire. No considere el espesor de la reja.




**Probs. 4-17/18**

**4-19.** Las tenazas se usan para apretar los extremos del tubo de perforación $P$. Determine el par de torsión (momento) $M_P$ que la fuerza aplicada $F = 150$ lb ejerce sobre el tubo con respecto al punto $P$ como una función de $\theta$. Grafique este momento $M_P$ contra $\theta$ para $0 \leq \theta \leq 90°$.

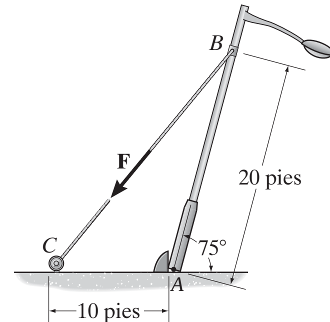
***4-20.** Las tenazas se usan para apretar los extremos del tubo de perforación $P$. Si se requiere un par de torsión (momento) con $M_P = 800$ lb · pie en $P$ para hacer girar el tubo, determine la fuerza $F$ del cable que debe aplicarse a las tenazas. Establezca que $\theta = 30°$.




Probs. 4-19/20

***4-24.** Para levantar el poste de alumbrado desde la posición mostrada, se aplica la fuerza **F** al cable. Si $F = 200$ lb, determine el momento producido por **F** con respecto al punto $A$.

**•4-25.** Para levantar el poste de alumbrado desde la posición mostrada, la fuerza **F** sobre el cable debe crear un momento con sentido contrario al de las manecillas del reloj de 1500 lb · pie con respecto al punto $A$. Determine la magnitud de **F** que debe aplicarse al cable.

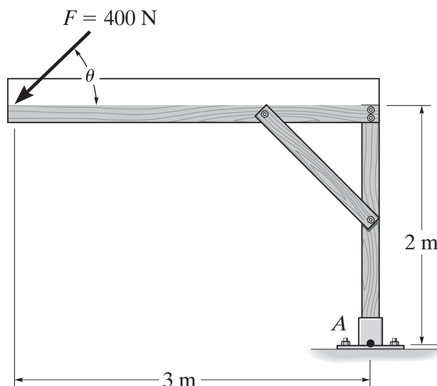



Probs. 4-24/25

**•4-21.** Determine la dirección $\theta$ para $0° \leq \theta \leq 180°$ de la fuerza **F**, de manera que produzca el momento máximo respecto al punto $A$. Calcule este momento.

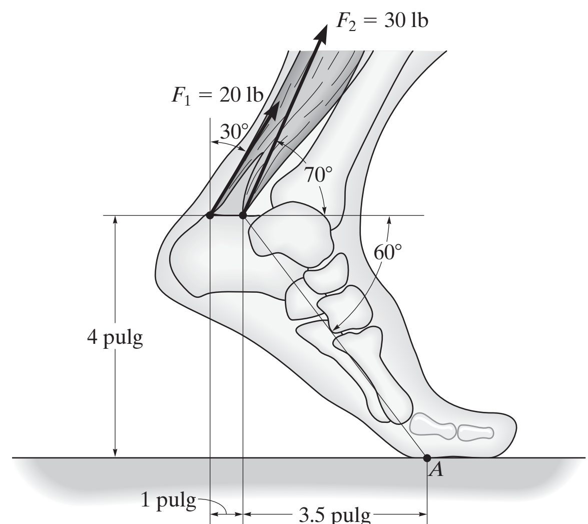
**4.22.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto al punto $A$ como una función de $\theta$. Grafique los resultados de $M$ (ordenada) contra $\theta$ (abscisa) para $0° \leq \theta \leq 180°$.

**4-23.** Determine el momento mínimo producido por la fuerza **F** respecto al punto $A$. Especifique el ángulo $\theta$ $(0° \leq \theta \leq 180°)$.




Probs. 4-21/22/23

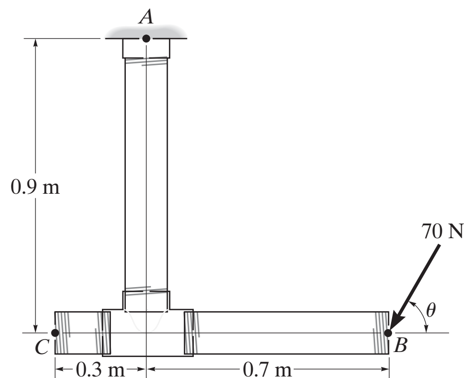
**4-26.** El segmento de pie está sometido al jalón de dos músculos flectores. Determine el momento de cada fuerza con respecto al punto de contacto $A$ sobre el suelo.




Prob. 4-26

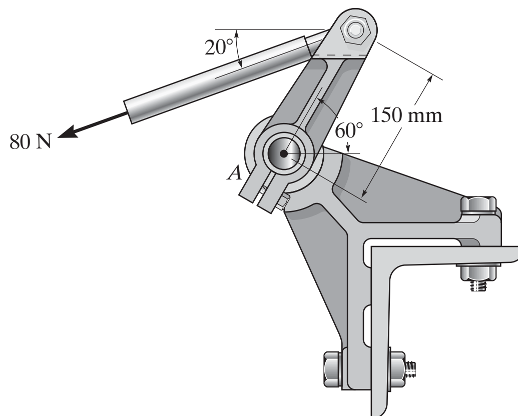
**4-27.** La fuerza de 70 N actúa sobre el extremo del tubo en $B$. Determine ($a$) el momento de esta fuerza con respecto al punto $A$ y ($b$) la magnitud y la dirección de una fuerza horizontal aplicada en $C$, que produce el mismo momento. Considere que $\theta = 60°$.

*__4-28.__ La fuerza de 70 N actúa sobre el extremo del tubo en $B$. Determine los ángulos $\theta$ ($0° \leq \theta \leq 180°$) de la fuerza que producirá los momentos máximo y mínimo respecto al punto $A$. ¿Cuáles son las magnitudes de estos momentos?




**Probs. 4-27/28**

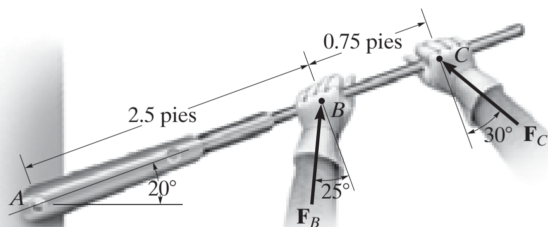
**4-31.** La varilla del mecanismo de control de potencia para un avión ejecutivo, está sometida a una fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al cojinete en $A$.




**Prob. 4-31**

•**4-29.** Determine el momento de cada fuerza con respecto al perno localizado en $A$. Considere $F_B$ = 40 lb, $F_C$ = 50 lb.

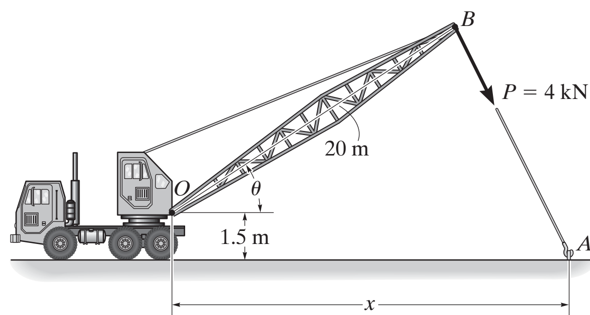
**4-30.** Si $F_B$ = 30 lb y $F_C$ = 45 lb, determine el momento resultante con respecto al perno localizado en $A$.




**Probs. 4-29/30**

*__4-32.__ El cable de remolque ejerce una fuerza de $P$ = 4 kN en el extremo del aguilón de 20 m de longitud de la grúa mostrada. Si $\theta = 30°$, determine la posición $x$ del gancho en $A$ de modo que esta fuerza produzca un momento máximo con respecto al punto $O$. ¿Qué valor tiene este momento?

•**4-33.** El cable de remolque ejerce una fuerza de $P$ = 4 kN en el extremo del aguilón de 20 m de longitud de la grúa mostrada. Si $x$ = 25 m, determine la posición $\theta$ del aguilón de modo que se produzca un momento máximo con respecto al punto $O$. ¿Qué valor tiene este momento?

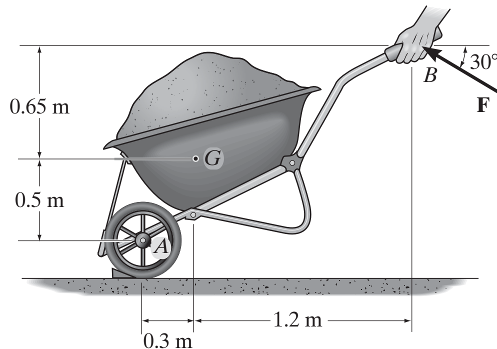



**Probs. 4-32/33**

**4-34.** Con el propósito de sostener la carretilla en la posición mostrada, la fuerza **F** debe producir un momento con sentido inverso al de las manecillas del reloj de 200 N · m con respecto al eje *A*. Determine la magnitud requerida de la fuerza **F**.

**4-35.** La carretilla y su contenido tienen una masa de 50 kg y un centro de masa en *G*. Si el momento resultante producido por la fuerza **F** y el peso con respecto al punto *A* debe ser igual a cero, determine la magnitud requerida de la fuerza **F**.

*__4-36.__ La carretilla y su contenido tienen una masa de 50 kg y un centro de masa en *G*. Si $F = 100$ N y el momento resultante producido por la fuerza **F** y el peso con respecto al eje en *A* es igual a cero, determine la masa de la carretilla y su contenido.

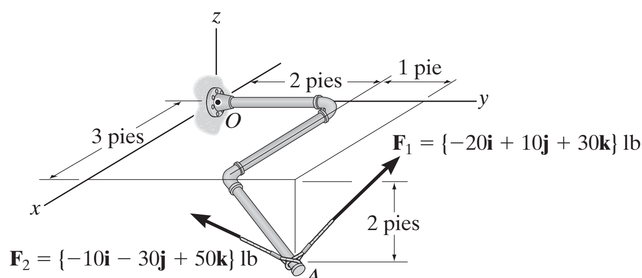



**Probs. 4-34/35/36**

•**4-37.** Determine el momento producido por $\mathbf{F}_1$ respecto del punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**4-38.** Determine el momento producido por $\mathbf{F}_2$ respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**4-39.** Determine el momento resultante producido por las dos fuerzas respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

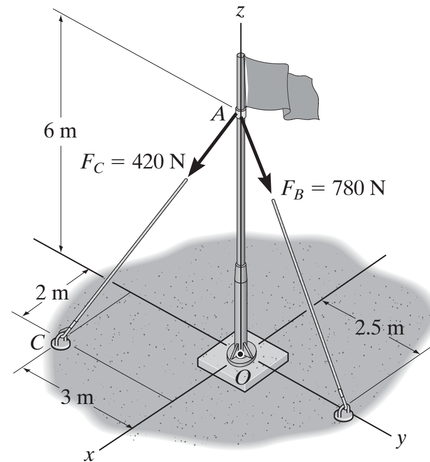



**Probs. 4-37/38/39**

*__4-40.__ Determine el momento producido por la fuerza $\mathbf{F}_B$ respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

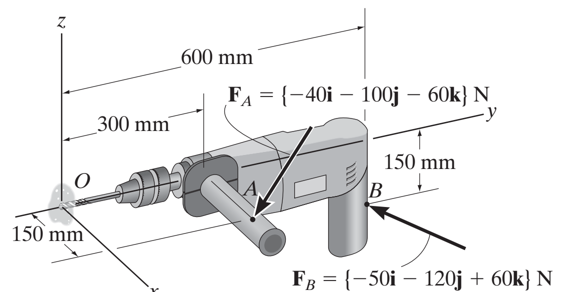
•**4-41.** Determine el momento producido por $\mathbf{F}_C$ respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**4-42.** Determine el momento resultante producido por las fuerzas $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ respecto al punto *O*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Probs. 4-40/41/42**

**4-43.** Determine el momento producido por cada fuerza respecto del punto *O* localizado sobre la punta del taladro. Exprese los resultados como vectores cartesianos.

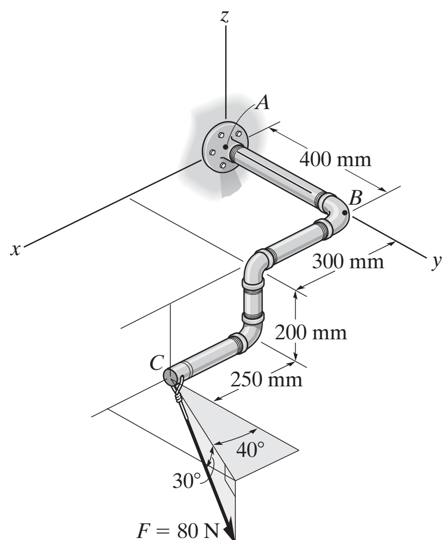



**Prob. 4-43**

*__4-44.__ Una fuerza de $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\}$ kN produce un momento de $\mathbf{M}_O = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 14\mathbf{k}\}$ kN · m respecto al origen de coordenadas, el punto *O*. Si la fuerza actúa en un punto que tiene una coordenada *x* de $x = 1$ m, determine las coordenadas *y* y *z*.

**•4-45.** El ensamble de tubos está sometido a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto $A$.

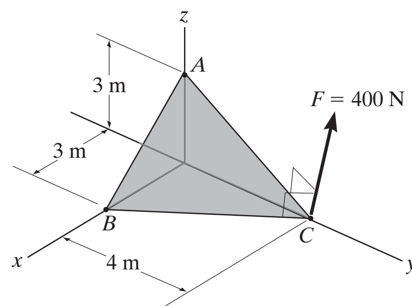
**4-46.** El ensamble de tubos está sometido a la fuerza de 80 N. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto $B$.




**Probs. 4-45/46**

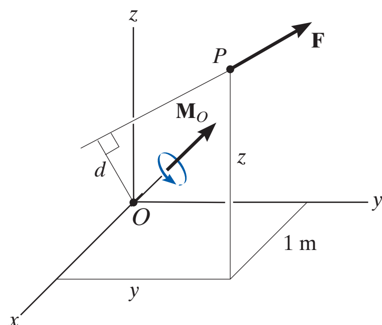
***4-48.** La fuerza **F** actúa en forma perpendicular al plano inclinado. Determine el momento producido por **F** con respecto al punto $A$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**•4-49.** La fuerza **F** actúa en forma perpendicular al plano inclinado. Determine el momento producido por **F** con respecto al punto $B$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



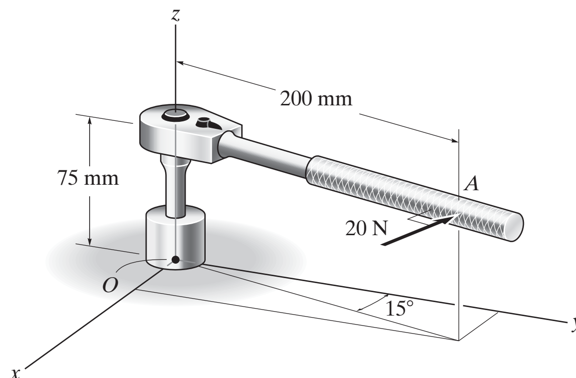

**Probs. 4-48/49**

**4-47.** La fuerza $\mathbf{F} = \{6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}$ N produce un momento con respecto al punto $O$ de $\mathbf{M}_O = \{-14\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ N · m. Si esta fuerza pasa por un punto que tiene una coordenada $x$ de 1 m, determine las coordenadas $y$ y $z$ del punto. Además, teniendo en cuenta que $M_O = Fd$, determine la distancia perpendicular $d$ desde el punto $O$ hasta la línea de acción de **F**.



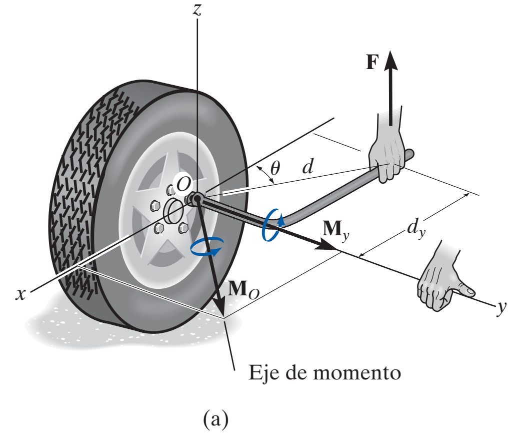

**Prob. 4-47**

**4-50.** Al maneral de la llave de torsión se aplica una fuerza horizontal de 20 N en forma perpendicular. Determine la magnitud y los ángulos directores coordenados del momento producido por esta fuerza con respecto al punto $O$.




**Prob. 4-50**

# 4.5 Momento de una fuerza con respecto a un eje específico



(a)

**Fig. 4-20**

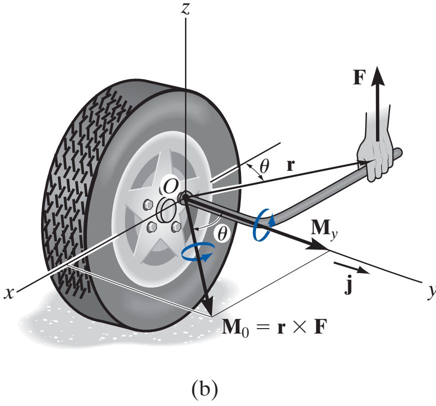
En ocasiones debe determinarse el momento producido por una fuerza con respecto a un *eje específico*. Por ejemplo, suponga que hay que aflojar la tuerca del punto $O$ de la llanta de automóvil que se muestra en la figura 4-20*a*. La fuerza aplicada a la llave producirá una tendencia a que ésta y la tuerca giren en torno al *eje de momento* que pasa por $O$; sin embargo, la tuerca sólo puede girar alrededor del eje $y$. Por lo tanto, para determinar el efecto de giro, sólo se necesita la componente $y$ del momento, y el momento total producido no es importante. Para determinar esta componente, podemos usar un análisis escalar o vectorial.

**Análisis escalar.** Para usar un análisis escalar en el caso de la tuerca de la figura 4-20*a*, el brazo de momento o distancia perpendicular desde el eje hasta la línea de acción de la fuerza es $d_y = d \cos \theta$. Así, el momento de **F** respecto al eje $y$ es $M_y = F\,d_y = F(d \cos \theta)$. De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\mathbf{M}_y$ está dirigido a lo largo del eje $y$ positivo como se muestra en la figura. En general, para cualquier eje $a$, el momento es

$$M_a = Fd_a \tag{4-10}$$




Si tiene un largo suficiente, la fuerza del cable **F** sobre el aguilón de esta grúa puede hacer que la grúa se voltee. Para investigar esto, el momento de la fuerza debe calcularse con respecto a un eje que pasa por la base de las piernas en $A$ y $B$.




(b)

**Fig. 4-20**

4

**Análisis vectorial.** Para encontrar el momento de la fuerza **F** en la figura 4-20*b* con respecto al eje *y* por medio de un análisis vectorial, primero debemos determinar el momento de la fuerza con respecto a *cualquier punto O* sobre el eje *y*, y aplicar la ecuación 4-7, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La componente $\mathbf{M}_y$ a lo largo del eje *y* es la *proyección* de $\mathbf{M}_O$ sobre el eje *y*. Ésta puede encontrarse usando el *producto punto* analizado en el capítulo 2, de manera que $M_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde **j** es el vector unitario para el eje *y*.

Este método puede generalizarse considerando que $\mathbf{u}_a$ es el vector unitario que especifica la dirección del eje *a* mostrada en la figura 4-21. Después, el momento de **F** con respecto al eje es $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Esta combinación se denomina *triple producto escalar*. Si los vectores se escriben en su forma cartesiana, tenemos

$$M_a = [u_{a_x}\mathbf{i} + u_{a_y}\mathbf{j} + u_{a_z}\mathbf{k}] \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= u_{a_x}(r_yF_z - r_zF_y) - u_{a_y}(r_xF_z - r_zF_x) + u_{a_z}(r_xF_y - r_yF_x)$$

Este resultado también se puede escribir en la forma de un determinante, con lo que es más fácil memorizarlo.*

$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (4\text{-}11)$$

donde

$u_{ax}, u_{ay}, u_{az}$ representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector unitario que define la dirección del eje *a*

$r_x, r_y, r_z$ representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector de posición trazado desde *cualquier punto O* sobre el eje *a* hacia *cualquier punto A* sobre la línea de acción de la fuerza

$F_x, F_y, F_z$ representan las componentes *x*, *y*, *z* del vector fuerza

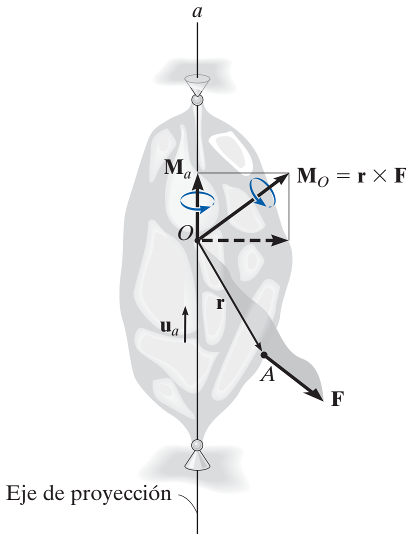



**Fig. 4-21**

Cuando $M_a$ sea evaluado con la ecuación 4-11, generará un escalar positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido de dirección de $\mathbf{M}_a$ a lo largo del eje *a*. Si es positivo, entonces $\mathbf{M}_a$ tendrá el mismo sentido que $\mathbf{u}_a$, mientras que si es negativo $\mathbf{M}_a$ actuará en sentido opuesto a $\mathbf{u}_a$.

Una vez determinado $M_a$, podemos expresar $\mathbf{M}_a$ como un vector cartesiano, a saber,

$$\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a \qquad (4\text{-}12)$$

Los ejemplos siguientes ilustran aplicaciones numéricas de los conceptos descritos en esta sección.

*Tome un momento para desarrollar esta determinante, a fin de demostrar que producirá el resultado presentado.

## Puntos importantes

- El momento de una fuerza con respecto a un eje específico puede determinarse siempre que la distancia perpendicular $d_a$ desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje pueda ser determinada. $M_a = Fd_a$.
- Si se usa el análisis vectorial, $M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde $\mathbf{u}_a$ define la dirección del eje y $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje hasta *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza.
- Si $M_a$ se calcula como un escalar negativo, entonces el sentido de dirección de $\mathbf{M}_a$ es opuesto a $\mathbf{u}_a$.
- El momento $\mathbf{M}_a$ expresado como un vector cartesiano se determina a partir de $\mathbf{M}_a = M_a\mathbf{u}_a$.

4

## EJEMPLO 4.7

Determine el momento resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura 4-22 con respecto al eje $x$, al eje $y$ y al eje $z$.

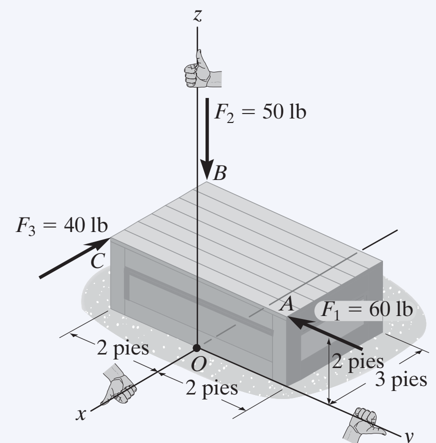



**Fig. 4-22**

### SOLUCIÓN

Una fuerza que es *paralela* a un eje coordenado o tiene una línea de acción que pasa por el eje *no* produce ningún momento o tendencia a girar alrededor de ese eje. Por lo tanto, al definir la dirección positiva del momento de una fuerza de acuerdo con la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura, tenemos

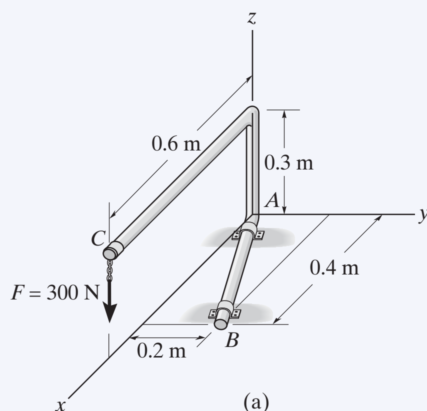
$$M_x = (60 \text{ lb})(2 \text{ pies}) + (50 \text{ lb})(2 \text{ pies}) + 0 = 220 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$M_y = 0 - (50 \text{ lb})(3 \text{ pies}) - (40 \text{ lb})(2 \text{ pies}) = -230 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$M_z = 0 + 0 - (40 \text{ lb})(2 \text{ pies}) = -80 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Los signos negativos indican que $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ actúan en las direcciones $-y$ y $-z$, respectivamente.

## EJEMPLO 4.8



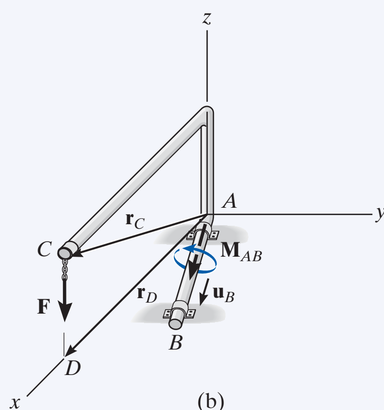




**Fig. 4-23**

Determine el momento $\mathbf{M}_{AB}$ producido por la fuerza $\mathbf{F}$ que se muestra en la figura 4-23*a*, la cual tiende a girar la barra con respecto al eje *AB*.

### SOLUCIÓN

Para encontrar la solución, se considerará un análisis vectorial si usamos $M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ en vez de encontrar el brazo de momento o la distancia perpendicular desde la línea de acción de $\mathbf{F}$ hasta el eje *AB*. Ahora se identificará cada uno de los términos presentes en la ecuación.

El vector unitario $\mathbf{u}_B$ define la dirección del eje *AB* de la barra, figura 4-23*b*, donde

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (0.2\text{ m})^2}} = 0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}$$

El vector $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje *AB* hacia *cualquier punto* sobre la línea de acción de la fuerza. Por ejemplo, los vectores de posición $\mathbf{r}_C$ y $\mathbf{r}_D$ son los adecuados, figura 4-23*b*. (Aunque no se muestran en la figura, también se pueden usar $\mathbf{r}_{BC}$ o $\mathbf{r}_{BD}$.) Por simplicidad, seleccionamos $\mathbf{r}_D$, donde

$$\mathbf{r}_D = \{0.6\mathbf{i}\}\text{ m}$$

La fuerza es

$$\mathbf{F} = \{-300\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Al sustituir estos vectores en la forma de determinante, y desarrollarlos tenemos

$$M_{AB} = \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= 0.8944[0(-300) - 0(0)] - 0.4472[0.6(-300) - 0(0)] + 0[0.6(0) - 0(0)]$$

$$= 80.50\text{ N}\cdot\text{m}$$

Este resultado positivo indica que el sentido de $\mathbf{M}_{AB}$ es en la misma dirección que $\mathbf{u}_B$.

Al expresar $\mathbf{M}_{AB}$ como un vector cartesiano resulta,

$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_B = (80.50\text{ N}\cdot\text{m})(0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j})$$
$$= \{72.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j}\}\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

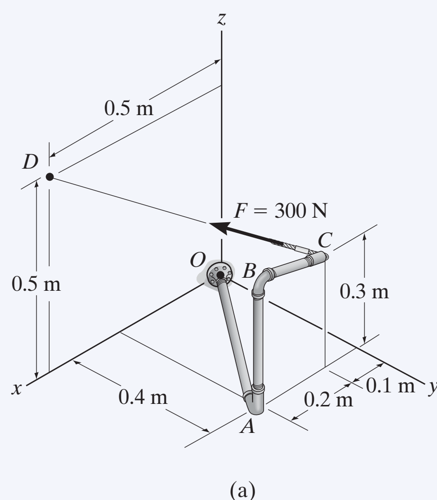
El resultado se muestra en la figura 4-23*b*.

**NOTA:** si el eje *AB* se define con un vector unitario dirigido desde *B* hacia *A*, entonces en la formulación anterior tendría que haberse usado $-\mathbf{u}_B$. Esto conduciría a $M_{AB} = -80.50\text{ N}\cdot\text{m}$. En consecuencia, $\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}(-\mathbf{u}_B)$, y se obtendría el mismo resultado.

4

## EJEMPLO 4.9

Determine la magnitud del momento de la fuerza **F** con respecto al segmento *OA* del ensamble de tubos que se muestra en la figura 4-24*a*.




(a)

### SOLUCIÓN

El momento de **F** con respecto al eje *OA* se determina a partir de $M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$, donde **r** es un vector de posición que se extiende desde cualquier punto sobre el eje *OA* hasta cualquier punto sobre la línea de acción de **F**. Como se indica en la figura 4-24*b*, es posible usar $\mathbf{r}_{OD}$, $\mathbf{r}_{OC}$, $\mathbf{r}_{AD}$ o $\mathbf{r}_{AC}$; sin embargo, aquí se considerará $\mathbf{r}_{OD}$ porque esto simplificará los cálculos.

El vector unitario $\mathbf{u}_{OA}$, que especifica la dirección del eje *OA*, es

$$\mathbf{u}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{\{0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.3\text{ m})^2 + (0.4\text{ m})^2}} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$$

y el vector de posición $\mathbf{r}_{OD}$ es

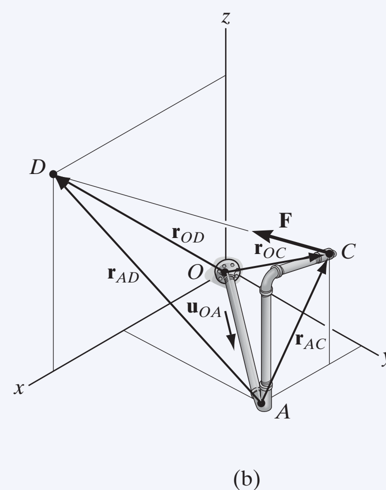
$$\mathbf{r}_{OD} = \{0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{k}\}\text{ m}$$

La fuerza **F** expresada como un vector cartesiano es

$$\mathbf{F} = F\left(\frac{\mathbf{r}_{CD}}{r_{CD}}\right)$$

$$= (300\text{ N})\left[\frac{\{0.4\mathbf{i} - 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}\}\text{ m}}{\sqrt{(0.4\text{ m})^2 + (-0.4\text{ m})^2 + (0.2\text{ m})^2}}\right]$$

$$= \{200\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}\text{ N}$$




(b)

**Fig. 4-24**

Por lo tanto,

$$M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot (\mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F})$$

$$= \begin{vmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 200 & -200 & 100 \end{vmatrix}$$

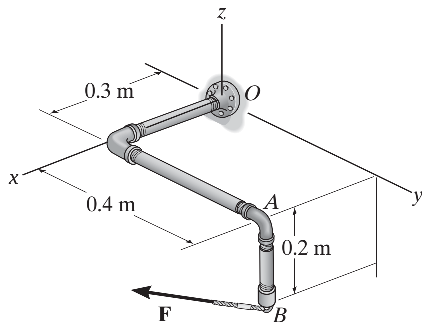
$$= 0.6[0(100) - (0.5)(-200)] - 0.8[0.5(100) - (0.5)(200)] + 0$$

$$= 100\text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

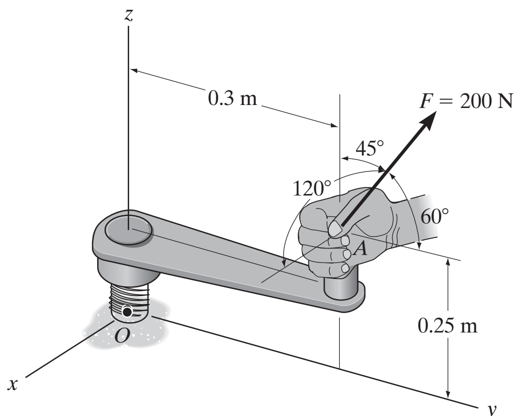
**F4-13.** Determine la magnitud del momento de la fuerza $\mathbf{F} = \{300\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 150\mathbf{k}\}$ N con respecto al eje $x$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

**F4-14.** Determine la magnitud del momento de la fuerza $\mathbf{F} = \{300\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 150\mathbf{k}\}$ N con respecto al eje $OA$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



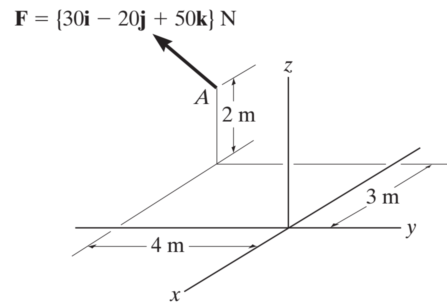

F4-13/14

**F4-15.** Determine la magnitud del momento de la fuerza de 200 N con respecto al eje $x$.



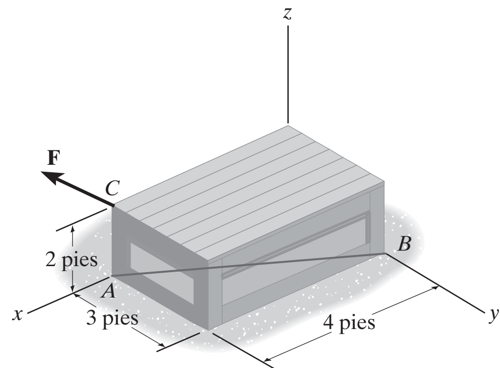

F4-15

**F4-16.** Determine la magnitud del momento de la fuerza con respecto al eje $y$.



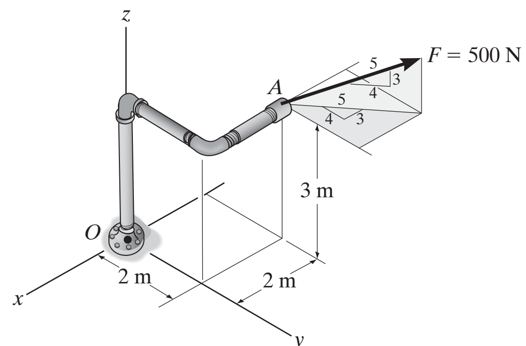

F4-16

**F4-17.** Determine el momento de la fuerza $\mathbf{F} = \{50\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\}$ lb con respecto al eje $AB$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




F4-17

**F4-18.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$. Utilice un análisis escalar.

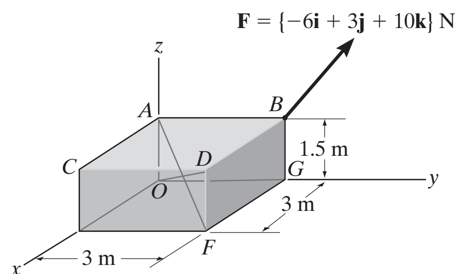



F4-18

## PROBLEMAS

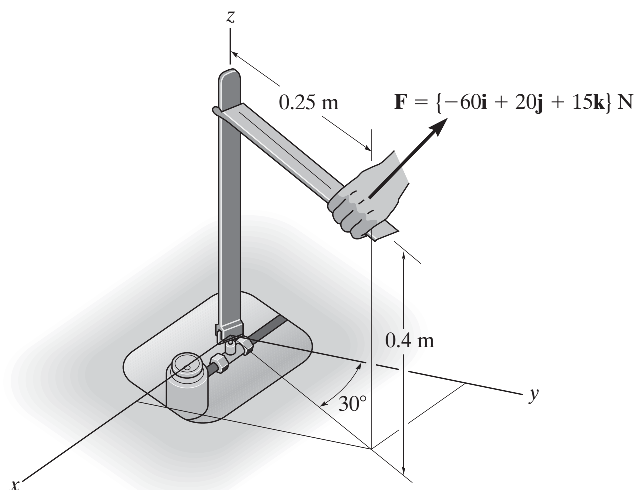
**4-51.** Determine el momento producido por la fuerza **F** con respecto a la diagonal *AF* del bloque rectangular. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

*__4-52.__ Determine el momento producido por la fuerza **F** con respecto a la diagonal *OD* del bloque rectangular. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Probs. 4-51/52**

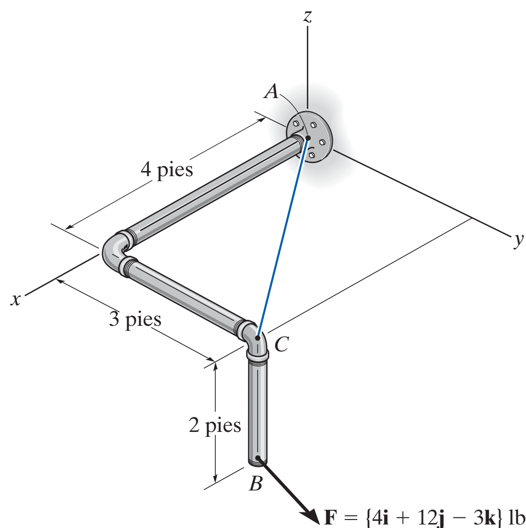
•**4-53.** La herramienta se utiliza para cerrar las válvulas de gas con acceso difícil. Si se aplica la fuerza **F** a la manija, determine la componente del momento creado con respecto al eje *z* de la válvula.




**Prob. 4-53**

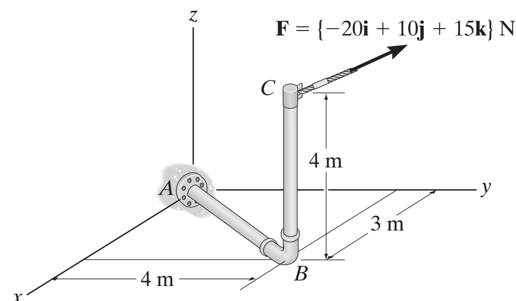
**4-54.** Determine la magnitud de los momentos de la fuerza **F** con respecto a los ejes *x*, *y*, *z*. Resuelva el problema (*a*) mediante un método vectorial cartesiano, y (*b*) con un método escalar.

**4-55.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto a un eje que pasa por *A* y *C*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Probs. 4-54/55**

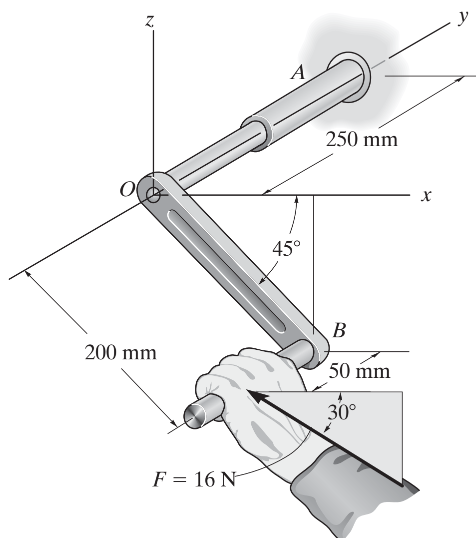
*__4-56.__ Determine el momento producido por la fuerza **F** con respecto al segmento *AB* del ensamble de tubos *AB*. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Prob. 4-56**

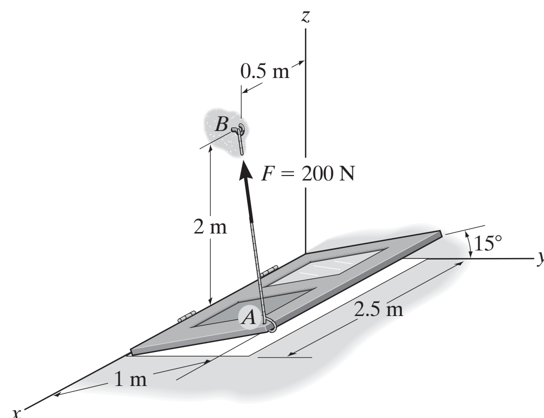
4

•**4-57.** Determine la magnitud del momento que ejerce la fuerza **F** con respecto al eje *y* de la flecha. Resuelva el problema con un método vectorial cartesiano y después con un método escalar.




**Prob. 4-57**

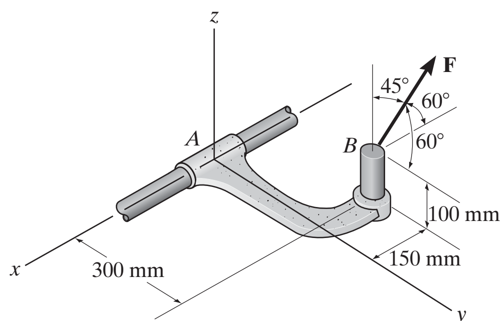
*__4-60.__ Determine la magnitud del momento producido por la fuerza de $F = 200$ N con respecto al eje que contiene las bisagras de la puerta (el eje *x*).




**Prob. 4-60**

**4-58.** Si $F = 450$ N, determine la magnitud del momento producido por esta fuerza con respecto al eje *x*.

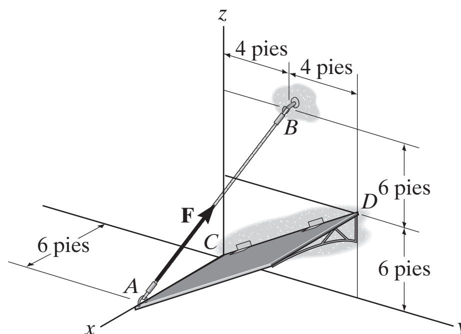
**4-59.** La fricción en el manguito *A* puede proporcionar un momento de resistencia máximo de 125 N · m con respecto al eje *x*. Determine la magnitud máxima de la fuerza **F** que puede aplicarse de manera que el soporte no gire.




**Probs. 4-58/59**

•**4-61.** Si la tensión en el cable es $F = 140$ lb, determine la magnitud del momento producido por esta fuerza con respecto al eje articulado *CD*, del panel

**4-62.** Determine la magnitud de la fuerza **F** en el cable *AB* a fin de producir un momento de 500 lb · pie con respecto al eje articulado *CD*, lo cual es necesario para mantener al panel en la posición mostrada.

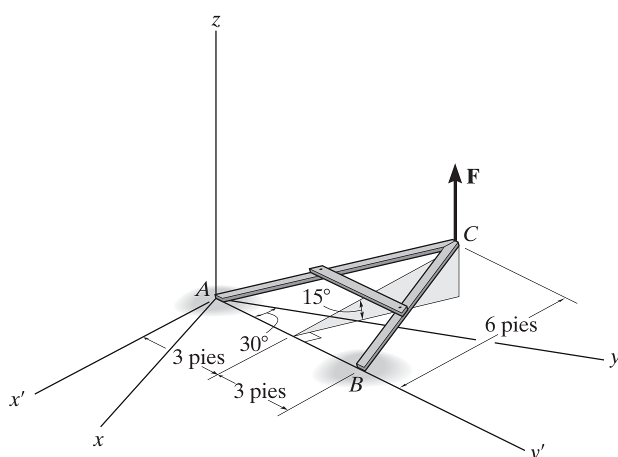



**Probs. 4-61/62**

**4-63.** Se levanta el marco en forma de A a una posición perpendicular mediante la fuerza vertical de $F = 80$ lb. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje $y'$ que pasa por los puntos $A$ y $B$ cuando el marco está en la posición mostrada.

*__4-64.__ Se levanta el marco en forma de A a una posición perpendicular mediante la fuerza vertical de $F = 80$ lb. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje $x$ cuando el marco está en la posición que se muestra.

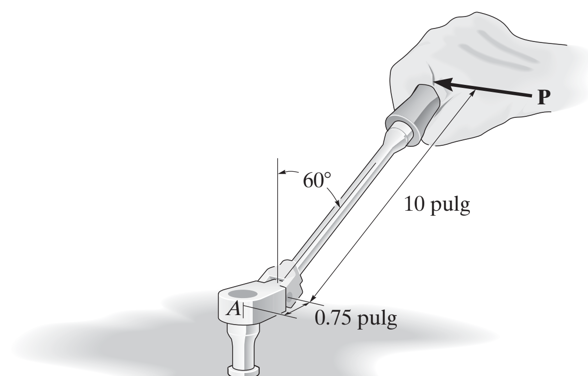
•**4-65.** Se levanta el marco en forma de A a una posición perpendicular mediante la fuerza vertical de $F = 80$ lb. Determine el momento de esta fuerza con respecto al eje $y$ cuando el marco está en la posición que se muestra.




**Probs. 4-63/64/65**

**4-66.** La llave de cabeza flexible está sometida a una fuerza $P = 16$ lb, aplicada perpendicularmente a su maneral como se muestra en la figura. Determine el momento o el par de torsión aplicado a lo largo del eje vertical del perno ubicado en $A$.

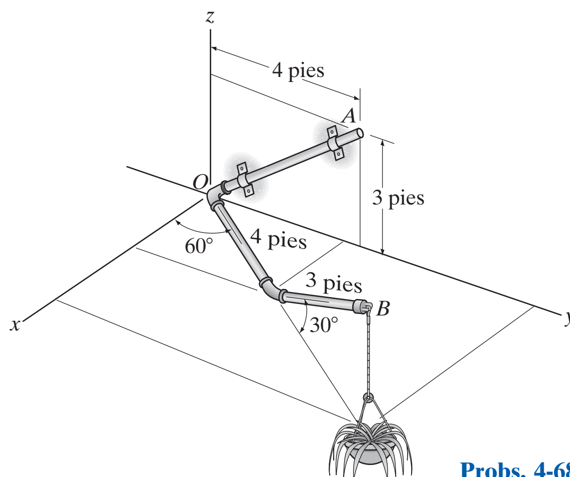
**4-67.** Si se requiere un par de torsión o momento de 80 lb · pulg para aflojar el perno localizado en $A$, determine la fuerza $P$ que debe aplicarse perpendicularmente al maneral de la llave de cabeza flexible.




**Probs. 4-66/67**

*__4-68.__ El ensamble de tubos está asegurado a la pared mediante dos soportes. Si la maceta tiene un peso de 50 lb, determine la magnitud del momento producido por el peso con respecto al eje $OA$.

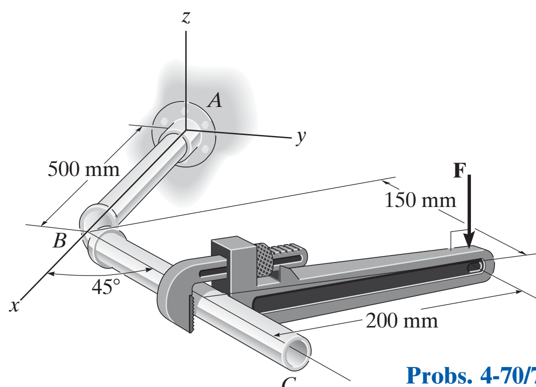
•**4-69.** El ensamble de tubos está asegurado a la pared mediante dos soportes. Si la fuerza de fricción de ambos soportes puede resistir un momento máximo de 150 lb · pie, determine el máximo peso de la maceta que puede ser sostenido por el ensamble sin ocasionar que éste gire alrededor del eje $OA$.




**Probs. 4-68/69**

**4-70.** Una fuerza vertical de $F = 60$ N se aplica al maneral de la llave para tubos. Determine el momento que ejerce esta fuerza a lo largo del eje $AB$ (eje $x$) del ensamble de tubos. Tanto la llave como el ensamble de tubos $ABC$. se encuentran en el plano $x$-$y$. *Sugerencia:* use un análisis escalar.

**4-71.** Determine la magnitud de la fuerza vertical **F** que actúa sobre el maneral de la llave si produce una componente de momento a lo largo del eje $AB$ (eje $x$) de la tubería de $(M_A)_x = \{-5\mathbf{i}\}$ N · m. Tanto la llave como el ensamble de tubos $ABC$, se encuentran en el plano $x$-$y$. *Sugerencia*: use un análisis escalar.




**Probs. 4-70/71**

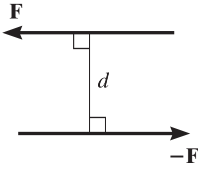



Fig. 4-25

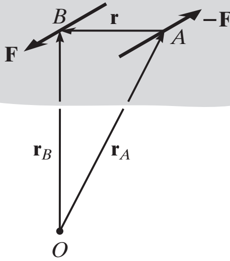



Fig. 4-26

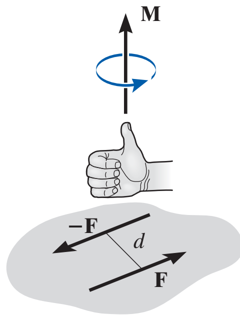



Fig. 4-27

4

## 4.6 Momento de un par

Un *par* se define como dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud, con direcciones opuestas, y están separadas por una distancia perpendicular *d*, figura 4-25. Como la fuerza resultante es cero, el único efecto de un par es producir una rotación o tendencia a rotar en una dirección específica. Por ejemplo, imagine que usted conduce un automóvil con ambas manos en el volante y está haciendo un giro. Una mano empujará el volante mientras que la otra lo jalará, con esto el volante girará.

El momento producido por un par se denomina *momento de par*. Podemos determinar su valor encontrando la suma de los momentos de ambas fuerzas del par con respecto a *cualquier* punto arbitrario. Por ejemplo, en la figura 4-26, los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ están dirigidos desde el punto $O$ hasta los puntos $A$ y $B$ que se encuentran sobre la línea de acción de $-\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}$. Por lo tanto, el momento del par calculado con respecto a $O$ es

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_A \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}$$

Sin embargo, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}$ o bien $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, de forma que

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-13}$$

Este resultado indica que un momento de par es un *vector libre*, es decir, puede actuar en *cualquier punto* ya que $\mathbf{M}$ depende *sólo* del vector de posición $\mathbf{r}$ dirigido *entre* las fuerzas y *no* de los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, dirigidos desde el punto arbitrario $O$ hacia las fuerzas. Por lo tanto, este concepto es diferente al momento de una fuerza, que requiere un punto definido (o eje) con respecto al cual se determinan los momentos.

**Formulación escalar.** El momento de un par, $\mathbf{M}$, figura 4-27, se define con una *magnitud* de

$$M = Fd \tag{4-14}$$

donde $F$ es la magnitud de una de las fuerzas y $d$ la distancia perpendicular o brazo de momento entre las fuerzas. La *dirección* y el sentido del momento de par se determinan mediante la regla de la mano derecha, donde el pulgar indica la dirección cuando los dedos se cierran con el sentido de rotación causado por las dos fuerzas. En todos los casos, $\mathbf{M}$ actúa perpendicularmente al plano que contiene estas fuerzas.

**Formulación vectorial.** El momento de un par puede expresarse también por el vector producto cruz con la ecuación 4-13, es decir,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{4-15}$$

La aplicación de esta ecuación se recuerda fácilmente si se piensa en tomar los momentos de ambas fuerzas con respecto a un punto que se encuentre sobre la línea de acción de una de las fuerzas. Por ejemplo, si los momentos se toman con respecto al punto $A$ en la figura 4-26, el momento de $-\mathbf{F}$ es *cero* con respecto a este punto, y el momento de $\mathbf{F}$ se define a partir de la ecuación 4-15. Por lo tanto, en la formulación, $\mathbf{r}$ se multiplica vectorialmente por la fuerza $\mathbf{F}$ a la cual está dirigida.

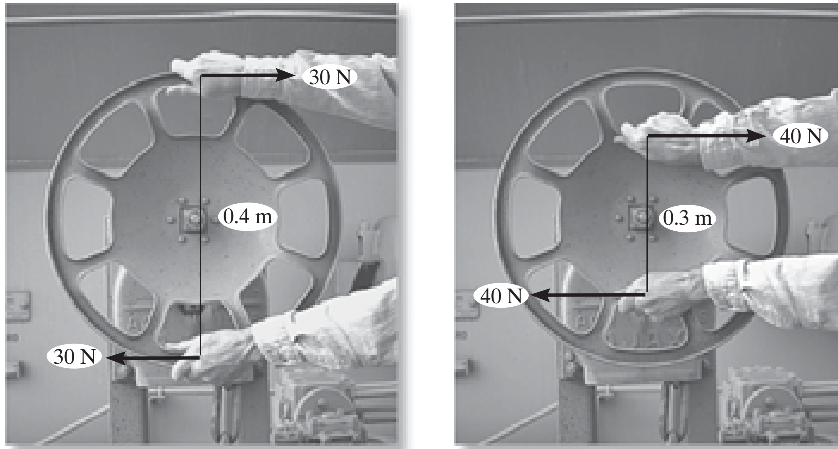



Fig. 4-28



**Pares equivalentes.** Se dice que dos pares son *equivalentes* si producen un momento con la *misma magnitud y dirección*. Por ejemplo, los dos pares mostrados en la figura 4-28 son *equivalentes* porque cada momento de par tiene una magnitud de $M = 30\text{ N}(0.4\text{ m}) = 40\text{ N}(0.3\text{ m}) = 12\text{ N}\cdot\text{m}$, y cada uno de ellos está dirigido hacia el plano de la página. Observe que en el segundo caso se requieren fuerzas más grandes para crear el mismo efecto de giro, debido a que las manos están colocadas más cerca una de la otra. Además, si la rueda estuviera conectada al eje en un punto distinto de su centro, ésta giraría de igual forma al aplicar cada uno de los pares porque el par de $12\text{ N}\cdot\text{m}$ es un vector libre.

**Momento de par resultante.** Como los momentos de par son vectores libres, sus resultantes pueden determinarse mediante la suma de vectores. Por ejemplo, considere los momentos de par $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ que actúan sobre el tubo de la figura 4-29*a*. Como cada momento de par es un vector libre, podemos unir sus colas en cualquier punto arbitrario y encontrar el momento de par resultante, $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, como se muestra en la figura 4-29*b*.

Si sobre el cuerpo actúan más de dos momentos de par, podemos generalizar este concepto y escribir el vector resultante como

$$\mathbf{M}_R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{4-16}$$

Estos conceptos se ilustran numéricamente en los ejemplos que siguen. En general, los problemas proyectados en dos dimensiones deben resolverse con un análisis escalar puesto que los brazos de momento y las componentes son fáciles de determinar.

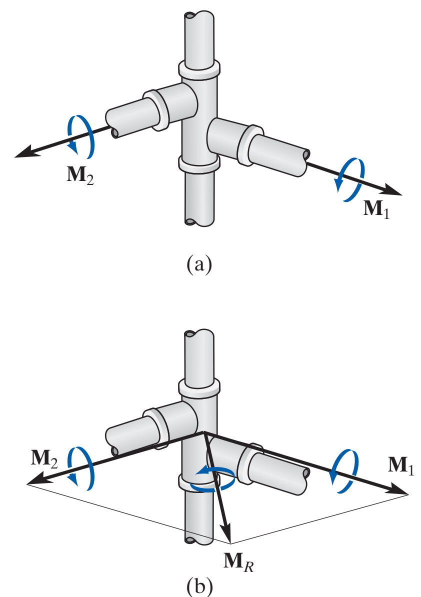
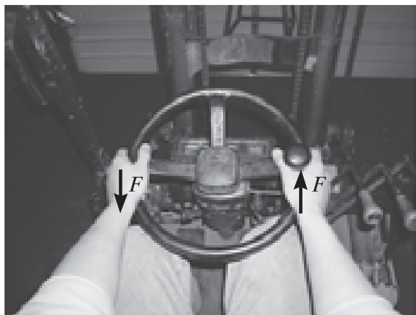



Fig. 4-29




Los volantes de los vehículos actuales se fabrican más pequeños que en los automóviles antiguos, debido a que de esta forma no se requiere que el conductor aplique un momento de par grande al rin de la rueda.

4

## Puntos importantes

- Un momento de par lo producen dos fuerzas no colineales que son iguales en magnitud pero opuestas en dirección. Su efecto es producir una rotación pura, o una tendencia a girar en una dirección especificada.
- Un momento de par es un vector libre y, como resultado, causa el mismo efecto de rotación sobre un cuerpo independientemente de dónde se aplique al cuerpo.
- El momento de las dos fuerzas de par se puede determinar con respecto a *cualquier punto*. Por conveniencia, a menudo ese punto se selecciona sobre la línea de acción de una de las fuerzas para eliminar el momento de esta fuerza con respecto al punto.
- En tres dimensiones, el momento de par a menudo se determina por la formulación vectorial, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre la línea de acción de una de las fuerzas a *cualquier punto* sobre la línea de acción de otra fuerza $\mathbf{F}$.
- Un momento de par resultante es simplemente la suma vectorial de todos los momentos de par del sistema.

## EJEMPLO 4.10

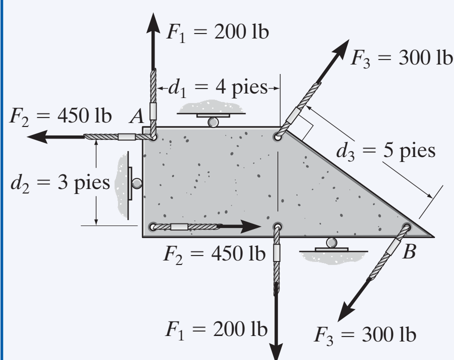



**Fig. 4-30**

Determine el momento de par resultante de los tres pares que actúan sobre la placa de la figura 4-30.

### SOLUCIÓN

Como se muestra en la figura, las distancias perpendiculares entre cada par de fuerzas son $d_1 = 4$ pies, $d_2 = 3$ pies y $d_3 = 5$ pies. Si se considera que los momentos de par con sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos, tenemos

$$\circlearrowleft + M_R = \Sigma M; \; M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

$$= (-200 \text{ lb})(4 \text{ pies}) + (450 \text{ lb})(3 \text{ pies})$$

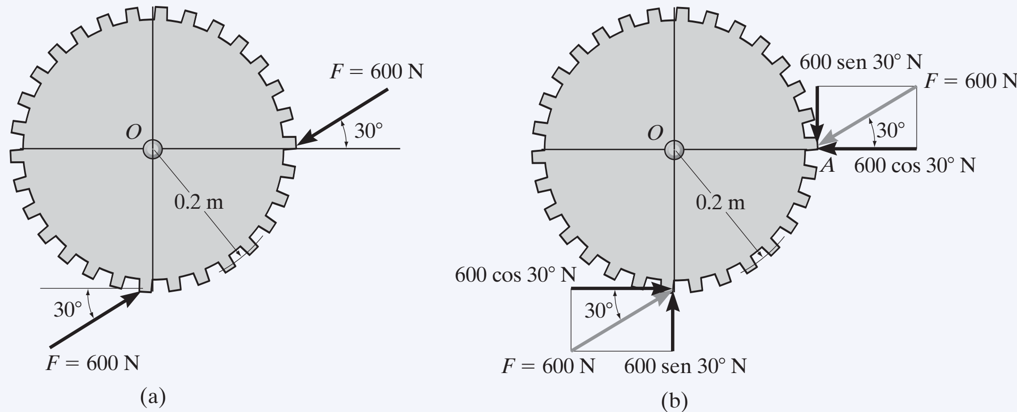
$$- (300 \text{ lb})(5 \text{ pies})$$

$$= -950 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 950 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_R$ tiene un sentido rotacional en el sentido de las manecillas del reloj.

## EJEMPLO 4.11

Determine la magnitud y la dirección del momento de par que actúa sobre el engrane de la figura 4-31*a*.




### SOLUCIÓN

La solución más fácil requiere descomponer cada fuerza en sus componentes como se muestra en la figura 4-31*b*. El momento de par puede determinarse al sumar los momentos de estas componentes de fuerza con respecto a cualquier punto, por ejemplo, el centro *O* del engrane o el punto *A*. Si consideramos que los momentos con sentido contrario al de las manecillas del reloj son positivos, tenemos

$$\circlearrowleft + M = \Sigma M_O;\quad M = (600 \cos 30°\ \text{N})(0.2\ \text{m}) - (600 \text{ sen } 30°\ \text{N})(0.2\ \text{m})$$
$$= 43.9\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

o bien

$$\circlearrowleft + M = \Sigma M_A;\quad M = (600 \cos 30°\ \text{N})(0.2\ \text{m}) - (600 \text{ sen } 30°\ \text{N})(0.2\ \text{m})$$
$$= 43.9\ \text{N}\cdot\text{m} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

Este resultado positivo indica que **M** tiene un sentido de rotación inverso al de las manecillas del reloj, de manera que está dirigido hacia fuera, perpendicular a la página.

**NOTA:** también se puede obtener el mismo resultado con $M = Fd$, donde $d$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas, figura 4-31*c*. Sin embargo, el cálculo para $d$ es más complicado. Observe que el momento de par es un vector libre, por lo que puede actuar en cualquier punto del engrane y produce el mismo efecto de giro con respecto al punto *O*.

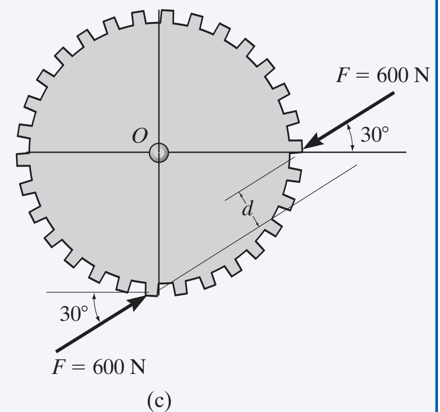
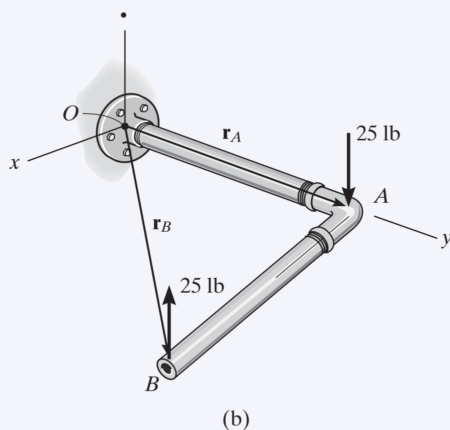



**Fig. 4-31**

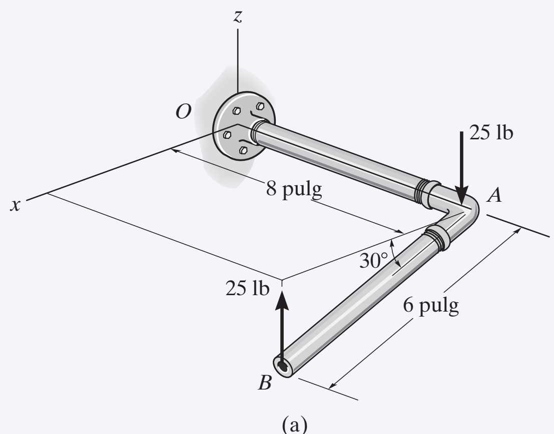
4

## EJEMPLO 4.12

Determine el momento de par que actúa sobre el tubo de la figura 4-32*a*. El segmento *AB* está dirigido 30° por debajo del plano *x-y*.



(b)



(a)

### SOLUCIÓN I *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

El momento de las dos fuerzas de par puede encontrarse con respecto a *cualquier punto*. Si se considera el punto *O*, figura 4-32*b*, tenemos

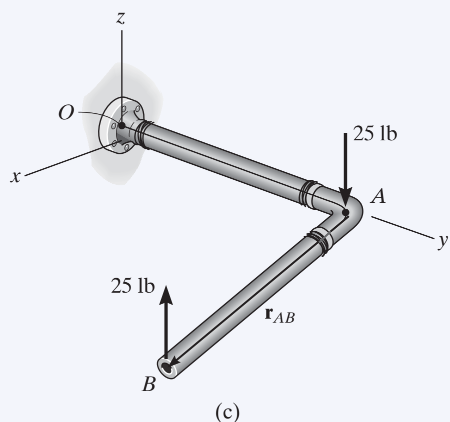
$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-25\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (25\mathbf{k}) \\
&= (8\mathbf{j}) \times (-25\mathbf{k}) + (6 \cos 30°\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6 \text{ sen } 30°\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\
&= -200\mathbf{i} - 129.9\mathbf{j} + 200\mathbf{i} \\
&= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg}
\end{aligned}
$$

***Resp.***

Es *más fácil* tomar momentos de las fuerzas de par con respecto a un punto que esté sobre la línea de acción de una de las fuerzas, por ejemplo, el punto *A*, figura 4-32*c*. En este caso, el momento de la fuerza en *A* es cero, por lo que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (25\mathbf{k}) \\
&= (6 \cos 30°\mathbf{i} - 6 \text{ sen } 30°\mathbf{k}) \times (25\mathbf{k}) \\
&= \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg}
\end{aligned}
$$

***Resp.***



(c)

### SOLUCIÓN II *(ANÁLISIS ESCALAR)*

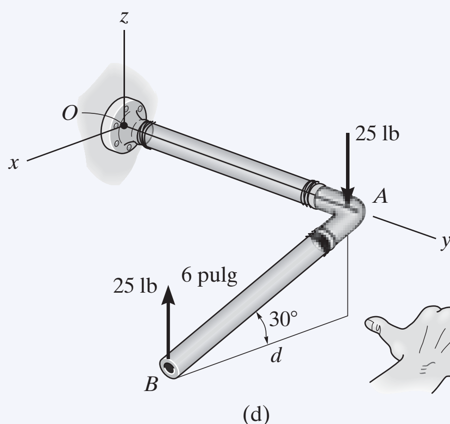
Aunque este problema se muestra en tres dimensiones, la geometría es suficientemente simple como para usar la ecuación escalar $M = Fd$. La distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas es $d = 6 \cos 30° = 5.196$ pulg, figura 4-32*d*. Por lo tanto, tomando momentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto *A* o *B* resulta

$$M = Fd = 25 \text{ lb}(5.196 \text{ pulg}) = 129.9 \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha, **M** actúa en la dirección $-\mathbf{j}$. Entonces,

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\} \text{ lb} \cdot \text{pulg}$$

***Resp.***



(d)

**Fig. 4-32**

## EJEMPLO 4.13

Reemplace los dos pares que actúan sobre la columna tubular en la figura 4-33*a* por un momento de par resultante.

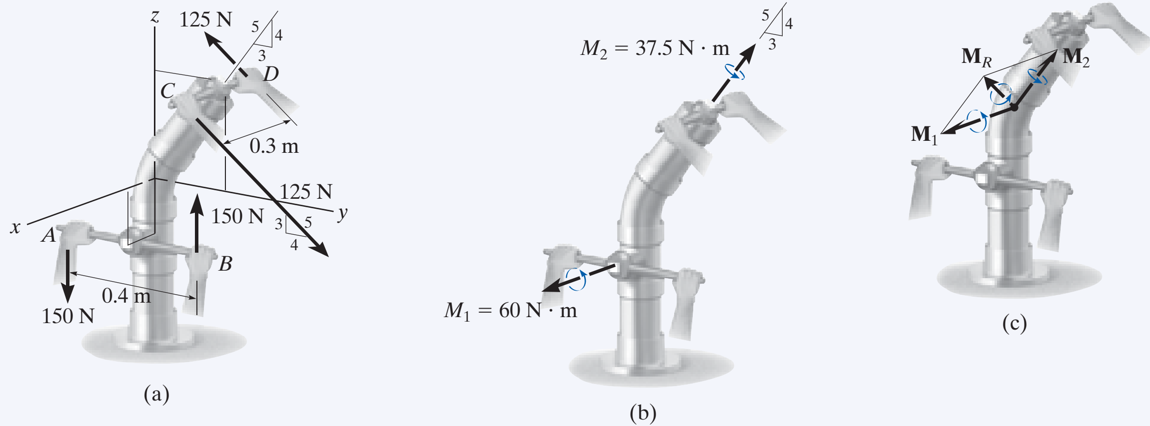



**Fig. 4-33**

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

El momento de par $\mathbf{M}_1$, desarrollado por las fuerzas presentes en $A$ y $B$, pueden determinarse con facilidad a partir de una formulación escalar.

$$M_1 = Fd = 150\text{ N}(0.4\text{ m}) = 60\text{ N}\cdot\text{m}$$

Por la regla de la mano derecha, $\mathbf{M}_1$ actúa en la dirección $+\mathbf{i}$, figura 4-33*b*. Por consiguiente,

$$\mathbf{M}_1 = \{60\mathbf{i}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

Se usará el análisis vectorial para determinar $\mathbf{M}_2$, causado por las fuerzas en $C$ y $D$. Si los momentos se calculan con respecto al punto $D$, figura 4-33*a*, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C$, entonces

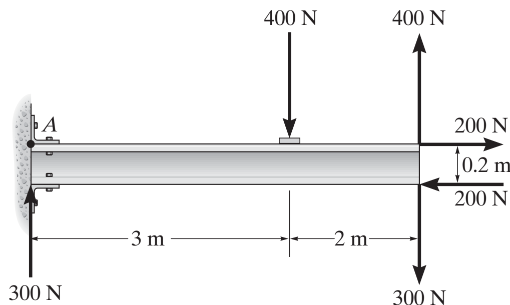
$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2 &= \mathbf{r}_{DC} \times \mathbf{F}_C = (0.3\mathbf{i}) \times \left[125\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} - 125\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k}\right]\\ &= (0.3\mathbf{i}) \times [100\mathbf{j} - 75\mathbf{k}] = 30(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 22.5(\mathbf{i} \times \mathbf{k})\\ &= \{22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Como $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son vectores libres, pueden desplazarse hacia algún punto arbitrario y sumarse en forma vectorial, figura 4-33*c*. El momento de par resultante se convierte en

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \{60\mathbf{i} + 22.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

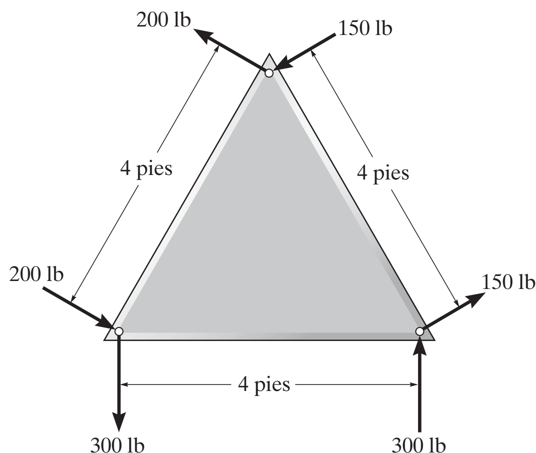
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F4-19.** Determine el momento de par resultante que actúa sobre la viga.



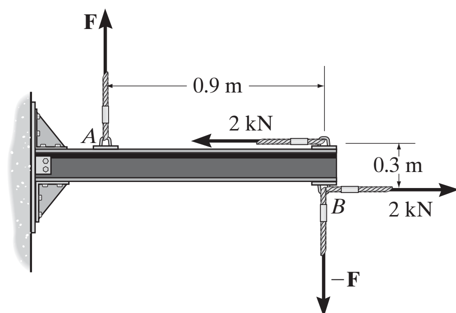

F4-19

**F4-20.** Determine el momento de par resultante que actúa sobre la placa triangular.



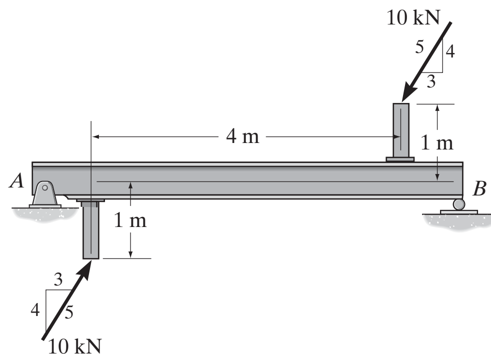

F4-20

**F4-21.** Determine la magnitud de **F** de modo que el momento de par resultante que actúa sobre la viga sea de 1.5 kN · m en el sentido de las manecillas del reloj.



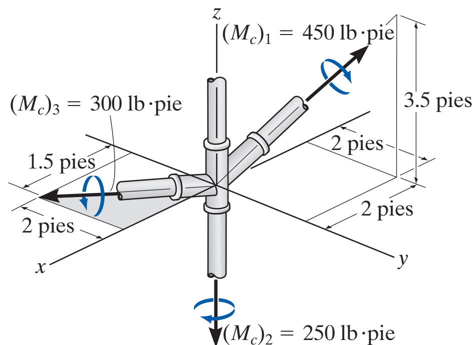

F4-21

**F4-22.** Determine el momento de par resultante que actúa sobre la viga.



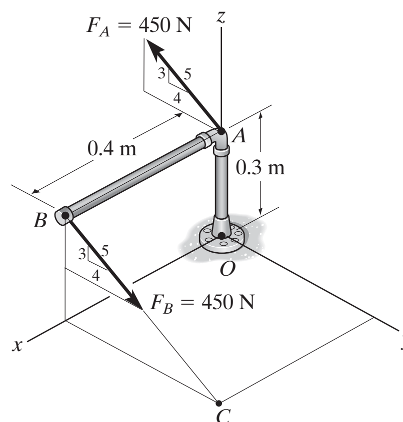

F4-22

**F4-23.** Determine el momento de par resultante que actúa sobre el ensamble de tubos.




F4-23

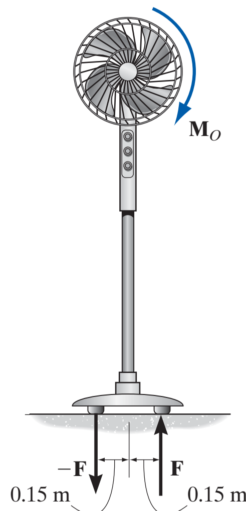
**F4-24.** Determine el momento de par que actúa sobre el ensamble de tubos y exprese el resultado como un vector cartesiano.




F4-24

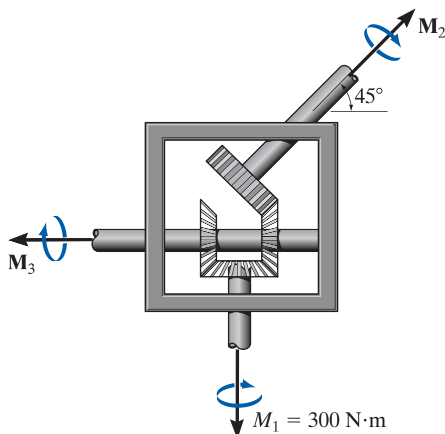
## PROBLEMAS

*4-72. Los efectos de fricción del aire sobre las aspas del ventilador de pedestal crean un momento de par de $M_O = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$ sobre las aspas. Determine la magnitud de las fuerzas de par en la base del ventilador de manera que el momento de par resultante sobre el ventilador sea igual a cero.



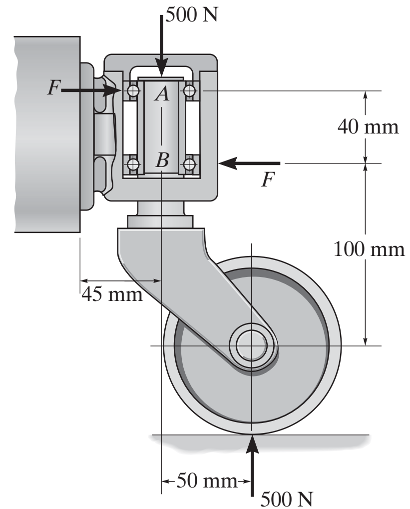

Prob. 4-72

•4-73. Determine la magnitud requerida de los momentos de par $\mathbf{M}_2$ y $\mathbf{M}_3$ de forma que el momento de par resultante sea igual a cero.




Prob. 4-73

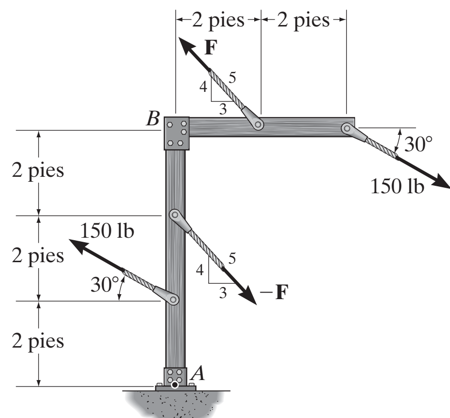
4-74. La rueda movible está sometida a los dos pares mostrados. Determine las fuerzas $F$ que ejercen los cojinetes sobre el árbol de manera que el momento de par resultante sobre la rueda sea cero.




Prob. 4-74

4-75. Si $F = 200$ lb, determine el momento de par resultante.

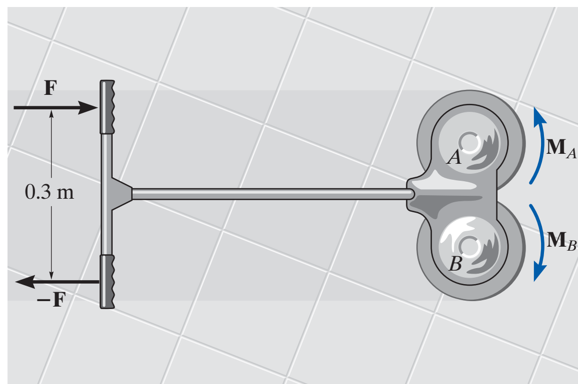
*4-76. Determine la magnitud requerida de la fuerza **F** si el momento de par resultante sobre el marco es de 200 lb · pie, en el sentido de las manecillas del reloj.




Probs. 4-75/76

4

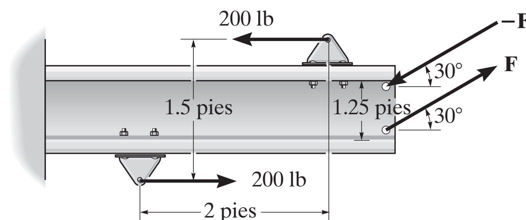
•**4-77.** El piso ocasiona un momento de par de $M_A = 40$ N · m y $M_B = 30$ N · m sobre las brochas de la máquina pulidora. Determine la magnitud de las fuerzas de par que debe desarrollar el operador sobre los manubrios, de manera que el momento de par resultante sobre la pulidora sea igual a cero. ¿Cuál es la magnitud de estas fuerzas si la brocha en $B$ se detiene repentinamente de modo que $M_B = 0$?




Prob. 4-77

4

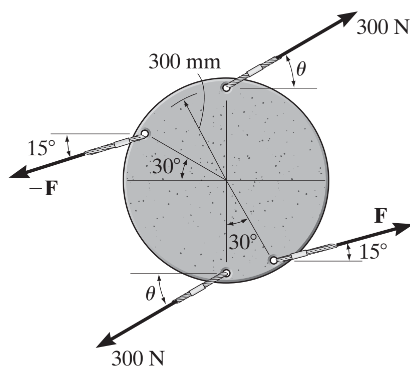
*4-80. Dos pares actúan sobre la viga. Determine la magnitud de **F** de modo que el momento del par resultante sea de 450 lb · pie en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿En qué punto de la viga actúa el momento del par resultante?




Prob. 4-80

**4-78.** Si $\theta = 30°$, determine la magnitud de la fuerza **F** de modo que el momento de par resultante sea de 100 N · m en el sentido de las manecillas del reloj.

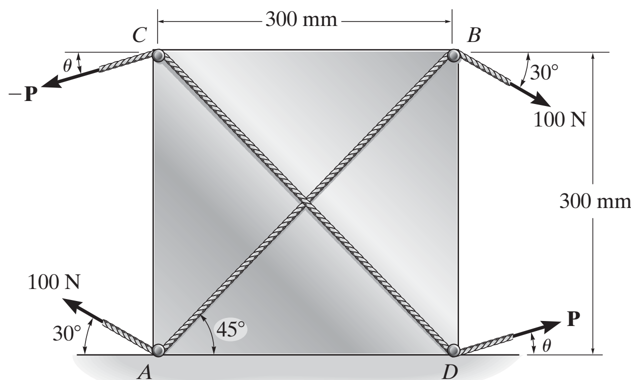
**4-79.** Si $F = 200$ N, determine el ángulo $\theta$ requerido para que el momento de par resultante sea igual a cero.




Probs. 4-78/79

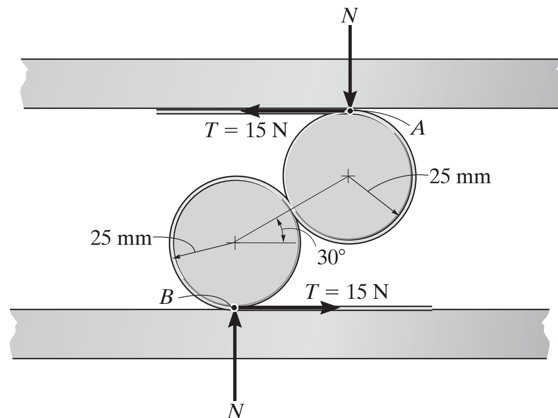
•**4-81.** La cuerda que pasa sobre las dos pequeñas clavijas $A$ y $B$ en el tablero cuadrado, está sometida a una tensión de 100 N. Determine la tensión requerida $P$ que actúa sobre la cuerda que pasa sobre las clavijas $C$ y $D$, si el par resultante producido por los dos pares es de 15 N · m en el sentido de las manecillas del reloj. Considere que $\theta = 15°$.

**4-82.** La cuerda que pasa sobre dos pequeñas clavijas $A$ y $B$ en el tablero cuadrado, está sometida a una tensión de 100 N. Determine la tensión *mínima* $P$ y la orientación de $\theta$ de la cuerda que pasa sobre las clavijas $C$ y $D$, si el momento del par resultante producido por los dos pares es de 20 N · m en el sentido de las manecillas del reloj.



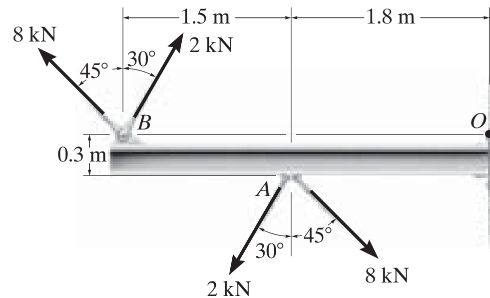

Probs. 4-81/82

**4-83.** Un dispositivo llamado rolamita se usa de varias maneras para reemplazar el movimiento deslizante por movimiento rodante. Si la banda, que está enrollada entre los rodillos, se encuentra sometida a una tensión de 15 N, determine las fuerzas reactivas $N$ de las placas superior e inferior sobre los rodillos, de modo que el par resultante que actúa sobre los rodillos sea igual a cero.



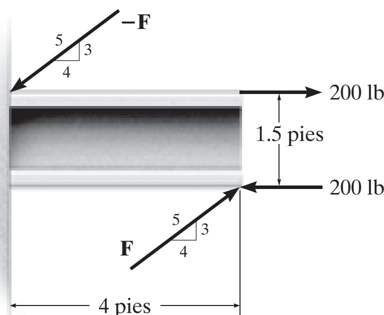

**Prob. 4-83**

**•4-85.** Determine el momento del par resultante que actúa sobre la viga. Resuelva el problema de dos maneras: (*a*) sume los momentos con respecto al punto $O$; y (*b*) sume los momentos con respecto al punto $A$.




**Prob. 4-85**

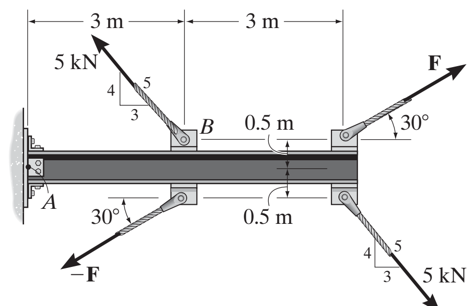
***4-84.** Dos pares actúan sobre la viga como se muestra en la figura. Determine la magnitud de **F** de modo que el momento del par resultante sea de 300 lb · pie en sentido contrario al de las manecillas del reloj. ¿En qué punto de la viga actúa el momento del par resultante?




**Prob. 4-84**

**4-86.** Dos pares actúan sobre la viga en voladizo. Si $F$ = 6 kN, determine el momento del par resultante.

**4-87.** Determine la magnitud requerida de la fuerza **F**, si el momento del par resultante sobre la viga debe ser igual a cero.

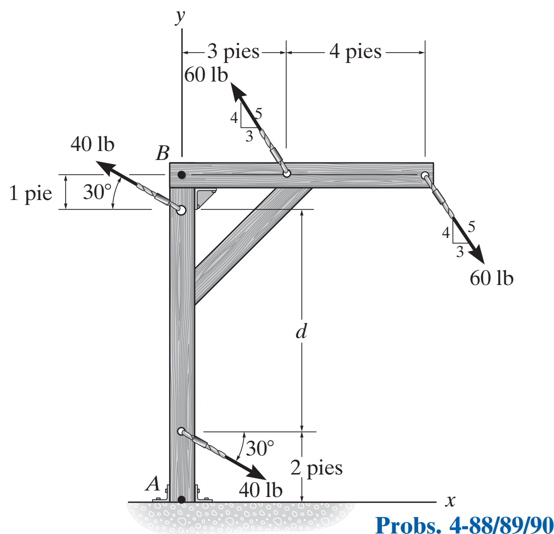



**Probs. 4-86/87**

*__4-88.__ Dos pares actúan sobre la estructura. Si el momento del par resultante debe ser igual a cero, determine la distancia $d$ entre las fuerzas del par de 40 lb.

•**4-89.** Dos pares actúan sobre el bastidor. Si $d = 4$ pies, determine el momento de par resultante. Para que calcule el resultado descomponga cada fuerza en componentes $x$ y $y$. Además obtenga el resultado ($a$) al determinar el momento de cada par (ecuación 4-13) y ($b$) al sumar los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al punto $A$.

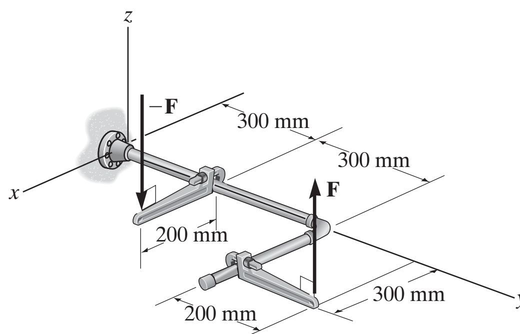
**4-90.** Dos pares actúan sobre el bastidor. Si $d = 4$ pies, determine el momento de par resultante. Para que calcule el resultado descomponga cada fuerza en componentes $x$ y $y$. Además obtenga el resultado ($a$) al determinar el momento de cada par (ecuación 4-13) y ($b$) al sumar los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al punto $B$.




**Probs. 4-88/89/90**

•**4.93.** Si $F = 80$ N, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados del momento de par. El ensamble de tubos se encuentra en el plano $x$-$y$.

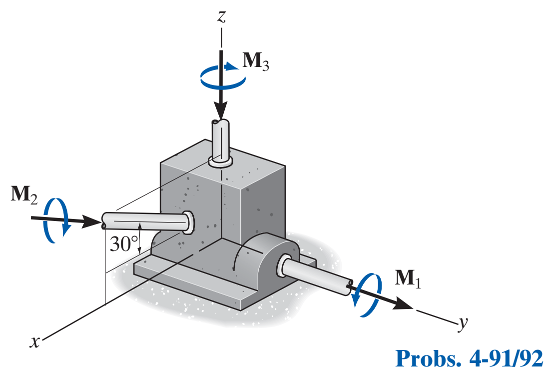
**4-94.** Si la magnitud del momento de par que actúa sobre el ensamble de tubos es de 50 N · m, determine la magnitud de las fuerzas de par aplicadas en cada llave. El ensamble de tubos se encuentra en el plano $x$-$y$.




**Probs. 4-93/94**

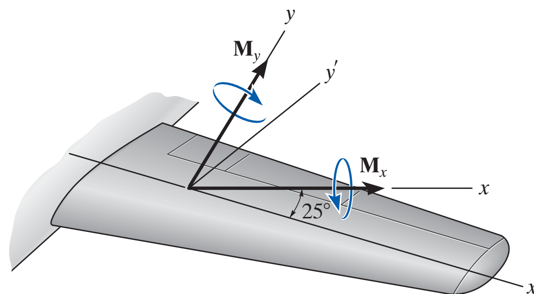
**4-91.** Si $M_1 = 500$ N · m, $M_2 = 600$ N · m y $M_3 = 450$ N · m, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados del momento de par resultante.

*__4-92.__ Determine la magnitud requerida de los momentos de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ y $\mathbf{M}_3$ para que el momento de par resultante sea $\mathbf{M}_R = \{300\mathbf{i} + 450\mathbf{j} - 600\mathbf{k}\}$ N · m.




**Probs. 4-91/92**

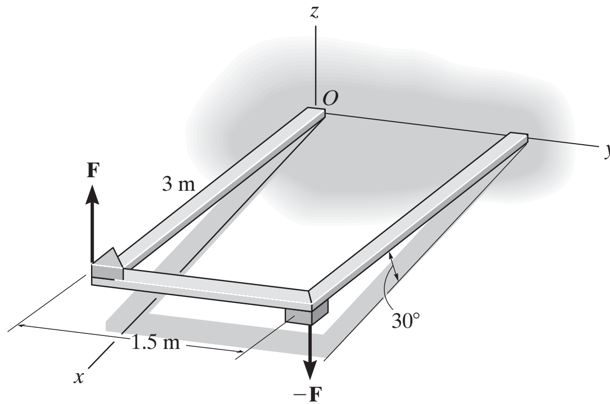
**4-95.** A partir de los cálculos de carga, se ha determinado que el ala está sometida a momentos de par $M_x = 17$ kip · pie y $M_y = 25$ kip · pie. Determine los momentos de par resultantes producidos con respecto a los ejes $x'$ y $y'$. Todos los ejes se encuentran en el mismo plano horizontal.




**Prob. 4-95**

*4-96. Exprese el momento del par que actúa sobre el bastidor en forma de vector cartesiano. Las fuerzas se aplican de manera perpendicular al bastidor. ¿Cuál es la magnitud del momento de par? Considere que $F = 50$ N.

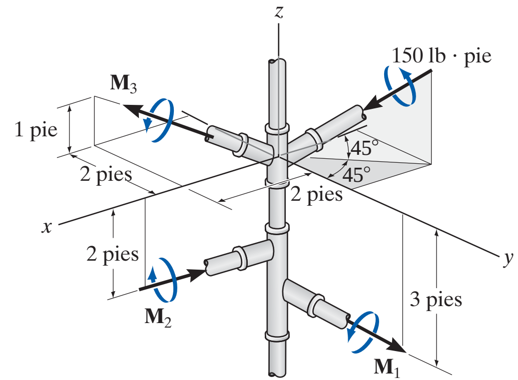
•4-97. Para voltear el bastidor, se aplica un momento de par como el que se muestra en la figura. Si la componente de este momento de par a lo largo del eje $x$ es $\mathbf{M}_x = \{-20\mathbf{i}\}$ N · m, determine la magnitud $F$ de las fuerzas de par.




**Probs. 4-96/97**

*4-100. Si $M_1 = 180$ lb · pie, $M_2 = 90$ lb · pie y $M_3 = 120$ lb · pie, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados del momento de par resultante.

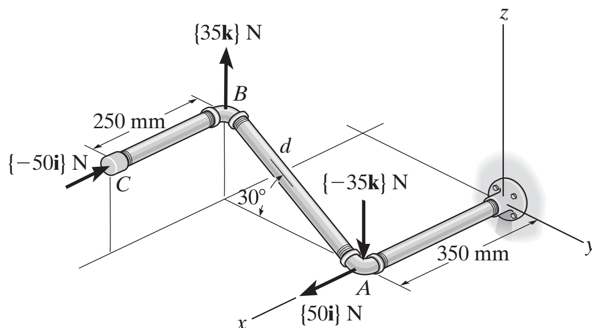
•4-101. Determine las magnitudes de los momentos de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ y $\mathbf{M}_3$ de modo que el momento de par resultante sea igual a cero.




**Probs. 4-100/101**

4-98. Determine el momento de par resultante de los dos pares que actúan sobre el ensamble de tubos. La distancia desde $A$ hasta $B$ es $d = 400$ mm. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

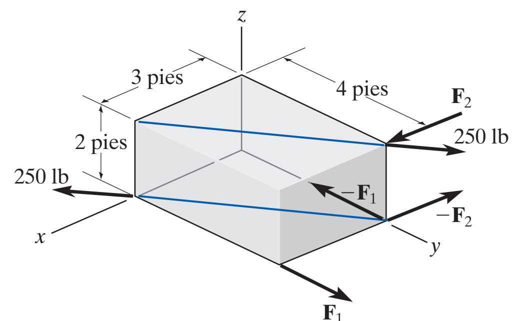
4-99. Determine la distancia $d$ entre $A$ y $B$ de modo que el momento de par resultante tenga una magnitud $M_R = 20$ N · m.




**Probs. 4-98/99**

4-102. Si $F_1 = 100$ lb y $F_2 = 200$ lb, determine la magnitud y los ángulos directores coordenados del momento de par resultante.

4-103. Determine la magnitud de las fuerzas de par $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de modo que el momento de par resultante que actúa sobre el bloque sea igual a cero.




**Probs. 4-102/103**

## 4.7 Simplificación de un sistema de fuerza y par

En ocasiones es conveniente reducir un sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una forma más sencilla, lo cual se puede hacer si se reemplaza con un *sistema equivalente*, que conste de una sola fuerza resultante la cual actúe en un punto específico y un momento de par resultante. Un sistema es equivalente si los *efectos externos* que produce sobre un cuerpo son los mismos que los causados por el sistema original de fuerza y momento de par. En este contexto, los efectos externos de un sistema se refieren al *movimiento de traslación y rotación* del cuerpo si éste es libre de moverse, o se refiere a las *fuerzas reactivas* en los apoyos si el cuerpo se mantiene fijo.

Por ejemplo, considere que se sujeta la varilla de la figura 4-34*a*, la cual está sometida a la fuerza **F** en el punto $A$. Si añadimos un par de fuerzas iguales pero opuestas **F** y −**F** en el punto $B$, que se encuentra *sobre la línea de acción* de **F**, figura 4-34*b*, observamos que −**F** en $B$ y **F** en $A$ se cancelarán entre sí, y queda sólo **F** en $B$, figura 4-34*c*. Ahora, la fuerza **F** se ha movido desde $A$ hasta $B$ sin modificar sus *efectos externos* sobre la varilla; es decir, la reacción en el agarre permanece igual. Lo anterior demuestra el *principio de transmisibilidad*, el cual establece que una fuerza que actúa sobre un cuerpo (varilla) es un *vector deslizante* puesto que puede aplicarse sobre cualquier punto a lo largo de su línea de acción.

También podemos usar el procedimiento anterior para mover una fuerza hasta un punto que *no* está sobre la línea de acción de la fuerza. Si **F** se aplica en forma perpendicular a la varilla, como en la figura 4-35*a*, podemos añadir un par de fuerzas iguales pero opuestas **F** y −**F** a $B$, figura 4-35*b*. Ahora la fuerza **F** se aplica en $B$, y las otras dos fuerzas, **F** en $A$ y −**F** en $B$, forman un par que produce el momento de par $M = Fd$, figura 4-35*c*. Por lo tanto, la fuerza **F** puede moverse desde $A$ hasta $B$ siempre que se añada un momento de par **M** para mantener un sistema equivalente. Este momento de par se determina al tomar el momento de **F** con respecto a $B$. Como **M** es en realidad un

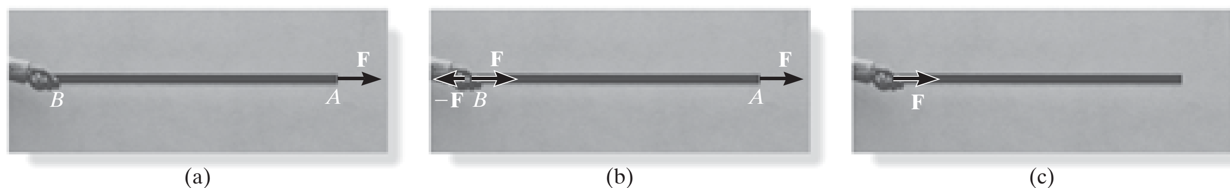



**Fig. 4-34**

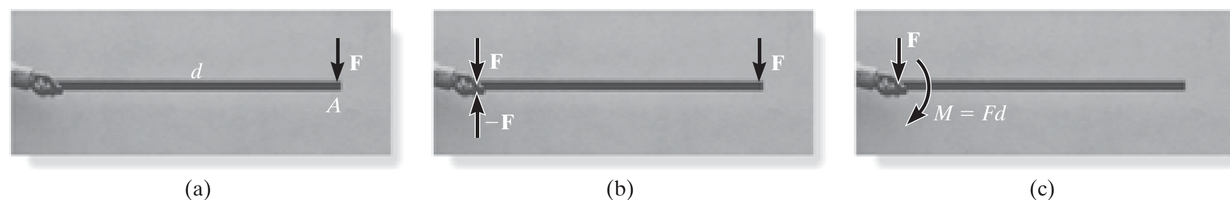



**Fig. 4-35**

4

*vector libre*, puede actuar en cualquier punto de la varilla. En ambos casos los sistemas son equivalentes, lo que produce una fuerza descendente **F** y un momento de par $M = Fd$ en el sentido de las manecillas del reloj, que se siente en el punto de sujeción.

**Sistema de fuerzas y momentos de par.** Por el método anterior, es posible reducir un sistema de varias fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo a una sola fuerza resultante que actúa en el punto $O$ y un momento de par resultante. Por ejemplo, en la figura 4-36*a*, $O$ no está en la línea de acción de $\mathbf{F}_1$, por lo que la fuerza puede moverse al punto $O$ siempre que se añada al cuerpo un momento de par $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$. Del mismo modo, el momento de par $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ debe agregarse al cuerpo cuando movemos $\mathbf{F}_2$ al punto $O$. Por último, como el momento de par **M** es un vector libre, se puede mover justo al punto $O$. Al hacer esto obtenemos el sistema equivalente que se muestra en la figura 4-36*b*, lo cual produce los mismos efectos externos (reacciones en los apoyos) sobre el cuerpo que el sistema de fuerza y par de la figura 4-36*a*. Si sumamos las fuerzas y los momentos de par, obtenemos la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y el momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, figura 4-36*c*.

Observe que $\mathbf{F}_R$ es independiente de la ubicación del punto $O$; sin embargo, $(\mathbf{M}_R)_O$ depende de esta ubicación ya que los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se determinan con los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Observe también que $(\mathbf{M}_R)_O$ es un vector libre y puede actuar en *cualquier punto* sobre el cuerpo, aunque por lo general el punto $O$ se selecciona en su punto de aplicación.

El método anterior, para simplificar un sistema de fuerza y par a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ que actúe en el punto $O$ y un momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O$, puede generalizarse mediante la aplicación de las dos ecuaciones siguientes.

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$$
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma\mathbf{M}_O + \Sigma\mathbf{M} \qquad (4\text{-}17)$$

La primera ecuación establece que la fuerza resultante del sistema es equivalente a la suma de todas las fuerzas; y la segunda ecuación establece que el momento de par resultante del sistema es equivalente a la suma de todos los momentos de par $\Sigma\mathbf{M}$ más los momentos con respecto al punto $O$ de todas las fuerzas $\Sigma\mathbf{M}_O$. Si el sistema de fuerzas se encuentra en el plano *x-y* y cualesquier momentos de par son perpendiculares a este plano, entonces las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes tres ecuaciones escalares.

$$(F_R)_x = \Sigma F_x$$
$$(F_R)_y = \Sigma F_y \qquad (4\text{-}18)$$
$$(M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

Aquí, la fuerza resultante se determina a partir de la suma vectorial de sus dos componentes $(F_R)_x$ y $(F_R)_y$.

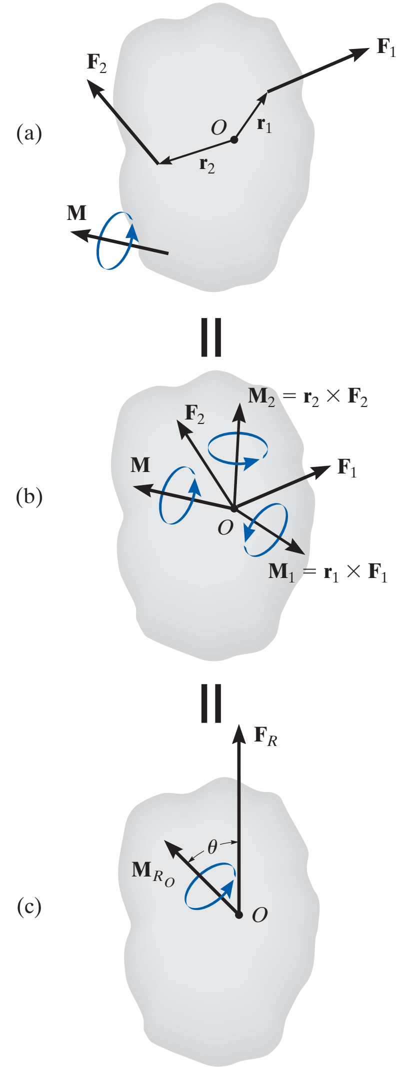
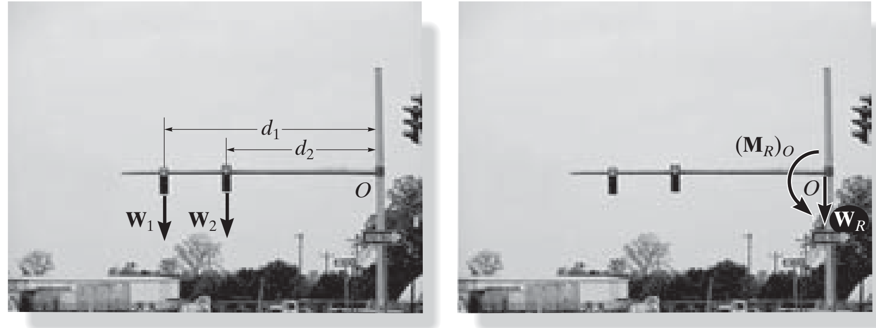



**Fig. 4-36**

4




Los pesos de estos semáforos pueden reemplazarse por su fuerza resultante equivalente $W_R = W_1 + W_2$ y un momento de par $(M_R)_O = W_1 d_1 + W_2 d_2$ en el apoyo $O$. En ambos casos el apoyo debe proporcionar la misma resistencia a la traslación y a la rotación a fin de mantener el elemento en la posición horizontal.

4

## Procedimiento para el análisis

Los siguientes puntos deberán tenerse presentes al simplificar un sistema de fuerza y momento de par a un sistema equivalente de fuerza resultante y par.

- Establezca los ejes coordenados con el origen localizado en el punto $O$ donde los ejes tienen una orientación seleccionada.

### Suma de fuerzas.

- Si el sistema de fuerzas es *coplanar*, descomponga cada fuerza en sus componentes $x$ y $y$. Si una componente está dirigida a lo largo de los ejes $x$ o $y$ positivos, representa un escalar positivo; mientras que si está dirigida a lo largo de los ejes $x$ o $y$ negativos, es un escalar negativo.
- En tres dimensiones, represente cada fuerza como un vector cartesiano antes de sumar las fuerzas.

### Suma de momentos.

- Por lo general, al determinar los momentos de un sistema de fuerzas *coplanares* con respecto al punto $O$, es conveniente aplicar el principio de momentos, es decir, determinar los momentos de las componentes de cada fuerza en vez del momento de la fuerza en sí.
- En tres dimensiones, use el producto cruz vectorial para determinar el momento de cada fuerza con respecto al punto $O$. Aquí los vectores de posición se extienden desde el punto $O$ hasta cualquier punto sobre la línea de acción de cada fuerza.

## EJEMPLO 4.14

Reemplace el sistema de fuerza y par que se muestra en la figura 4-37*a* por una fuerza resultante equivalente y un momento de par que actúen en el punto *O*.

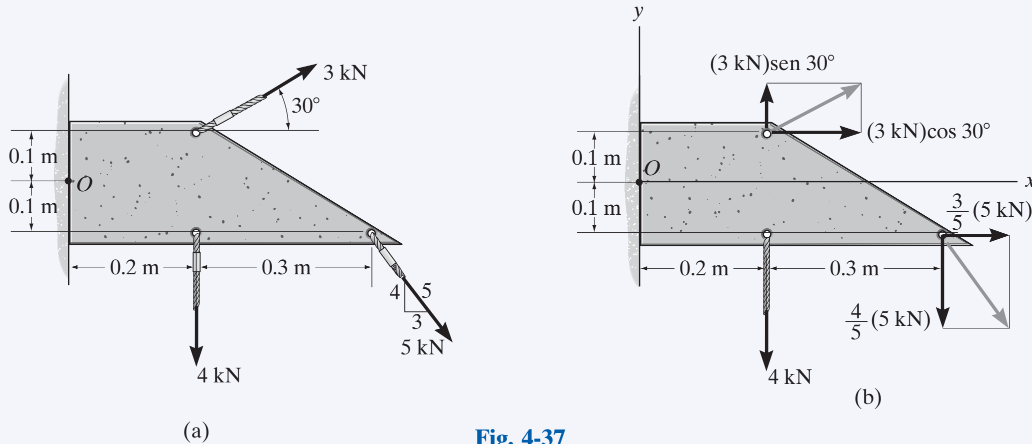



**Fig. 4-37**

### SOLUCIÓN

**Suma de fuerzas.** Las fuerzas de 3 kN y 5 kN se descomponen en sus componentes *x* y *y* como se muestra en la figura 4-37*b*. Tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;\quad (F_R)_x = (3\text{ kN})\cos 30^\circ + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN}) = 5.598\text{ kN}\rightarrow$$

$$+\uparrow(F_R)_y = \Sigma F_y;\quad (F_R)_y = (3\text{ kN})\text{sen } 30^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN}) - 4\text{ kN} = -6.50\text{ kN} = 6.50\text{ kN}\downarrow$$

Con base en el teorema de Pitágoras, figura 4-37*c*, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{(5.598\text{ kN})^2 + (6.50\text{ kN})^2} = 8.58\text{ kN}\qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Su dirección $\theta$ es

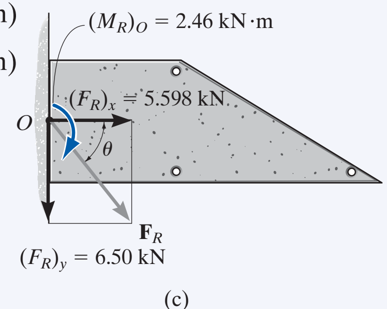
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.50\text{ kN}}{5.598\text{ kN}}\right) = 49.3^\circ\qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Suma de momentos.** Los momentos de 3 kN y 5 kN con respecto al punto *O* se determinarán mediante el uso de sus componentes *x* y *y*. Con referencia a la figura 4-37*b*, tenemos

$$\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma M_O;$$

$$(M_R)_O = (3\text{ kN})\text{sen } 30^\circ(0.2\text{ m}) - (3\text{ kN})\cos 30^\circ(0.1\text{ m}) + \left(\tfrac{3}{5}\right)(5\text{ kN})(0.1\text{ m})$$
$$- \left(\tfrac{4}{5}\right)(5\text{ kN})(0.5\text{ m}) - (4\text{ kN})(0.2\text{ m})$$
$$= -2.46\text{ kN}\cdot\text{m} = 2.46\text{ kN}\cdot\text{m}\circlearrowright\qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-37*c*.




**NOTA:** observe que la fuerza y el momento de par resultantes en la figura 4.37*c* producirán los mismos efectos externos o reacciones en los apoyos que los producidos por el sistema de fuerzas, figura 4-37*a*.

4

## EJEMPLO 4.15

Reemplace el sistema de fuerza y par que actúa sobre el elemento de la figura 4-38*a* por una fuerza y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *O*.

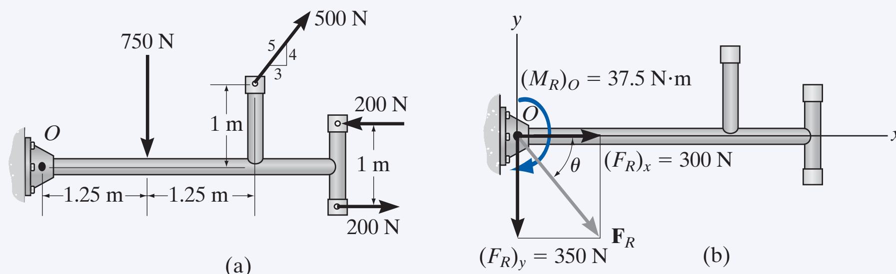



**Fig. 4-38**

### SOLUCIÓN

**Suma de fuerzas.** Como las fuerzas del par son de 200 N e iguales pero opuestas, producen una fuerza resultante nula, por lo tanto no es necesario considerarlas en la sumatoria de fuerzas. La fuerza de 500 N se descompone en sus componentes *x* y *y*, por tanto,

$$\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = \left(\tfrac{3}{5}\right)(500 \text{ N}) = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) - 750 \text{ N} = -350 \text{ N} = 350 \text{ N}\downarrow$$

A partir de la figura 4-15*b*, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$= \sqrt{(300 \text{ N})^2 + (350 \text{ N})^2} = 461 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Y el ángulo $\theta$ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350 \text{ N}}{300 \text{ N}}\right) = 49.4^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Suma de momentos.** Como el momento de par es un vector libre, puede actuar en cualquier punto del elemento. Con referencia a la figura 4-38*a*, tenemos

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M_c;$$

$$(M_R)_O = (500 \text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right)(2.5 \text{ m}) - (500 \text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right)(1 \text{ m})$$

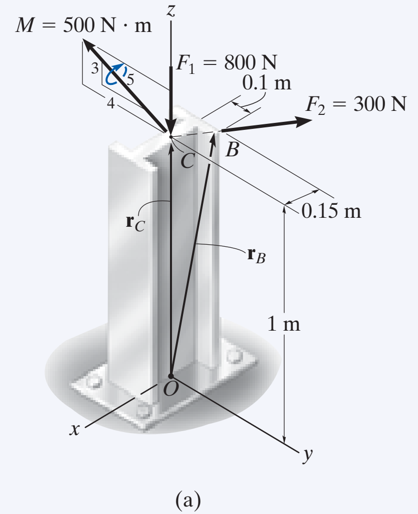
$$- (750 \text{ N})(1.25 \text{ m}) + 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$= -37.5 \text{ N}\cdot\text{m} = 37.5 \text{ N}\cdot\text{m} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

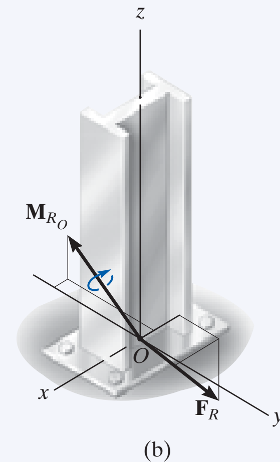
Este momento en el sentido de las manecillas del reloj se muestra en la figura 4-38*b*.

## EJEMPLO 4.16

El elemento estructural está sometido al momento de un par **M** y a las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ como se muestra en la figura 4-39*a*. Reemplace este sistema por una fuerza resultante equivalente y el momento de un par que actúen en su base, es decir el punto *O*.



(a)



(b)

**Fig. 4-39**

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

Los aspectos tridimensionales del problema pueden simplificarse mediante un análisis vectorial cartesiano. Al expresar las fuerzas y el momento de par como vectores cartesianos tenemos

$$\mathbf{F}_1 = \{-800\mathbf{k}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (300\text{ N})\mathbf{u}_{CB}$$

$$= (300\text{ N})\left(\frac{\mathbf{r}_{CB}}{r_{CB}}\right)$$

$$= 300\text{ N}\left[\frac{\{-0.15\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}\}\text{ m}}{\sqrt{(-0.15\text{ m})^2 + (0.1\text{ m})^2}}\right] = \{-249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}\}\text{ N}$$

$$\mathbf{M} = -500\left(\tfrac{4}{5}\right)\mathbf{j} + 500\left(\tfrac{3}{5}\right)\mathbf{k} = \{-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$

**Suma de fuerzas.**

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F};\qquad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -800\mathbf{k} - 249.6\mathbf{i} + 166.4\mathbf{j}$$

$$= \{-250\mathbf{i} + 166\mathbf{j} - 800\mathbf{k}\}\text{ N}$$ ***Resp.***

**Suma de momentos.**

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{M} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_{R_O} = (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (1\mathbf{k}) \times (-800\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) + (-166.4\mathbf{i} - 249.6\mathbf{j})$$

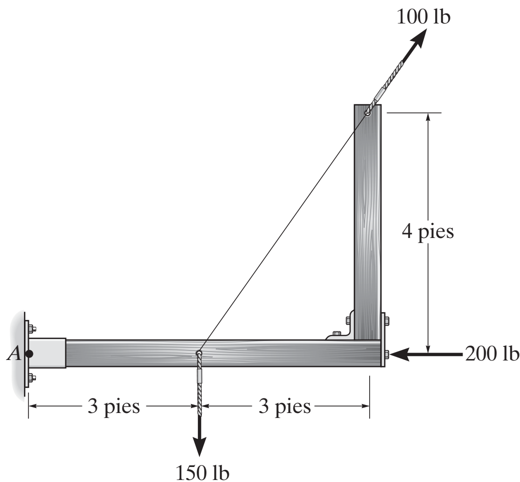
$$= \{-166\mathbf{i} - 650\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$$ ***Resp.***

Los resultados se muestran en la figura 4-39*b*.

4

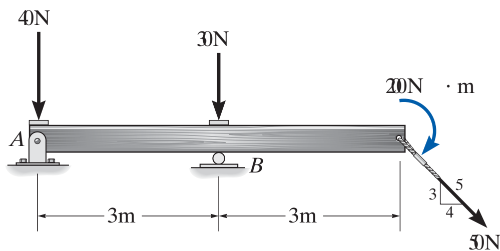
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F4-25.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *A*.



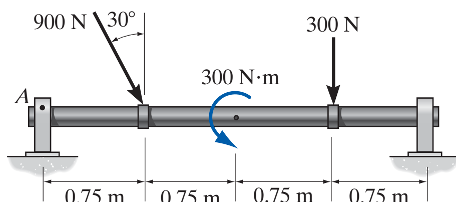

**F4-25**

**F4-26.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *A*.



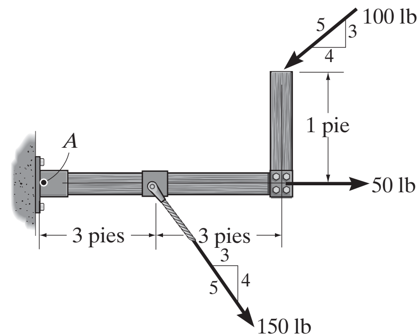

**F4-26**

**F4-27.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *A*.



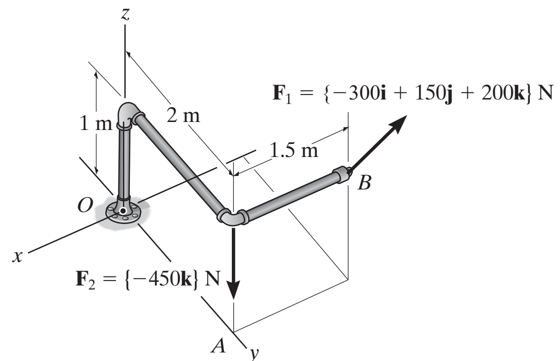

**F4-27**

**F4-28.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *A*.



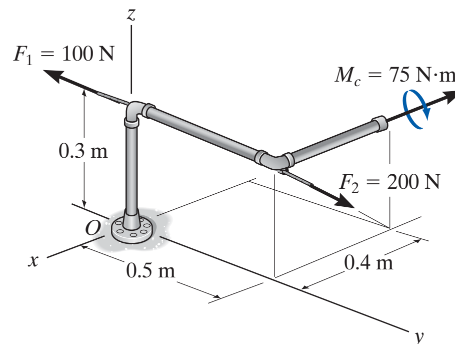

**F4-28**

**F4-29.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *O*.




**F4-29**

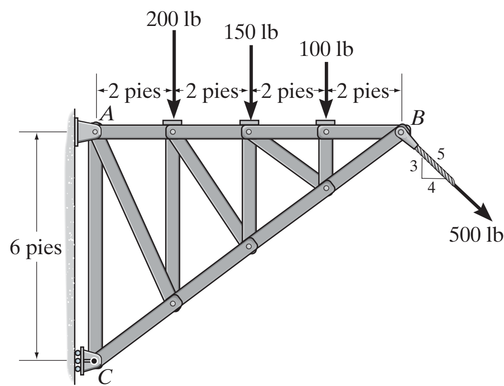
**F4-30.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto *O*.




**F4-30**

## PROBLEMAS

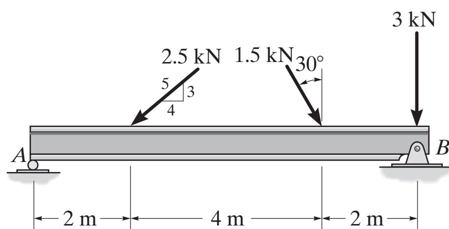
*__4-104.__ Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la armadura por una fuerza resultante y un momento de par en el punto *C*.




Prob. 4-104

**•4-105.** Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la viga por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto *A*.

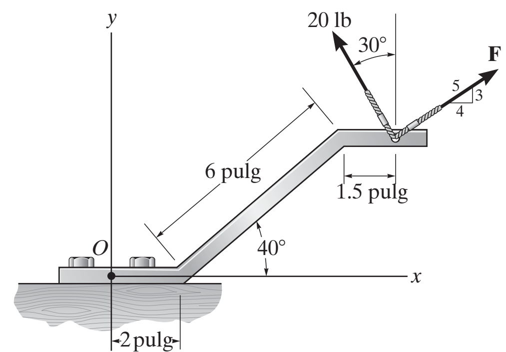
**4-106.** Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre la viga por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto *B*.




Probs. 4-105/106

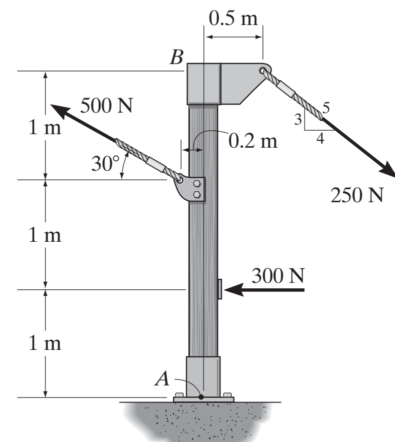
**4-107.** Reemplace las dos fuerzas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto *O*. Considere que $F = 20$ lb.

*__4-108.__ Reemplace las dos fuerzas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto *O*. Considere que $F = 15$ lb.



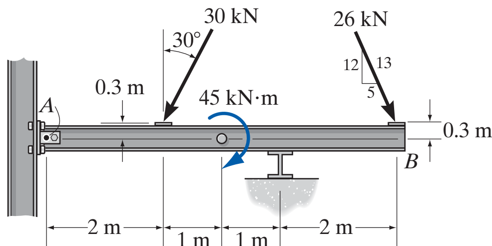

Probs. 4-107/108

**•4-109.** Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el poste por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto *A*.



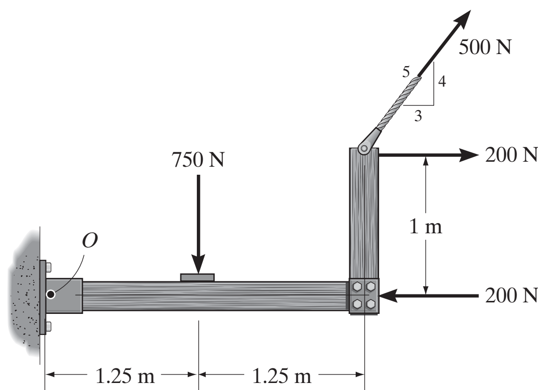

Prob. 4-109

**4-110.** Reemplace el sistema de fuerza y momento de par que actúa sobre la viga con voladizo por una fuerza resultante y un momento de par en el punto $A$.



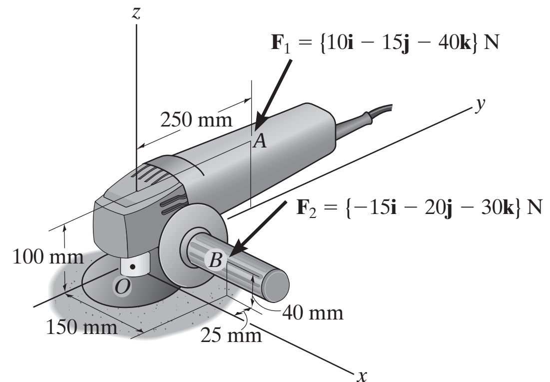

Prob. 4-110

**4-111.** Reemplace el sistema de fuerzas por una fuerza resultante y un momento de par en el punto $O$.



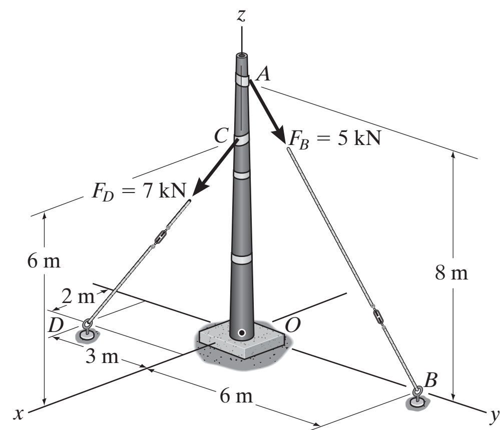

Prob. 4-111

***4-112.** Reemplace las dos fuerzas que actúan sobre la esmeriladora por una fuerza resultante y un momento de par en el punto $O$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.



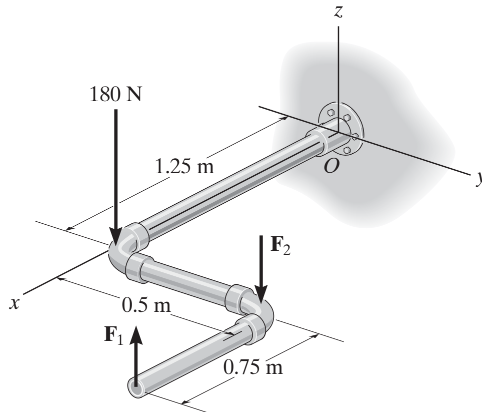

Prob. 4-112

**•4-113.** Reemplace las dos fuerzas que actúan sobre el poste por una fuerza resultante y un momento de par en el punto $O$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.



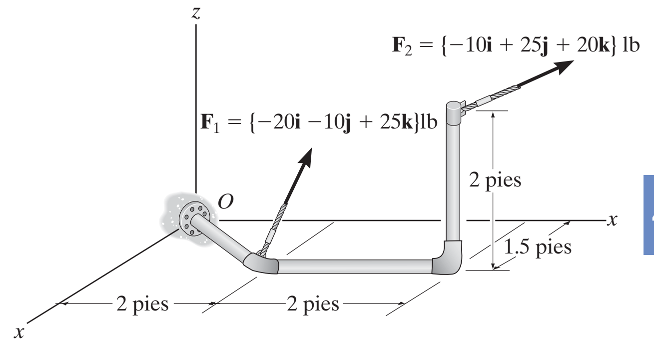

Prob. 4-113

**4-114.** Las tres fuerzas actúan sobre el ensamble de tubos. Si $F_1 = 50$ N y $F_2 = 80$ N, reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto $O$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.




Prob. 4-114

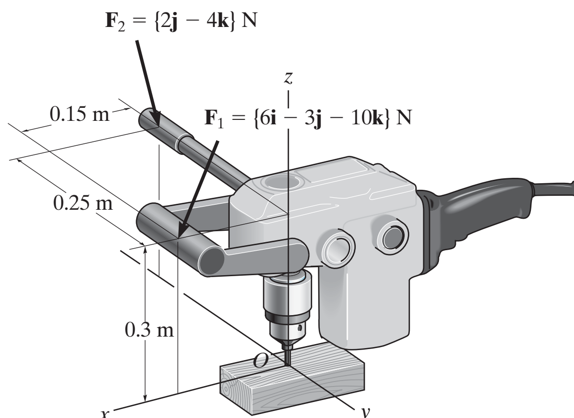
*4-116. Remplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el ensamble de tubos por una fuerza resultante y un momento de par en el punto $O$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.




Prob. 4-116

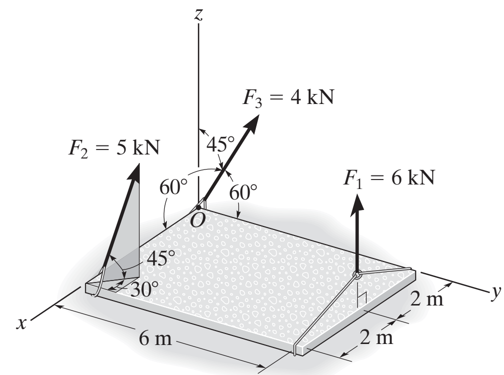


**4-115.** Las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de las manijas se aplican al taladro eléctrico. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes que actúen en el punto $O$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.




Prob. 4-115

•**4-117.** Se tiene que levantar la losa con las tres eslingas que se muestran. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre las eslingas por una fuerza y un momento de par equivalentes en el punto $O$. La fuerza $\mathbf{F}_1$ es vertical.




Prob. 4-117

## 4.8 Simplificación adicional de un sistema de fuerza y par

En la sección anterior desarrollamos una forma de reducir un sistema de fuerza y momento de par que actúa sobre un cuerpo rígido a una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ equivalente que actúa en un punto específico $O$ y un momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O$. El sistema de fuerzas puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante equivalente, siempre que las líneas de acción de $\mathbf{F}_R$ y $(\mathbf{M}_R)_O$ sean *perpendiculares* entre sí. Debido a esta condición, solamente los sistemas de fuerzas concurrentes, coplanares y paralelos se pueden simplificar aún más.

4

**Sistema de fuerzas concurrentes.** Como un *sistema de fuerzas concurrentes* es aquel en el que las líneas de acción de todas las fuerzas se intersecan en un punto común $O$, figura 4-40*a*; entonces, el sistema de fuerzas no produce ningún momento con respecto a este punto. En consecuencia, el sistema equivalente puede representarse mediante una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ que actúa en $O$, figura 4-40*b*.

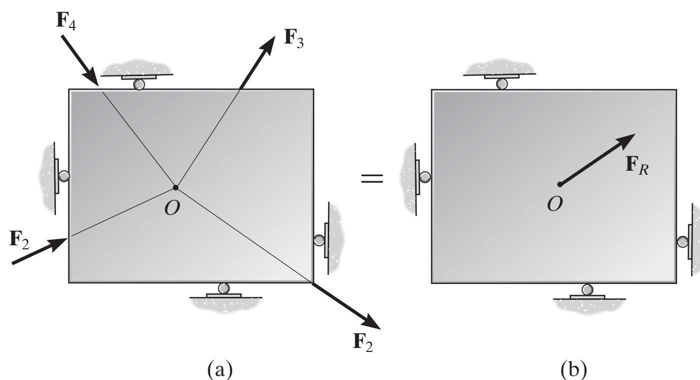



Fig. 4-40

**Sistema de fuerzas coplanares.** En el caso de un *sistema de fuerzas coplanares*, las líneas de acción de todas las fuerzas pertenecen al mismo plano, figura 4-41*a*, y por ende la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ de este sistema también se encuentra en el mismo plano. Aún más, el momento de cada una de las fuerzas con respecto a cualquier punto $O$ se dirige en forma perpendicular a este plano. Así, el momento resultante $(\mathbf{M}_R)_O$ y la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ serán *mutuamente perpendiculares*, figura 4-41*b*. El momento resultante se puede remplazar al mover la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ a un brazo de momento o distancia perpendicular $d$ del punto $O$, de tal forma que $\mathbf{F}_R$ produzca el *mismo momento* $(\mathbf{M}_R)_O$ con respecto al punto $O$, figura 4-41*c*. Esta distancia $d$ se puede determinar a partir de la ecuación escalar $(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O$ o bien $d = (M_R)_O/F_R$.

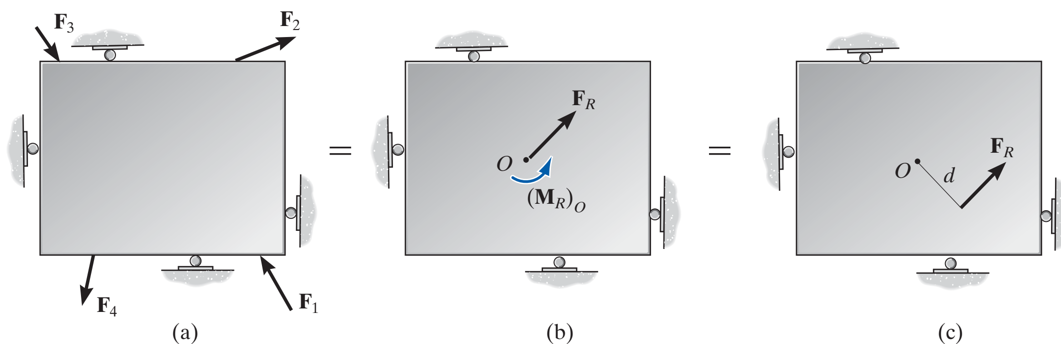



Fig. 4-41



**Sistema de fuerzas paralelas.** El *sistema de fuerzas paralelas* que se muestra en la figura 4-42*a* consta de fuerzas que son paralelas al eje *z*. Así, la fuerza resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$ en el punto $O$ también debe ser paralela a este eje, figura 4-42*b*. El momento producido por cada fuerza se encuentra en el plano de la placa, por lo que el momento del par resultante, $(\mathbf{M}_R)_O$, también estará en este plano, a lo largo del eje de momento $a$ puesto que $\mathbf{F}_R$ y $(\mathbf{M}_R)_O$ son mutuamente perpendiculares. En consecuencia, el sistema de fuerzas se puede reducir aún más a una sola fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R$, la cual actúa a través del punto $P$ localizado sobre el eje perpendicular $b$, figura 4-42*c*. Para encontrar la distancia $d$ a lo largo de este eje desde el punto $O$, se emplea $(M_R)_O = F_R d = \Sigma M_O$ o bien $d = \Sigma M_O/F_R$.

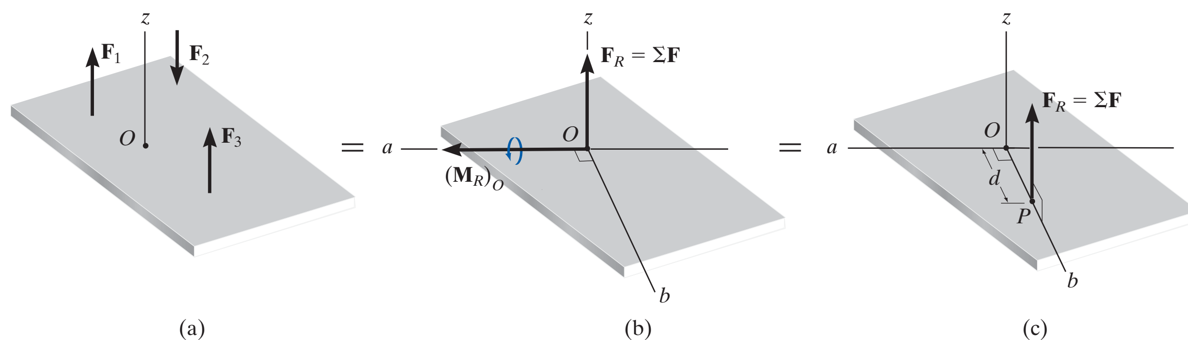



Fig. 4-42




Las cuatro fuerzas de los cables son concurrentes en el punto $O$ que se encuentra en la torre de este puente. En consecuencia, no producen un momento resultante ahí, sólo una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. Observe que los diseñadores han colocado los cables de manera que $\mathbf{F}_R$ esté dirigida *a lo largo* de la torre del puente y directamente hacia el apoyo, de modo que no cause ninguna flexión de la torre.

4

## Procedimiento para el análisis

La técnica para reducir un sistema de fuerzas coplanares o paralelas a una sola fuerza resultante sigue un procedimiento similar al descrito en la sección anterior.

- Establezca los ejes $x$, $y$, $z$ y localice la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ a una distancia arbitraria del origen de coordenadas.

### Suma de fuerzas.

- La fuerza resultante es igual a la suma de todas las fuerzas en el sistema.
- Para un sistema de fuerzas coplanares, descomponga cada fuerza en sus componentes $x$ y $y$. Las componentes positivas están dirigidas a lo largo de los ejes $x$ y $y$ positivos, y las componentes negativas están dirigidas a lo largo de los ejes $x$ y $y$ negativos.

### Suma de momentos.

- El momento de la fuerza resultante con respecto al punto $O$ es igual a la suma de todos los momentos de par en el sistema, más los momentos con respecto al punto $O$ de todas las fuerzas del sistema.
- Esta condición de momento se usa para encontrar la ubicación de la fuerza resultante desde el punto $O$.




Aquí, los pesos de los semáforos se reemplazan por su fuerza resultante $W_R = W_1 + W_2$ que actúa a una distancia $d = (W_1d_1 + W_2d_2)/W_R$ desde $O$. Ambos sistemas son equivalentes.



**Reducción a una llave.** En general, un sistema tridimensional de fuerzas y momentos de par tendrá una fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R$ que actuará en el punto $O$ y un momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O$ que *no son perpendiculares* entre sí, como se muestra en la figura 4-43*a*. Aunque un sistema de fuerzas como éste no se puede reducir aún más a una sola fuerza resultante equivalente, el momento de par resultante $(\mathbf{M}_R)_O$ se puede descomponer en sus componentes paralela y perpendicular a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$, figura 4-43*a*. La componente perpendicular $\mathbf{M}_\perp$ se puede reemplazar si movemos $\mathbf{F}_R$ al punto $P$, a una distancia $d$ desde el punto $O$ a lo largo del eje $b$, figura 4-43*b*. Como se ha visto, este eje es perpendicular tanto al eje $a$ como a la línea de acción de $\mathbf{F}_R$. La ubicación de $P$ puede determinarse a partir de $d = M_\perp/F_R$. Por último, debido a que $\mathbf{M}_\|$ es un vector libre, puede moverse hasta el punto $P$, figura 4-43*c*. Esta combinación de una fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ y un momento de par colineal $\mathbf{M}_\|$ tenderá a rotar y trasladar el cuerpo con respecto a su eje, lo cual se denomina *llave* o *tornillo*. Una llave es el sistema más simple que puede usarse para representar cualquier sistema general de fuerza y momento de par que actúa sobre un cuerpo.

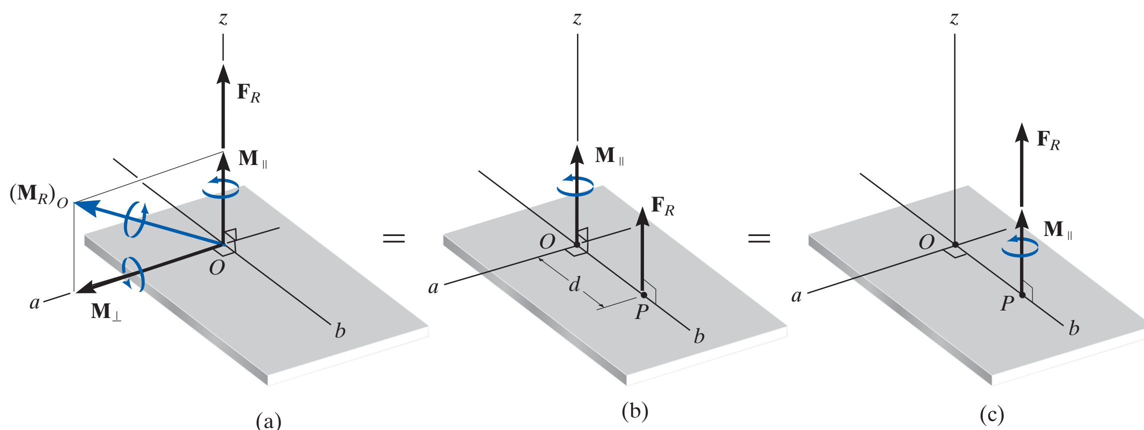



**Fig. 4-43**

## EJEMPLO 4.17

Reemplace el sistema de fuerza y momento de par que actúa sobre la viga de la figura 4-44*a* por una fuerza resultante equivalente y encuentre la distancia, medida desde el punto $O$, en la que su línea de acción interseca con la viga.

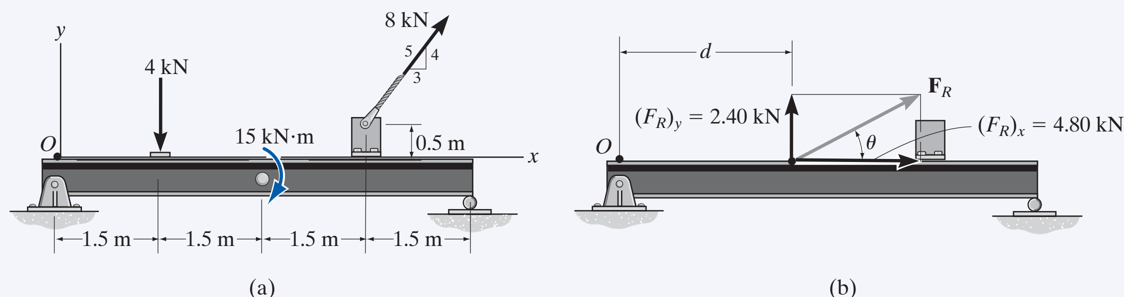



**Fig. 4-44**

4

### SOLUCIÓN

**Suma de fuerzas.** Si sumamos las componentes de fuerza,

$$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = 8\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 4.80\text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow(F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = -4\text{ kN} + 8\text{ kN}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 2.40\text{ kN}\uparrow$$

Con base en la figura 4-44*b*, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$F_R = \sqrt{(4.80\text{ kN})^2 + (2.40\text{ kN})^2} = 5.37\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

El ángulo $\theta$ es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.40\text{ kN}}{4.80\text{ kN}}\right) = 26.6^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

**Suma de momentos.** Debemos igualar el momento de $\mathbf{F}_R$ respecto al punto $O$ de la figura 4-44*b* con la suma de los momentos del sistema de fuerza y momento de par respecto al punto $O$ que se muestra en la figura 4-44*a*. Como la línea de acción de $(\mathbf{F}_R)_x$ actúa a través del punto $O$, *sólo* $(\mathbf{F}_R)_y$ *produce un momento* con respecto a este punto. Por lo tanto,

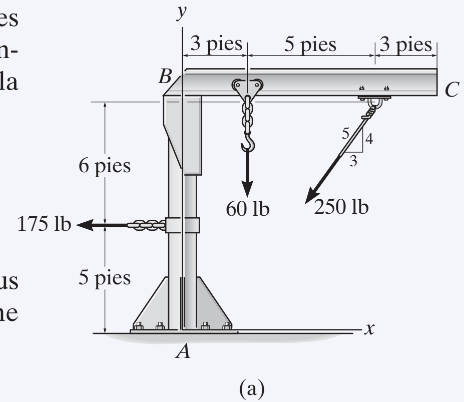
$$\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma M_O; \quad 2.40\text{ kN}(d) = -(4\text{ kN})(1.5\text{ m}) - 15\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$-\left[8\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right)\right](0.5\text{ m}) + \left[8\text{ kN}\left(\tfrac{4}{5}\right)\right](4.5\text{ m})$$

$$d = 2.25\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 4.18

La grúa fija que se muestra en la figura 4-45*a* está sometida a tres fuerzas coplanares. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique en qué punto la línea de acción de la resultante interseca a la columna *AB* y a la pluma *BC*.




### SOLUCIÓN

**Suma de fuerzas.** Al descomponer la fuerza de 250 lb en sus componentes *x* y *y* y al sumar las componentes de fuerza se obtiene

$$\xrightarrow{+} F_{R_x} = \Sigma F_x;\quad F_{R_x} = -250 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right) - 175 \text{ lb} = -325 \text{ lb} = 325 \text{ lb} \leftarrow$$

$$+\uparrow F_{R_y} = \Sigma F_y;\quad F_{R_y} = -250 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right) - 60 \text{ lb} = -260 \text{ lb} = 260 \text{ lb}\downarrow$$

Como se muestra en la figura 4-45*b*, mediante la suma vectorial,

$$F_R = \sqrt{(325 \text{ lb})^2 + (260 \text{ lb})^2} = 416 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{260 \text{ lb}}{325 \text{ lb}}\right) = 38.7^\circ\ \theta \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

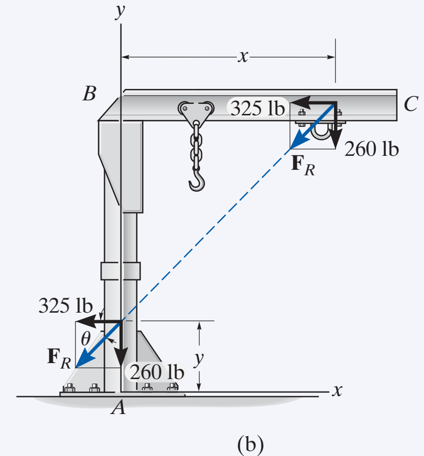



**Fig. 4-45**

**Suma de momentos.** Los momentos se sumarán con respecto al punto *A*. Suponiendo que la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ *interseca AB* a una distancia *y* desde *A*, figura 4-45*b*, tenemos

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A;\qquad 325 \text{ lb}\,(y) + 260 \text{ lb}\,(0)$$

$$= 175 \text{ lb}\,(5 \text{ pies}) - 60 \text{ lb}\,(3 \text{ pies}) + 250 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right)(11 \text{ pies}) - 250 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right)(8 \text{ pies})$$

$$y = 2.29 \text{ pies} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Por el principio de transmisibilidad, $\mathbf{F}_R$ puede colocarse a una distancia *x* donde interseca a *BC*, figura 4-45*b*. En este caso tenemos

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A;\qquad 325 \text{ lb}\,(11 \text{ pies}) - 260 \text{ lb}\,(x)$$

$$= 175 \text{ lb}\,(5 \text{ pies}) - 60 \text{ lb}\,(3 \text{ pies}) + 250 \text{ lb}\left(\tfrac{3}{5}\right)(11 \text{ pies}) - 250 \text{ lb}\left(\tfrac{4}{5}\right)(8 \text{ pies})$$

$$x = 10.9 \text{ pies} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

4

4

## EJEMPLO 4.19

La losa que se muestra en la figura 4-46*a* está sometida a cuatro fuerzas paralelas. Determine la magnitud y la dirección de una fuerza resultante equivalente al sistema de fuerzas dado y localice su punto de aplicación sobre la losa.

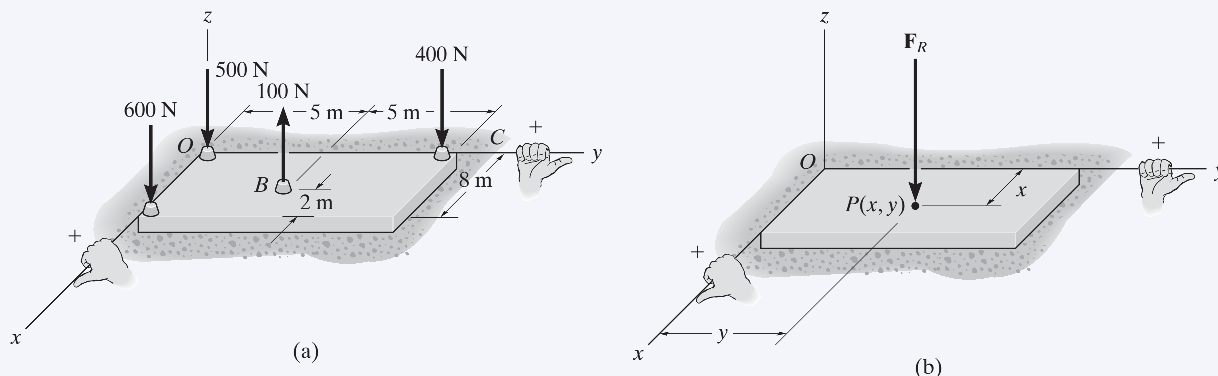



**Fig. 4-46**

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS ESCALAR)*

**Suma de fuerzas.** A partir de la figura 4-46*a*, la fuerza resultante es

$$+\uparrow F_R = \Sigma F; \qquad -F_R = -600\text{ N} + 100\text{ N} - 400\text{ N} - 500\text{ N}$$
$$= -1400\text{ N} = 1400\text{ N}\downarrow \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

**Suma de momentos.** Requerimos que el momento con respecto al eje *x* de la fuerza resultante, figura 4-46*b*, sea igual a la suma de los momentos con respecto al eje *x* de todas las fuerzas presentes en el sistema, figura 4-46*a*. Los brazos de momento se determinan a partir de las coordenadas *y*, dado que esas coordenadas representan las *distancias perpendiculares* desde el eje *x* hasta las líneas de acción de las fuerzas. Si usamos la regla de la mano derecha, tenemos

$$(M_R)_x = \Sigma M_x;$$
$$-(1400\text{ N})y = 600\text{ N}(0) + 100\text{ N}(5\text{ m}) - 400\text{ N}(10\text{ m}) + 500\text{ N}(0)$$
$$-1400y = -3500 \qquad y = 2.50\text{ m} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

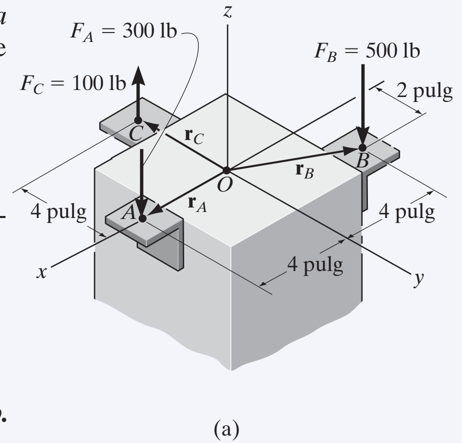
Del mismo modo, una ecuación de momentos se puede escribir con respecto al eje *y* mediante brazos de momento definidos por las coordenadas *x* de cada fuerza.

$$(M_R)_y = \Sigma M_y;$$
$$(1400\text{ N})x = 600\text{ N}(8\text{ m}) - 100\text{ N}(6\text{ m}) + 400\text{ N}(0) + 500\text{ N}(0)$$
$$1400x = 4200$$
$$x = 3\text{ m} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

**NOTA:** por lo tanto, una fuerza de $F_R = 1400$ N colocada en el punto $P(3.00\text{ m}, 2.50\text{ m})$ sobre la losa, figura 4-46*b*, es equivalente al sistema de fuerzas paralelas que actúa sobre la losa en la figura 4-46*a*.

## EJEMPLO 4.20

Reemplace el sistema de fuerzas que se muestra en la figura 4-47*a* por una fuerza resultante equivalente y especifique su punto de aplicación sobre el pedestal.




(a)

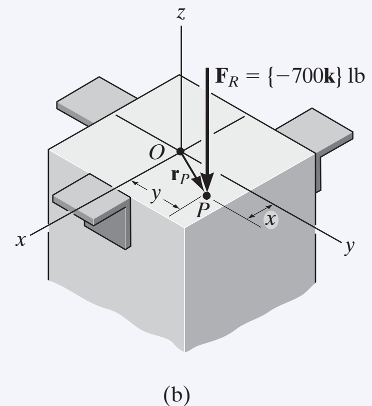
### SOLUCIÓN

**Suma de fuerzas.** A continuación mostraremos un análisis vectorial. Al sumar fuerzas,

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C$$
$$= \{-300\mathbf{k}\}\text{ lb} + \{-500\mathbf{k}\}\text{ lb} + \{100\mathbf{k}\}\text{ lb}$$
$$= \{-700\mathbf{k}\}\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

**Ubicación.** Los momentos se sumarán con respecto al punto $O$. Se supone que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ actúa a través del punto $P(x, y, 0)$, figura 4-47*b*. Así,

$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma\mathbf{M}_O;$$
$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_R = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A) + (\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B) + (\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C)$$
$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (-700\mathbf{k}) = [(4\mathbf{i}) \times (-300\mathbf{k})]$$
$$+ [(-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (-500\mathbf{k})] + [(-4\mathbf{j}) \times (100\mathbf{k})]$$
$$-700x(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) - 700y(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -1200(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 2000(\mathbf{i} \times \mathbf{k})$$
$$- 1000(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 400(\mathbf{j} \times \mathbf{k})$$
$$700x\mathbf{j} - 700y\mathbf{i} = 1200\mathbf{j} - 2000\mathbf{j} - 1000\mathbf{i} - 400\mathbf{i}$$




(b)

**Fig. 4-47**

Al igualar las componentes de **i** y **j**,

$$-700y = -1400 \qquad (1)$$
$$y = 2\text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$
$$700y = -800 \qquad (2)$$
$$x = -1.14\text{ pulg} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que la coordenada $x$ del punto $P$ es negativa.

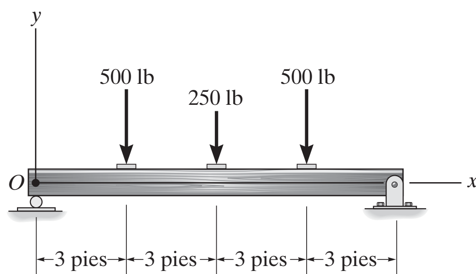
**NOTA:** también es posible establecer directamente las ecuaciones 1 y 2 al sumar los momentos con respecto a los ejes $x$ y $y$. Con la regla de la mano derecha, tenemos

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \qquad -700y = -100\text{ lb}(4\text{ pulg}) - 500\text{ lb}(2\text{ pulg})$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 700x = 300\text{ lb}(4\text{ pulg}) - 500\text{ lb}(4\text{ pulg})$$

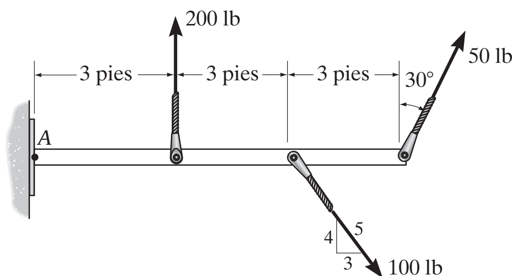
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F4-31.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $O$, donde la línea de acción de la resultante interseca a la viga.



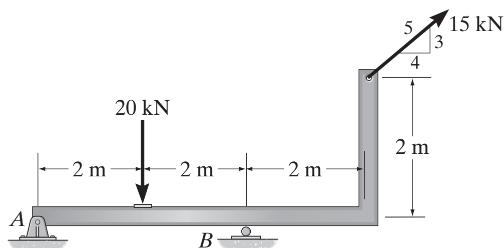

**F4-31**

**F4-32.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $A$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento.



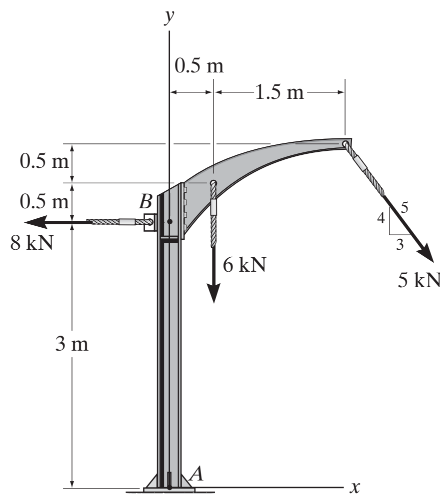

**F4-32**

**F4-33.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $A$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento.



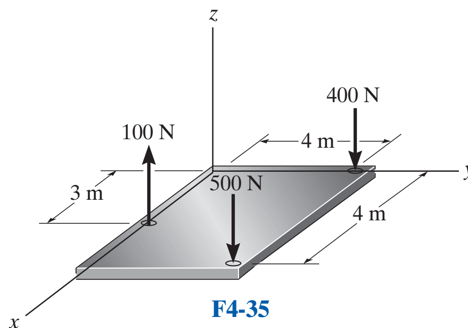

**F4-33**

**F4-34.** Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $A$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento $AB$.



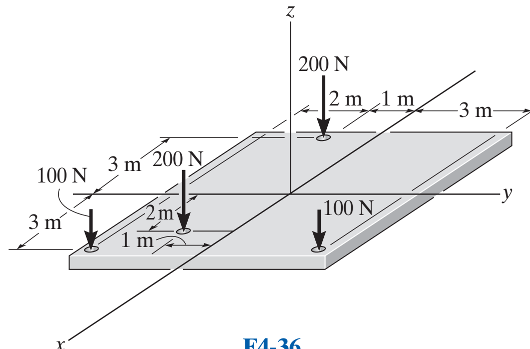

**F4-34**

**F4-35.** Reemplace las cargas mostradas por una sola fuerza resultante equivalente y especifique las coordenadas $x$ y $y$ de su línea de acción.




**F4-35**

**F4-36.** Reemplace las cargas mostradas por una sola fuerza resultante equivalente y especifique las coordenadas $x$ y $y$ de su línea de acción.

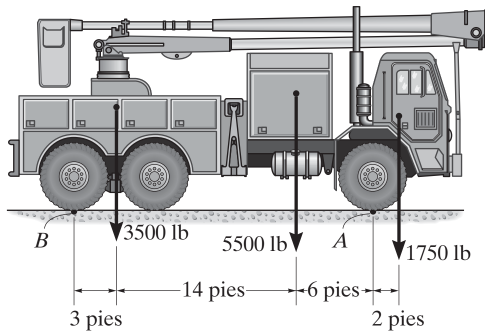



**F4-36**

## PROBLEMAS

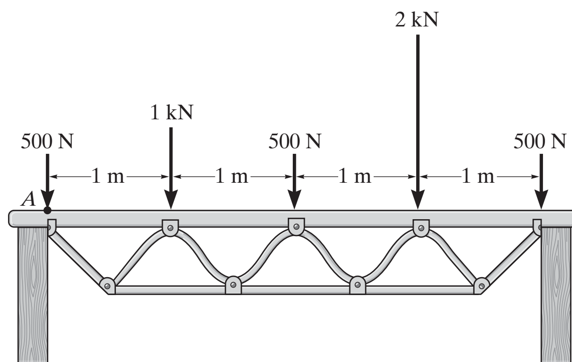
**4-118.** Se muestran los pesos de los diferentes componentes del camión. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación medida desde $B$.

**4-119.** Se muestran los pesos de los diferentes componentes del camión. Reemplace este sistema de fuerzas por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación medida desde el punto $A$.



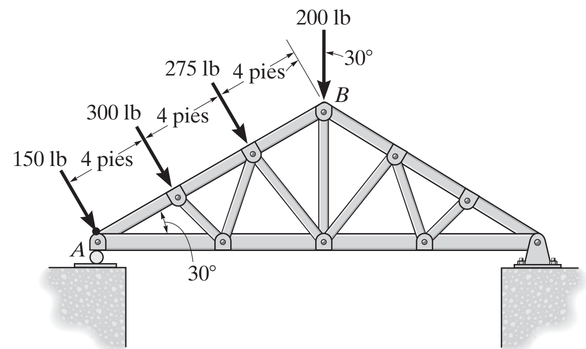

**Probs. 4-118/119**

*__4-120.__ El sistema de fuerzas paralelas actúa sobre la parte superior de la *armadura Warren*. Determine la fuerza resultante equivalente del sistema y especifique su ubicación medida desde el punto $A$.




**Prob. 4-120**

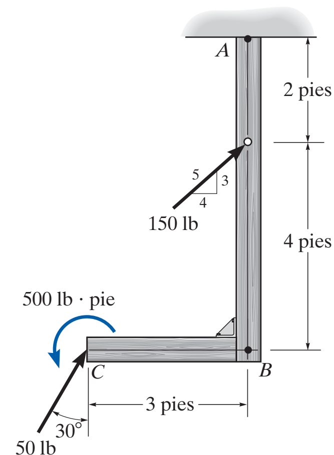
•**4-121.** El sistema de cuatro fuerzas actúa sobre la armadura para techo. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación a lo largo de $AB$ y medida desde el punto $A$.




**Prob. 4-121**

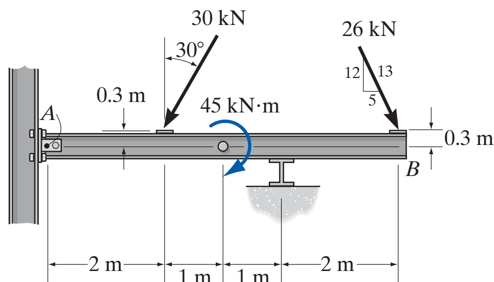
**4-122.** Reemplace el sistema de fuerza y par que actúa sobre el bastidor por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $A$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento $AB$.

**4-123.** Reemplace el sistema de fuerza y par que actúa sobre el bastidor por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde $B$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento $BC$.




**Probs. 4-122/123**

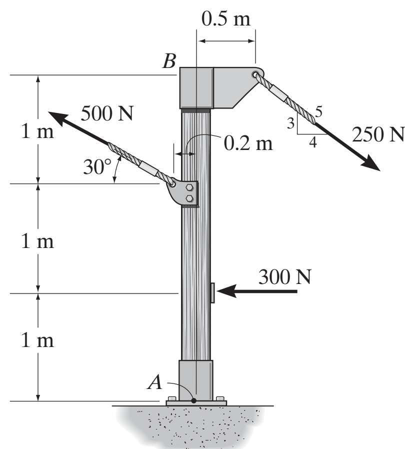
*4-124. Reemplace el sistema de fuerza y momento de par que actúa sobre la viga con voladizo por una fuerza resultante, además especifique su ubicación medida desde el punto $A$ a lo largo de $AB$.




Prob. 4-124

4-127. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el poste por una fuerza resultante y especifique el punto, medido desde el punto $A$, donde su línea de acción interseca al poste $AB$.

*4-128. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el poste por una fuerza resultante y especifique el punto, medido desde el punto $B$, donde su línea de acción interseca al poste $AB$.

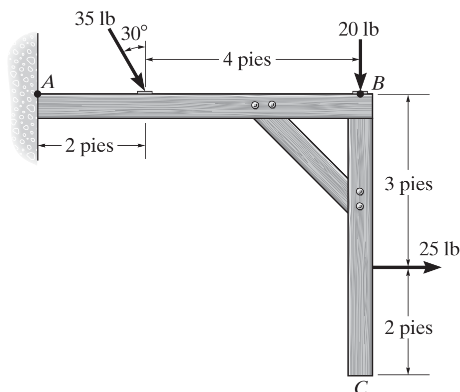



Probs. 4-127/128



•4-125. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el bastidor por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde el punto $A$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento $AB$.

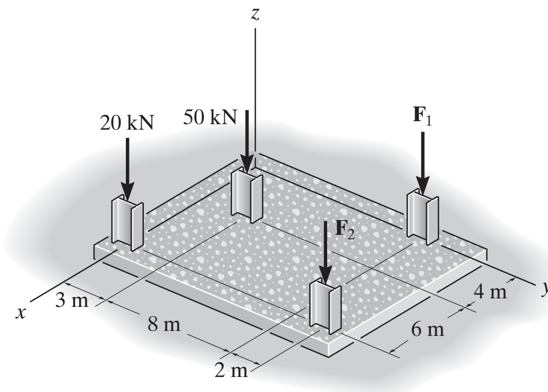
4-126. Reemplace el sistema de fuerzas que actúa sobre el bastidor por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde el punto $B$, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento $BC$.




Probs. 4-125/126

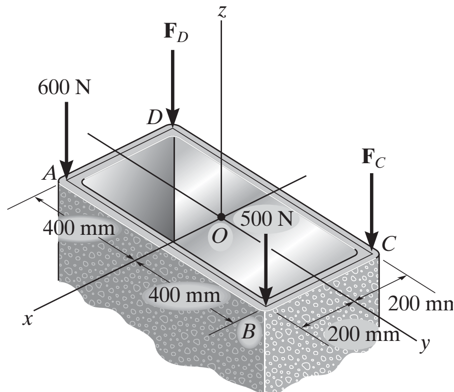
•4-129. La losa de un edificio está sometida a cuatro cargas de columnas paralelas. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación $(x, y)$ sobre la losa. Considere que $F_1 = 30$ kN y $F_2 = 40$ kN.

4-130. La losa de un edificio está sometida a cuatro cargas de columnas paralelas. Determine la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación $(x, y)$ sobre la losa. Considere que $F_1 = 20$ kN y $F_2 = 50$ kN.




Probs. 4-129/130

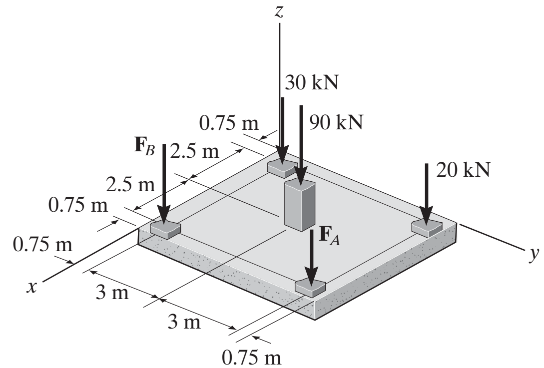
**4.131.** El ducto soporta las cuatro fuerzas paralelas. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_C$ y $\mathbf{F}_D$ que actúan en $C$ y $D$ de manera que la fuerza resultante equivalente al sistema de fuerzas actúe a través del punto medio $O$ del ducto.




Prob. 4-131

**4-134.** Si $F_A = 40$ kN y $F_B = 35$ kN, determine la magnitud de la fuerza resultante y especifique la ubicación de su punto de aplicación $(x, y)$ sobre la losa.

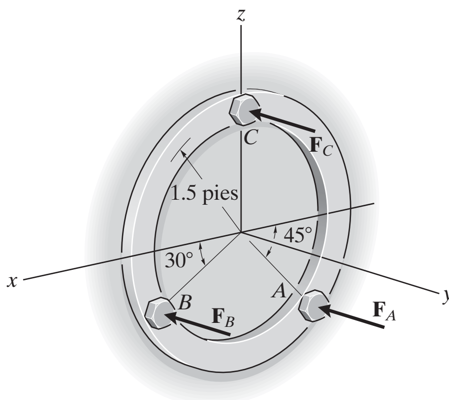
**4-135.** Si se requiere que la fuerza resultante actúe en el centro de la losa, determine la magnitud de las cargas de columna $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ así como la magnitud de la fuerza resultante.




Probs. 4-134/135

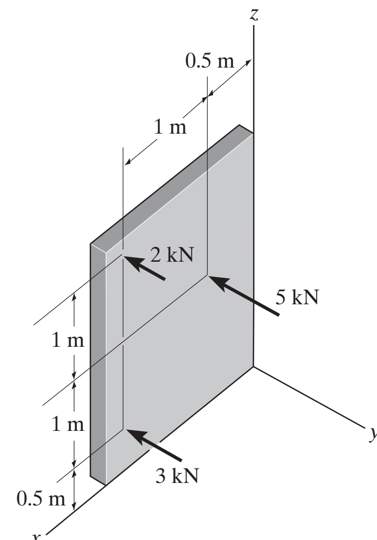
*4-132. Tres fuerzas paralelas de atornillado actúan sobre la placa circular. Determine la fuerza resultante y especifique su ubicación $(x, y)$ sobre la placa. $F_A = 200$ lb, $F_B = 100$ lb y $F_C = 400$ lb.

•4-133. Las tres fuerzas paralelas de atornillado actúan sobre la placa circular. Si la fuerza en $A$ tiene una magnitud de $F_A = 200$ lb, determine las magnitudes de $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ de manera que la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ del sistema tenga una línea de acción que coincida con el eje $y$. *Sugerencia:* se requiere que $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma M_z = 0$.




Probs. 4-132/133

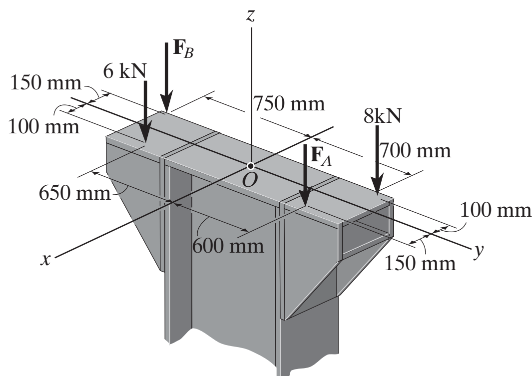
*4-136. Reemplace el sistema de fuerzas paralelas que actúa sobre la placa por una fuerza resultante y especifique su ubicación sobre el plano $x$-$z$.




Prob. 4-136

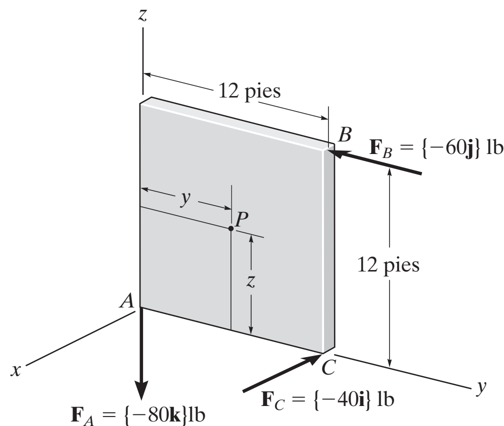
**•4-137.** Si $F_A = 7$ kN y $F_B = 5$ kN, represente el sistema de fuerzas que actúa sobre los voladizos mediante una fuerza resultante y especifique su ubicación sobre el plano *x*-*y*.

**4-138.** Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ de modo que la fuerza resultante pase a través del punto *O* de la columna.



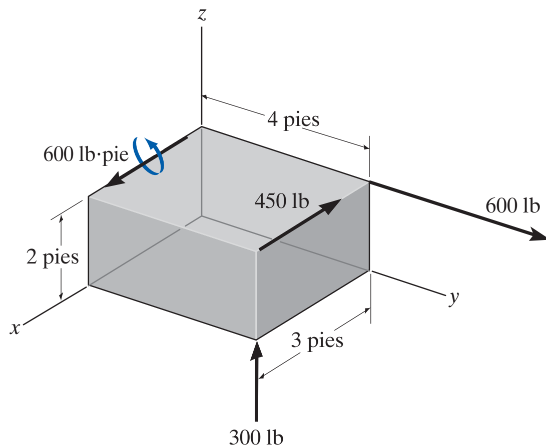

**Probs. 4-137/138**

***4-140.** Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y del momento de par para la llave, así como el punto *P*(*y*, *z*) donde su línea de acción interseca la placa.



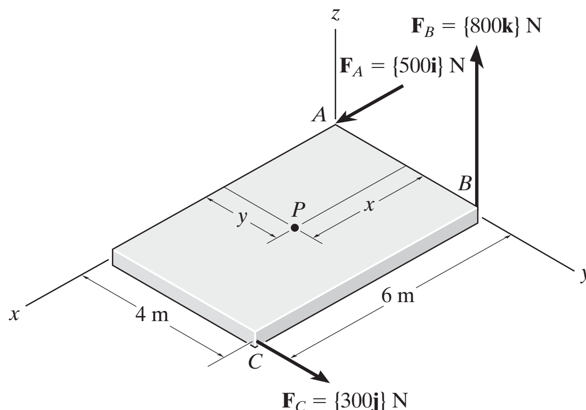

**Prob. 4-140**

**4-139.** Reemplace el sistema de fuerza y momento de par que actúa sobre el bloque rectangular por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y del momento de par de la llave, así como el punto donde su línea de acción interseca el plano *x*-*y*.



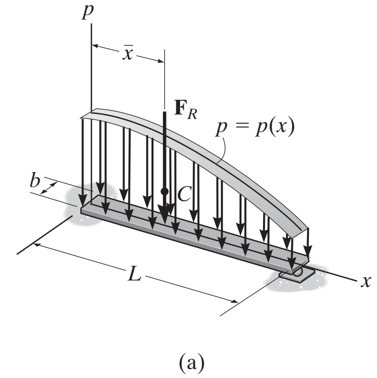

**Prob. 4-139**

**•4-141.** Reemplace las tres fuerzas que actúan sobre la placa por una llave. Especifique la magnitud de la fuerza y del momento de par para la llave, así como el punto *P*(*x*, *y*) donde su línea de acción interseca la placa.




**Prob. 4-141**

# 4.9 Reducción de una carga simple distribuida

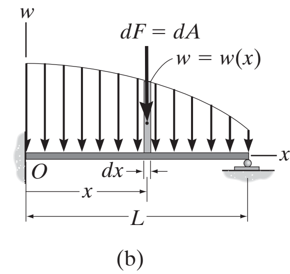


(a)

En ocasiones, un cuerpo puede estar sometido a una carga que se encuentra distribuida por toda su superficie. Por ejemplo, la presión del viento sobre la superficie de un señalamiento, la presión del agua dentro de un tanque, o el peso de la arena sobre el piso de un contenedor de almacenaje, son todas *cargas distribuidas*. La presión ejercida sobre cada punto de la superficie indica la intensidad de la carga. Ésta se mide por pascales Pa (o $N/m^2$) en unidades SI o $lb/pie^2$ en el sistema de uso común en Estados Unidos.

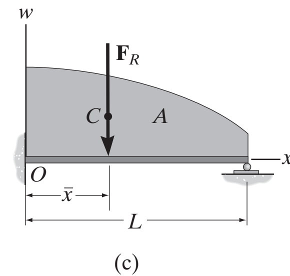


**Carga uniforme a lo largo de un solo eje.** El tipo más común de carga distribuida que se encuentra en la práctica de la ingeniería es una carga uniforme a lo largo de un solo eje*. Por ejemplo, considere la viga (o placa) de la figura 4-48*a* que tiene un ancho constante y está sometida a una carga de presión que varía sólo a lo largo del eje $x$. Esta carga se puede describir mediante la función $p = p(x)$ $N/m^2$. Contiene sólo una variable $x$, y por esa razón también podemos representarla como una *carga distribuida coplanar*. Para esto, multiplicamos la función de carga por el ancho $b$ m de la viga, de modo que $w(x) = p(x)b$ N/m, figura 4-48*b*. Con los métodos de la sección 4.8, podemos reemplazar este sistema de fuerzas paralelas coplanares por una sola fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R$ que actúa en una ubicación específica sobre la viga, figura 4-48*c*.



(b)

**Magnitud de la fuerza resultante.** A partir de la ecuación 4-17 ($F_R = \Sigma F$), la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es equivalente a la suma de todas las fuerzas en el sistema. En este caso, debemos usar integración puesto que hay un número infinito de fuerzas paralelas $d\mathbf{F}$ que actúan sobre la viga, figura 4-48*b*. Como $d\mathbf{F}$ actúa sobre un elemento de longitud $dx$, y $w(x)$ es una fuerza por unidad de longitud, entonces $dF = w(x)\,dx = dA$. En otras palabras, la magnitud de $d\mathbf{F}$ se determina a partir del *área* diferencial sombreada $dA$ bajo la curva de carga. Para toda la longitud $L$.



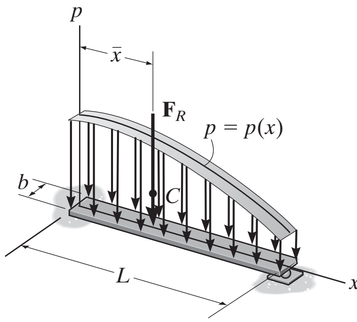
(c)

**Fig. 4-48**

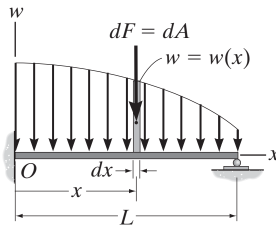
$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A \qquad (4\text{-}19)$$

*Por consiguiente, la magnitud de la fuerza resultante es igual al área total A bajo el diagrama de carga*, figura 4-48*c*.

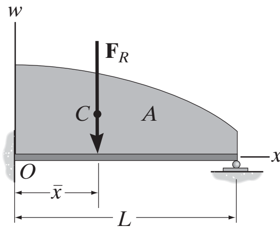
*El caso más general de una superficie con carga no uniforme que actúa sobre un cuerpo está considerado en la sección 9.5.




(a)




(b)




(c)

4

**Ubicación de la fuerza resultante.** Aplicando la ecuación 4-17 ($\mathbf{M}_{Ro} = \Sigma \mathbf{M}_O$), la ubicación $\bar{x}$ de la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ puede determinarse igualando los momentos de la fuerza resultante y de la distribución de fuerzas con respecto al punto $O$ (el eje $y$). Como $d\mathbf{F}$ produce un momento de $x\,dF = xw(x)\,dx$ con respecto a $O$, figura 4-48*b*, entonces, para toda la longitud, figura 4-48*c*.

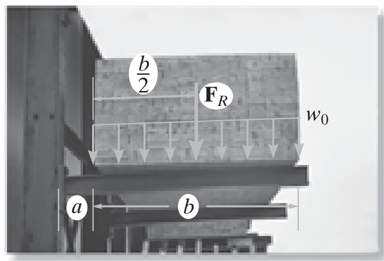
$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \qquad -\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)\,dx$$

Al despejar $\bar{x}$ de la ecuación 4-19, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_L xw(x)\,dx}{\displaystyle\int_L w(x)\,dx} = \frac{\displaystyle\int_A x\,dA}{\displaystyle\int_A dA} \qquad (4\text{-}20)$$

Esta coordenada $\bar{x}$, ubica el centro geométrico o *centroide* del *área* bajo el diagrama de carga distribuida. *En otras palabras, la fuerza resultante tiene una línea de acción que pasa por el centroide C (centro geométrico) del área bajo el diagrama de carga*, figura 4-48*c*. En el capítulo 9 se proporciona un tratamiento detallado de las técnicas de integración para encontrar la ubicación de centroides de áreas. Sin embargo, en muchos casos el diagrama de carga distribuida tiene la forma de un rectángulo, de un triángulo, o algún otro cuerpo geométrico simple. La ubicación de los centroides para formas tan comunes no tiene que determinarse con la ecuación anterior sino que pueden obtenerse directamente de las tablas que aparecen en el forro interior de la contraportada de este libro.

Una vez determinada $\bar{x}$, por simetría, $\mathbf{F}_R$ pasa a través del punto ($\bar{x}$, 0) sobre la superficie de la viga, figura 4-48*a*. *Por lo tanto, en este caso, la fuerza resultante tiene una magnitud igual al volumen bajo la curva de carga $p = p(x)$ y una línea de acción que pasa por el centroide (centro geométrico) de este volumen.*




La viga que soporta esta pila de madera está sometida a una carga uniforme de $w_0$. Por lo tanto, la fuerza resultante es igual al área bajo el diagrama de carga $F_R = w_0 b$. Esta fuerza actúa a través del centroide o centro geométrico del área, a una distancia $b/2$ desde el soporte.

## Puntos importantes

- Las cargas distribuidas coplanares se definen con una función de carga $w = w(x)$ que indica la intensidad de la carga a lo largo de la longitud del elemento. Esta intensidad se mide en N/m o lb/pie.
- Los efectos externos causados por una carga distribuida coplanar que actúa sobre un cuerpo pueden representarse por medio de una sola fuerza resultante.
- Esta fuerza resultante es equivalente al *área* bajo el diagrama de carga, y tiene una línea de acción que pasa por el *centroide* o centro geométrico de esta área.

## EJEMPLO 4.21

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante equivalente que actúa sobre la flecha de la figura 4-49*a*.

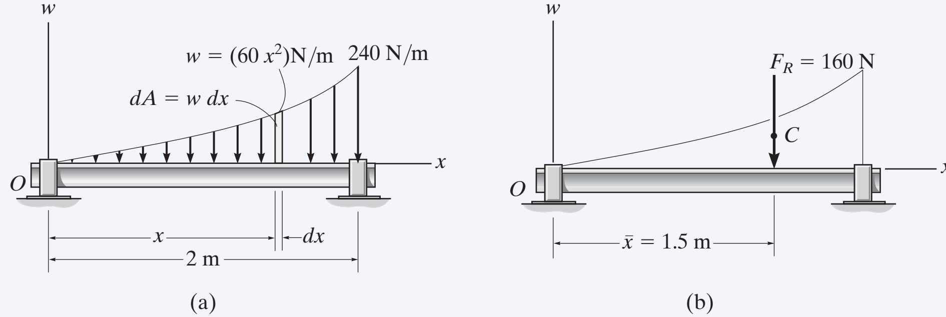



**Fig. 4-49**

### SOLUCIÓN

Como $w = w(x)$ está dada, este problema se resolverá por integración.

El elemento diferencial tiene un área $dA = w\,dx = 60x^2\,dx$. Si se aplica la ecuación 4-19,

$$+\downarrow F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^{2\text{ m}} 60x^2\,dx = 60\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\text{ m}} = 60\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= 160\text{ N}$$ ***Resp.***

La ubicación $\bar{x}$ de $\mathbf{F}_R$ medida desde $O$, figura 4-49*b*, se determina con la ecuación 4-20.

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{2\text{ m}} x(60x^2)\,dx}{160\text{ N}} = \frac{60\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{2\text{ m}}}{160\text{ N}} = \frac{60\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)}{160\text{ N}}$$

$$= 1.5\text{ m}$$ ***Resp.***

**NOTA:** estos resultados pueden verificarse mediante la tabla que se proporciona en el forro interior de la contraportada de este libro, donde se muestra que para un área exparabólica de longitud $a$, altura $b$, y el perfil que se muestra en la figura 4-49*a*, tenemos

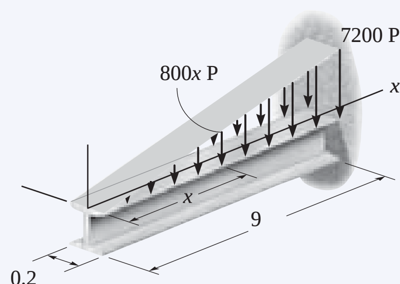
$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2\text{ m}(240\text{ N/m})}{3} = 160\text{ N} \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2\text{ m}) = 1.5\text{ m}$$

4

4

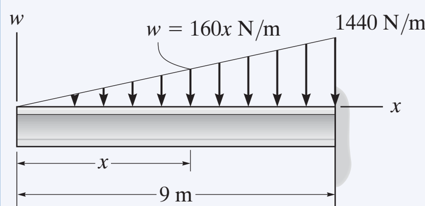
## EJEMPLO 4.22

Una carga distribuida de $p = (800x)$ Pa actúa sobre la superficie superior de la viga que se muestra en la figura 4-50*a*. Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante equivalente.




### SOLUCIÓN

Como la intensidad de la carga es uniforme a lo largo del ancho de la viga (el eje $y$), la viga puede verse en dos dimensiones, como se muestra en la figura 4-50*b*. Aquí



(b)

$$w = (800x\ \text{N/m}^2)(0.2\ \text{m})$$
$$= (160x)\ \text{N/m}$$

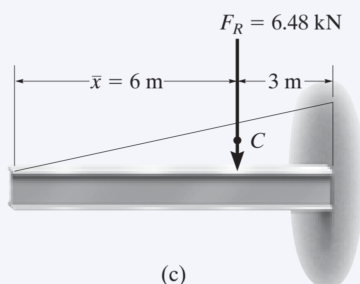
Observe que $w = 1440$ N/m en $x = 9$ m. Aunque podemos aplicar de nuevo las ecuaciones 4-19 y 4-20 como en el ejemplo anterior, es más sencillo utilizar la tabla que aparece en el forro interior al final del libro.

La magnitud de la fuerza resultante es equivalente al área bajo el triángulo.

$$F_R = \tfrac{1}{2}(9\ \text{m})(1440\ \text{N/m}) = 6480\ \text{N} = 6.48\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

La línea de acción de $\mathbf{F}_R$ pasa por el *centroide C* de este triángulo. Por consiguiente

$$\bar{x} = 9\ \text{m} - \tfrac{1}{3}(9\ \text{m}) = 6\ \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(c)

**Fig. 4-50**

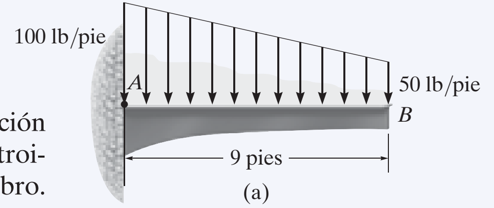
Estos resultados se muestran en la figura 4-50*c*.

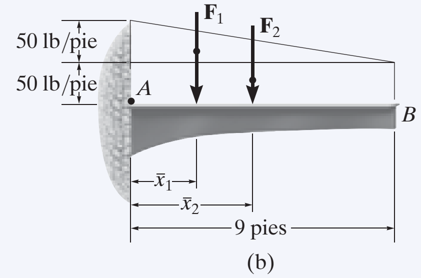
**NOTA:** también podemos considerar que la resultante $\mathbf{F}_R$ *actúa* a través del *centroide* del *volumen* del diagrama de carga $p = p(x)$ en la figura 4-50*a*. Por lo tanto $\mathbf{F}_R$ corta el plano $x$-$y$ en el punto (6 m, 0). Además, la magnitud de $\mathbf{F}_R$ es igual al volumen bajo el diagrama de carga; es decir,

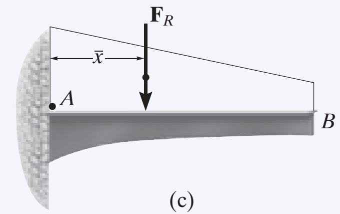
$$F_R = V = \tfrac{1}{2}(7200\ \text{N/m}^2)(9\ \text{m})(0.2\ \text{m}) = 6.48\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 4.23

El material granular ejerce una carga distribuida sobre la viga como se muestra en la figura 4-51*a*. Determine la magnitud y la ubicación de la resultante equivalente de esta carga.



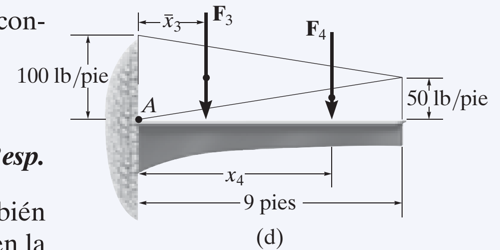




**Fig. 4-51**

### SOLUCIÓN

El área del diagrama de carga es un *trapecio* y, por ello, la solución puede obtenerse directamente con las fórmulas de áreas y centroides para un trapecio enlistadas en el forro interior al final del libro. Como estas fórmulas no son fáciles de recordar, resolveremos este problema con las áreas "compuestas". Para esto dividiremos la carga del trapecio en una carga rectangular y en una carga triangular como se muestra en la figura 4-51*b*. La magnitud de la fuerza representada por cada una de esas cargas es igual a su área asociada,

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 225 \text{ lb}$$

$$F_2 = (9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 450 \text{ lb}$$

Las líneas de acción de estas fuerzas paralelas actúan a través del *centroide* de sus áreas asociadas y, por lo tanto, intersecan la viga en

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 3 \text{ pies}$$

$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ pies}) = 4.5 \text{ pies}$$

Las dos fuerzas paralelas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pueden reducirse a una sola fuerza resultante $\mathbf{F}_R$. La magnitud de $\mathbf{F}_R$ es

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 225 + 450 = 675 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Con referencia al punto $A$, figuras 4-51*b* y 4-51*c*, podemos encontrar la ubicación de $\mathbf{F}_R$. Requerimos que

$$\circlearrowleft + M_{R_A} = \Sigma M_A; \qquad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$$

$$\bar{x} = 4 \text{ pies} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** el área trapecial que se indica en la figura 4-51*a* también puede ser dividida en dos áreas triangulares, como se muestra en la figura 4-51*d*. En este caso

$$F_3 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ pies})(100 \text{ lb/pie}) = 450 \text{ lb}$$

$$F_4 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ pies})(50 \text{ lb/pie}) = 225 \text{ lb}$$

y

$$\bar{x}_3 = \tfrac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 3 \text{ pies}$$

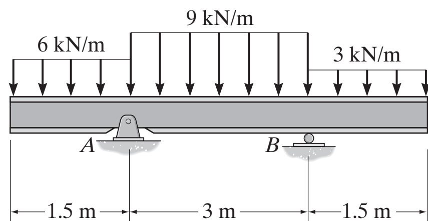
$$\bar{x}_4 = 9 \text{ pies} - \tfrac{1}{3}(9 \text{ pies}) = 6 \text{ pies}$$

**NOTA:** con estos resultados, muestre que de nuevo $F_R = 675$ lb y $\bar{x} = 4$ pies.

4

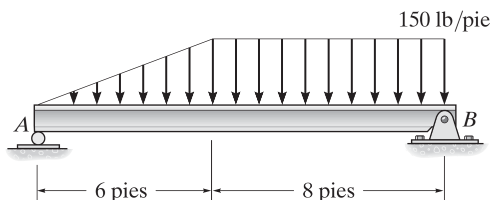
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F4-37.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.



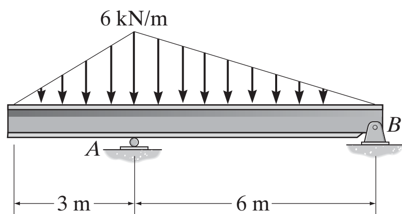

F4-37

**F4-38.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.



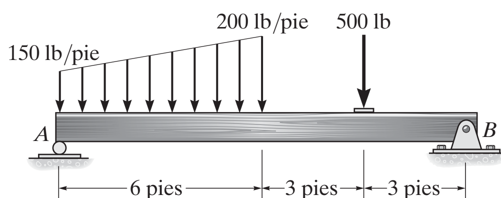

F4-38

**F4-39.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.



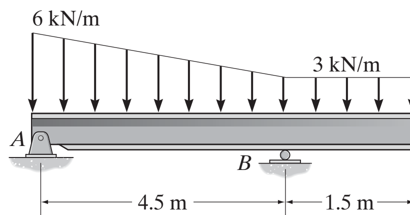

F4-39

**F4-40.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.



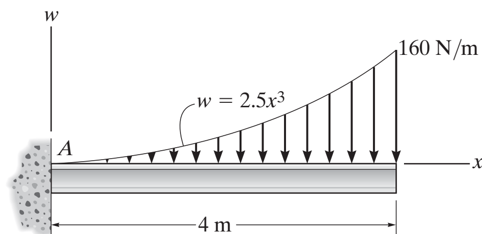

F4-40

**F4-41.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.




F4-41

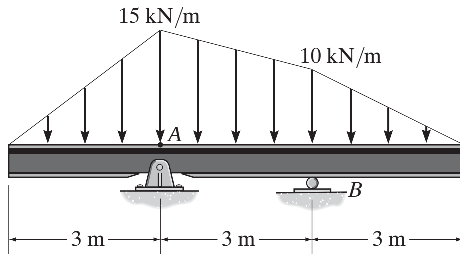
**F4-42.** Determine la fuerza resultante y especifique el punto, medido desde $A$, donde dicha fuerza actúa sobre la viga.




F4-42

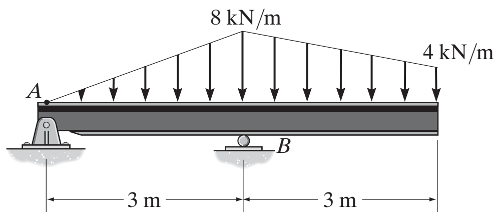
# PROBLEMAS

**4-142.** Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación sobre la viga, medida desde el punto $A$.



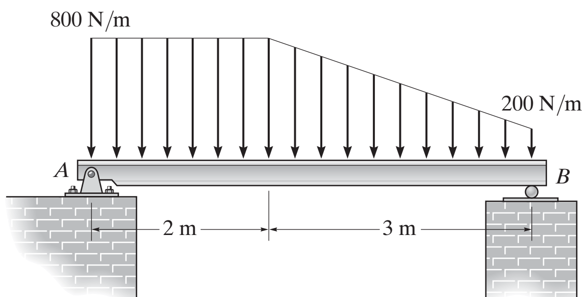

**Prob. 4-142**

**4-143.** Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación sobre la viga, medida desde el punto $A$.



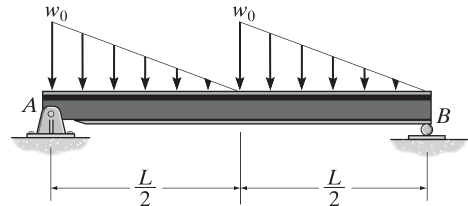

**Prob. 4-143**

*__4-144.__ Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación medida desde el punto $A$.



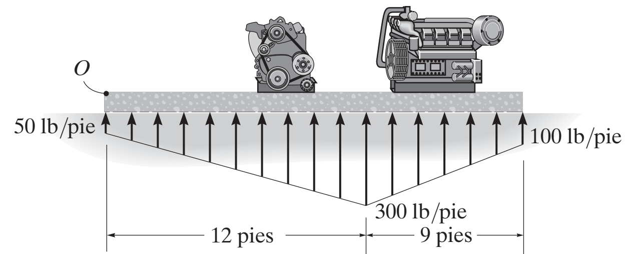

**Prob. 4-144**

•**4-145.** Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación sobre la viga, medida desde el punto $A$.



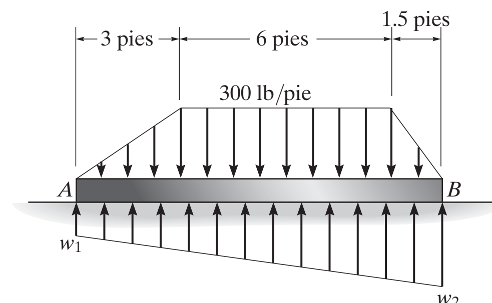

**Prob. 4-145**

**4-146.** En la figura se muestra la distribución de carga del suelo sobre la base de una losa de un edificio. Reemplace esta carga por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación, medida desde el punto $O$.



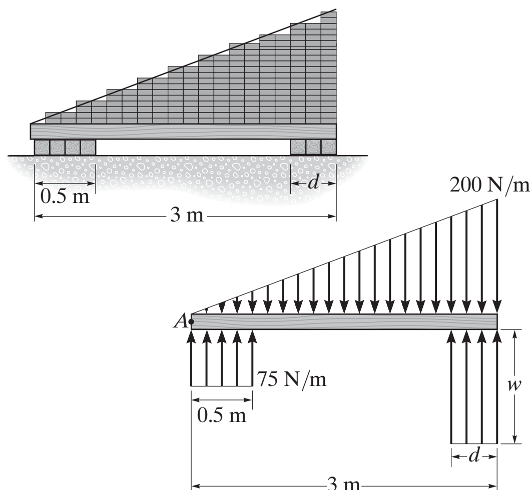

**Prob. 4-146**

**4-147.** Determine las intensidades $w_1$ y $w_2$ de la carga distribuida que actúa sobre la parte inferior de la losa, de modo que esta carga tenga una fuerza resultante equivalente que sea igual pero opuesta a la resultante de la carga distribuida que actúa en la parte superior de la losa.



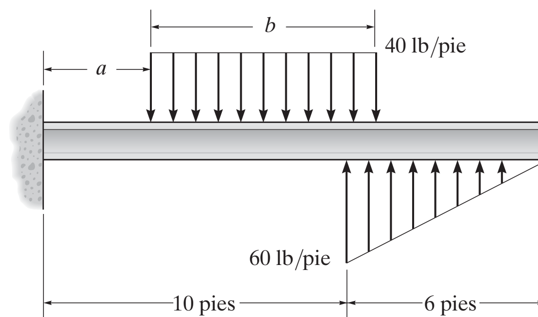

**Prob. 4-147**

***4-148.** Los ladrillos sobre la parte superior de la viga y los soportes en la parte inferior producen la carga distribuida que se muestra en la segunda figura. Determine la intensidad requerida $w$ y la dimensión $d$ del soporte derecho para que la fuerza y el momento de par resultantes con respecto al punto $A$ del sistema sean ambos iguales a cero.



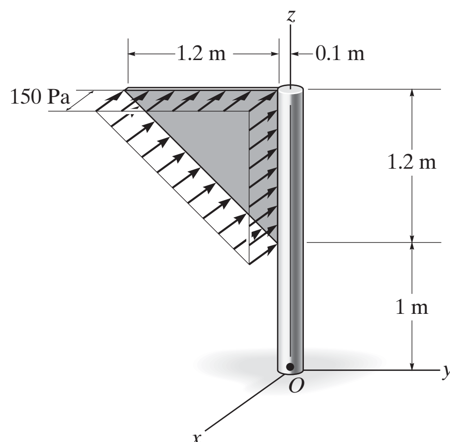

**Prob. 4-148**

**4-150.** La viga está sometida a la carga distribuida que se muestra. Determine la longitud $b$ de la carga uniforme y su posición $a$ sobre la viga, de manera que la fuerza y el momento de par resultantes que actúan sobre la viga sean iguales a cero.



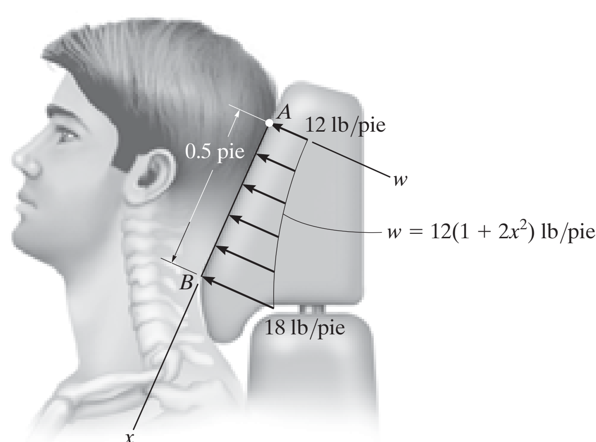

**Prob. 4-150**

**•4-149.** La presión del viento que actúa sobre un señalamiento triangular es uniforme. Reemplace esta carga por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto $O$.



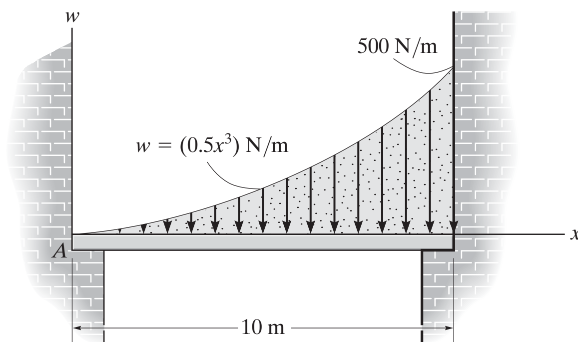

**Prob. 4-149**

**4-151.** En la actualidad, 85 por ciento de todas las lesiones de cuello son causadas por colisiones en la parte trasera de un automóvil. Para mitigar este problema se ha desarrollado un respaldo para los asientos de automóvil, el cual proporciona una presión adicional de contacto con el cráneo. Durante las pruebas dinámicas se ha graficado y demostrado que la distribución de carga sobre el cráneo es parabólica. Determine la fuerza resultante equivalente y su ubicación medida desde el punto $A$.



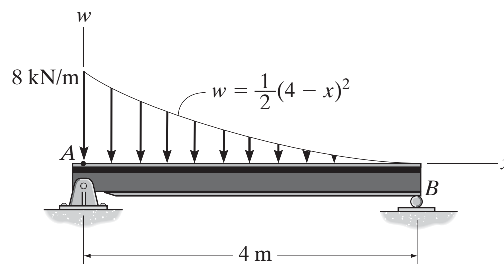

**Prob. 4-151**

*4-152. El viento ha depositado arena sobre una plataforma de manera que la intensidad de la carga se puede aproximar mediante la función $w = (0.5x^3)$ N/m. Simplifique esta carga distribuida a una fuerza resultante equivalente y especifique su magnitud y ubicación medida desde $A$.




Prob. 4-152

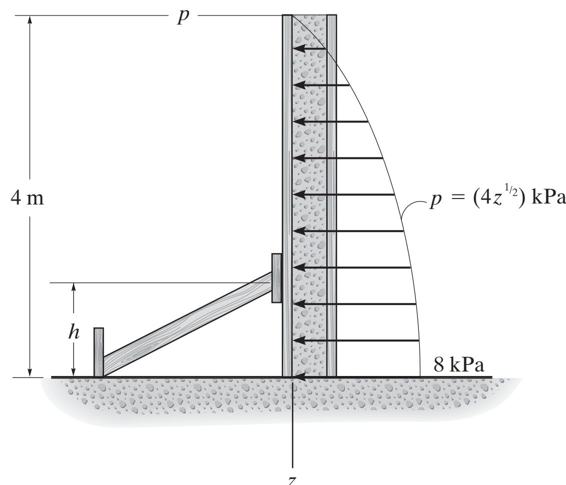
4-154. Reemplace la carga distribuida por una fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación, medida desde el punto $A$ y sobre la viga.




Prob. 4-154

4

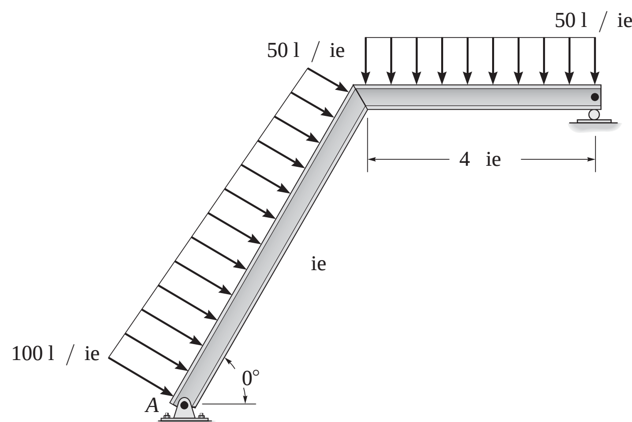
•4-153. El concreto húmedo ejerce una presión distribuida a lo largo de la pared de la cimbra. Determine la fuerza resultante de esta distribución, y especifique la altura $h$ en que debe colocarse el puntal de soporte de modo que esté posicionado sobre la línea de acción de la fuerza resultante. La pared tiene una anchura de 5 m.




Prob. 4-153

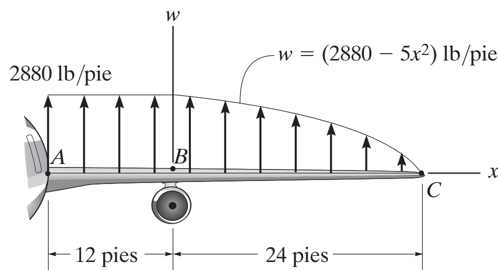
4-155. Reemplace la carga por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto $A$.

*4-156. Reemplace la carga por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto $B$.




Probs. 4-155/156

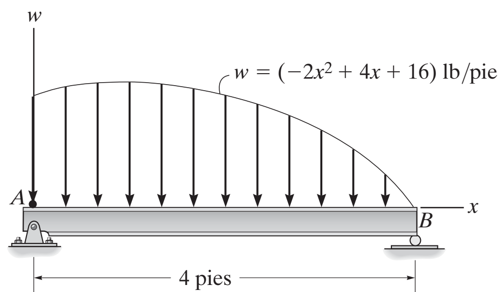
•**4-157.** La fuerza de sustentación a lo largo del ala de un avión de propulsión a chorro consta de una distribución uniforme a lo largo de $AB$, y una distribución semiparabólica a lo largo de $BC$ con origen en $B$. Reemplace esta carga por una sola fuerza resultante y especifique su ubicación medida desde el punto $A$.




**Prob. 4-157**

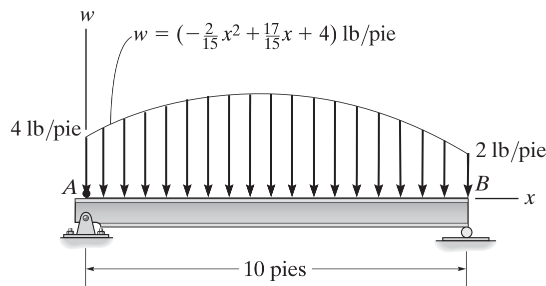
**4-158.** La carga distribuida actúa sobre la viga como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente y especifique el punto donde actúa, medido desde el punto $A$.

**4-159.** La carga distribuida actúa sobre la viga como se muestra en la figura. Determine la intensidad máxima $w_{máx}$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante equivalente? Especifique el punto donde actúa, medido desde el punto $B$.



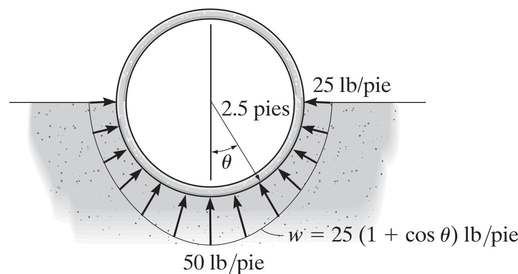

**Probs. 4-158/159**

***4-160.** La carga distribuida actúa sobre la viga como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza resultante equivalente y especifique su ubicación, medida desde el punto $A$.




**Prob. 4-160**

•**4-161.** Si la distribución de la reacción del suelo por unidad de longitud sobre el tubo puede aproximarse como se muestra en la figura, determine la magnitud de la fuerza resultante producida por esta carga.



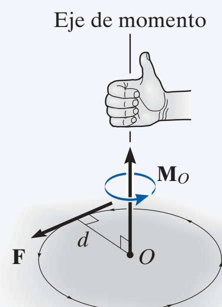

**Prob. 4-161**

# REPASO DEL CAPÍTULO

**Momento de fuerza-Definición escalar**

Una fuerza produce un efecto rotatorio o momento con respecto a un punto $O$ que no se encuentra sobre su línea de acción. En forma escalar, la *magnitud* del momento es el producto de la fuerza y el brazo de momento o la distancia perpendicular desde el punto $O$ hasta la línea de acción de la fuerza.

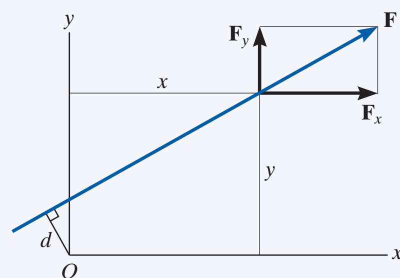
$$M_O = Fd$$




La *dirección* del momento se define con la regla de la mano derecha. $\mathbf{M}_O$ siempre actúa a lo largo de un eje perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{F}$ y $d$, y pasa por el punto $O$.

En lugar de calcular $d$, normalmente es más fácil descomponer la fuerza en sus componentes $x$ y $y$, determinar el momento de cada componente con respecto al punto, y luego sumar los resultados. Esto se llama el principio de momentos.

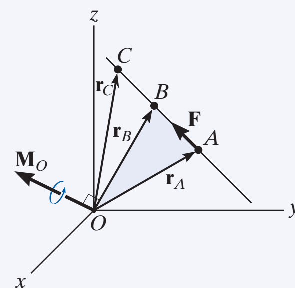
$$M_O = Fd = F_x y - F_y x$$




**Momento de una fuerza-Definición vectorial**

Como por lo general la geometría tridimensional es más difícil de visualizar, puede usarse el producto cruz para determinar el momento. $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición que se extiende desde el punto $O$ hasta cualquier punto sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$$



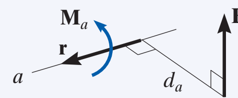

Si el vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ se expresan como vectores cartesianos, entonces el producto cruz se obtiene del desarrollo de un determinante.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

**Momento con respecto a un eje**

Si el momento de una fuerza **F** se va a determinar con respecto a un eje arbitrario *a*, entonces debe obtenerse la proyección del momento sobre el eje. Teniendo en cuenta que la distancia $d_a$ que es perpendicular *tanto* a la línea de acción de la fuerza *como* al eje, entonces el momento de la fuerza con respecto al eje puede determinarse a partir de una ecuación escalar.

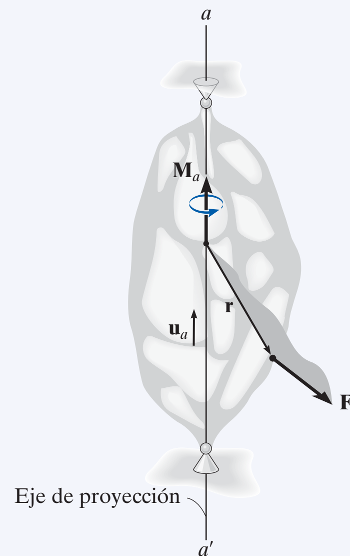
$$M_a = Fd_a$$




Observe que cuando la línea de acción de **F** interseca el eje, el momento de **F** con respecto al eje es igual a cero. Además, cuando la línea de acción de **F** es paralela al eje, el momento de **F** con respecto al eje es igual a cero.

En tres dimensiones, debe usarse el triple producto vectorial. Aquí, $\mathbf{u}_a$ es el vector unitario que especifica la dirección del eje y **r** es un vector de posición que está dirigido desde cualquier punto sobre el eje hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza. Si $M_a$ se calcula como un escalar negativo, entonces el sentido de dirección de $\mathbf{M}_a$ es opuesto a $\mathbf{u}_a$.

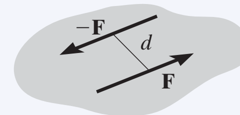
$$M_a = \mathbf{u}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$




**Momento de par**

Un par consta de dos fuerzas iguales pero opuestas que actúan separadas por una distancia perpendicular *d*. Los pares tienden a producir una rotación sin traslación.

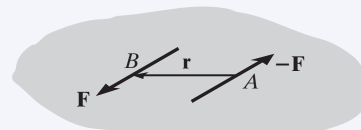
$$M = Fd$$




La magnitud del momento de par es $M = Fd$, y su dirección se establece por medio de la regla de la mano derecha.

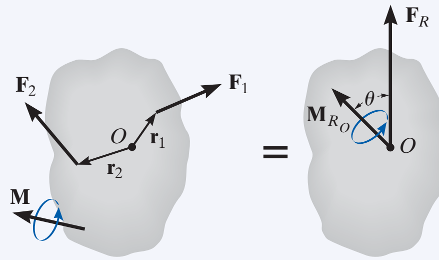
Si se usa el producto cruz vectorial para determinar el momento del par, entonces **r** se extiende desde cualquier punto sobre la línea de acción de una de las fuerzas hacia cualquier punto sobre la línea de acción de la otra fuerza **F** que se emplea en el producto cruz.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

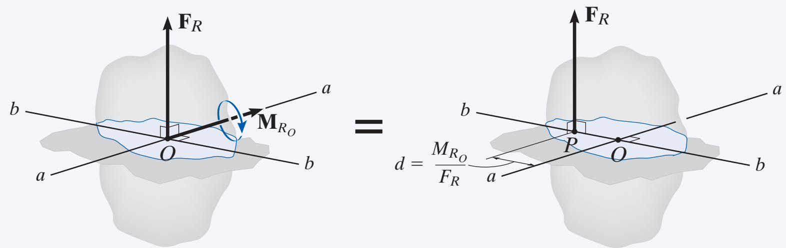


**Simplificación de un sistema de fuerza y par**

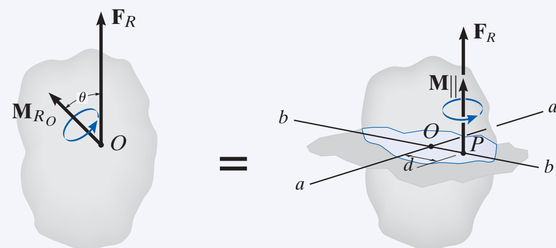
Cualquier sistema de fuerzas y pares puede reducirse a una sola fuerza resultante y a un momento de par resultante que actúan en un punto. La fuerza resultante es la suma de todas las fuerzas presentes en el sistema, $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$, y el momento de par resultante es igual a la suma de todos los momentos de las fuerzas con respecto al punto y todos los momentos de par. $\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M}_O + \Sigma\mathbf{M}$.




Una simplificación adicional a una sola fuerza resultante es posible siempre que el sistema de fuerzas sea concurrente, coplanar o paralelo. Para encontrar la ubicación de la fuerza resultante desde un punto, es necesario igualar el momento de la fuerza resultante con respecto al punto al momento de las fuerzas y pares presentes en el sistema con respecto al mismo punto.

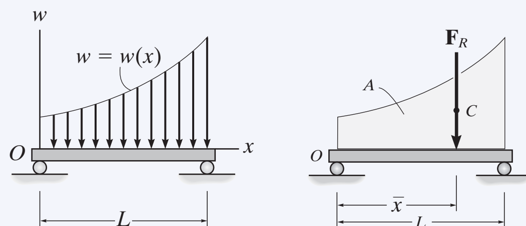



Si la fuerza y el momento del par resultantes no son perpendiculares entre sí, entonces este sistema se puede reducir a una llave, la cual consta de la fuerza resultante y un momento de par colineal.




**Carga distribuida coplanar**

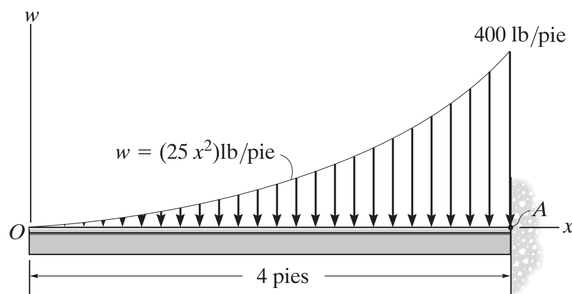
Una carga simple distribuida puede representarse mediante una fuerza resultante, la cual es equivalente al *área* bajo la curva de carga. Esta resultante tiene una línea de acción que pasa por el *centroide* o centro geométrico del área o el volumen bajo el diagrama de carga.




4

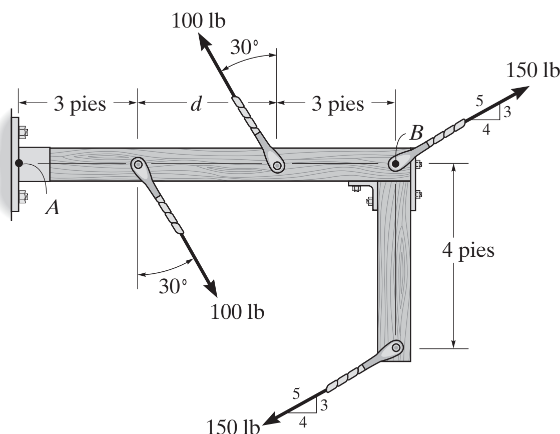
## PROBLEMAS DE REPASO

**4-162.** La viga está sometida a la carga parabólica. Determine un sistema de fuerza y par equivalente en el punto $A$.




**Prob. 4-162**

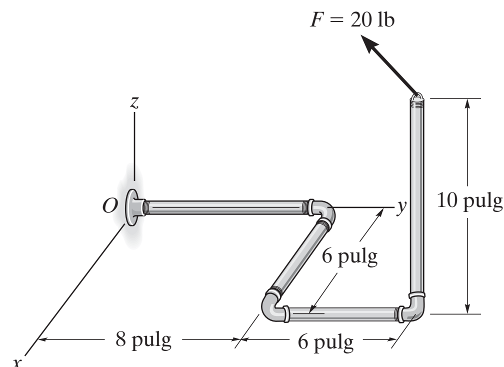
**4-163.** Dos pares actúan sobre el bastidor. Si el momento de par resultante debe ser igual a cero, determine la distancia $d$ entre las fuerzas de par de 100 lb.




**Prob. 4-163**

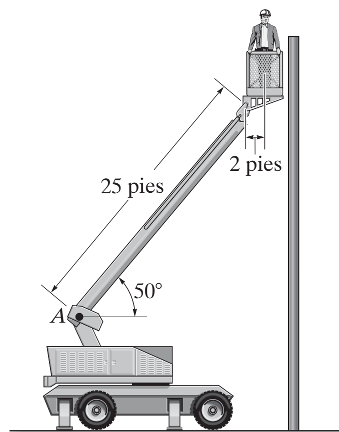
***4-164.** Determine los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de **F**, que se aplica en el extremo del ensamble de tubos, de manera que el momento de **F** con respecto a $O$ sea igual a cero.

**•4-165.** Determine el momento de la fuerza **F** con respecto al punto $O$. La fuerza tiene ángulos directores coordenados de $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Exprese el resultado como un vector cartesiano.




**Probs. 4-164/165**

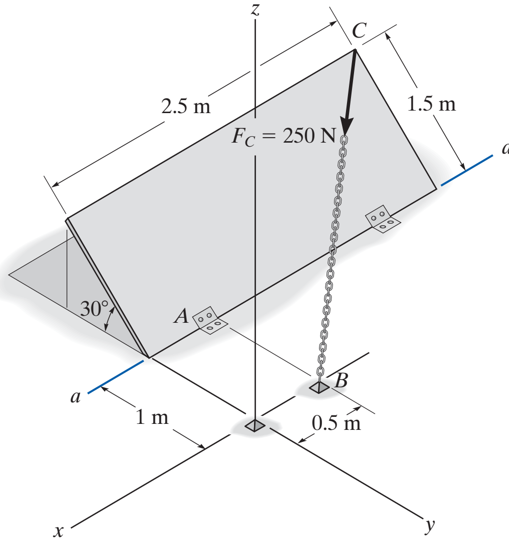
**4-166.** El brazo telescópico se extiende hasta la posición mostrada. Si el trabajador pesa 160 lb, determine el momento de esta fuerza con respecto a la conexión en $A$.




**Prob. 4-166**

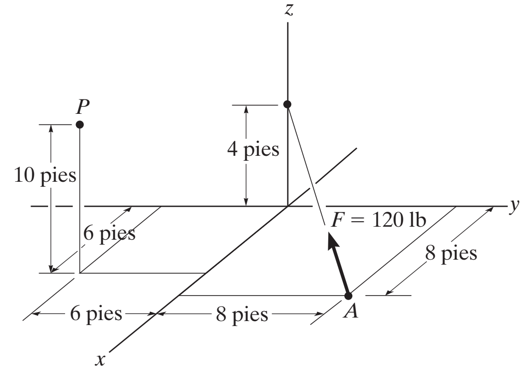
**4-167.** Determine el momento de la fuerza $\mathbf{F}_C$ con respecto a la bisagra en el punto $A$ de la puerta. Exprese el resultado como un vector cartesiano.

*__4-168.__ Determine la magnitud del momento de la fuerza $\mathbf{F}_C$, con respecto al eje articulado $aa$ de la puerta.




Probs. 4-167/168

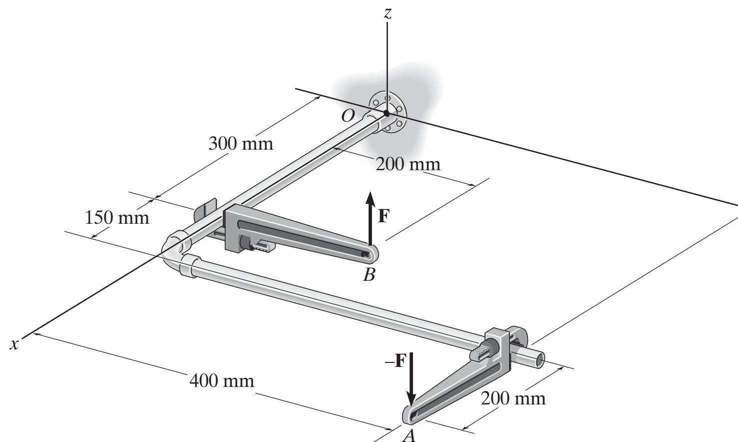
**4-171.** Reemplace la fuerza que actúa en $A$ por una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en el punto $P$. Exprese los resultados en forma vectorial cartesiana.




Prob. 4-171

•**4-169.** Exprese el momento del par que actúa sobre el ensamble de tubos en forma vectorial cartesiana. Resuelva el problema ($a$) con la ecuación 4-13 y ($b$) sume el momento de cada fuerza con respecto al punto $O$. Considere que $\mathbf{F} = \{25\mathbf{k}\}$ N.

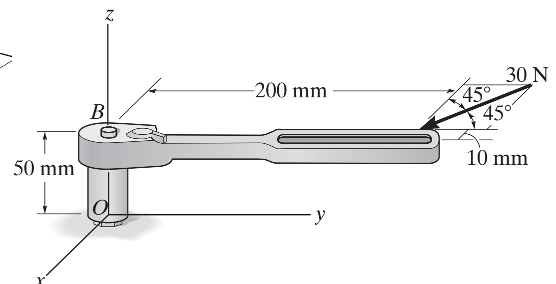
**4-170.** Si el momento de par que actúa sobre el tubo tiene una magnitud de 400 N · m, determine la magnitud $F$ de la fuerza vertical aplicada a cada llave.




Probs. 4-169/170

*__4-172.__ La fuerza horizontal de 30 N actúa sobre el maneral de la llave. Determine el momento de esta fuerza con respecto al punto $O$. Especifique los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ del eje de momento.

•**4-173.** La fuerza horizontal de 30 N actúa sobre el maneral de la llave. ¿Cuál es la magnitud del momento de esta fuerza con respecto al eje $z$?




Probs. 4-172/173

4



La grúa está sometida a su peso y a la carga que soporta. Para calcular las reacciones en los apoyos de la grúa es necesario aplicar los principios del equilibrio.

# Equilibrio de un cuerpo rígido

# 5

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido.
- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre para un cuerpo rígido.
- Mostrar cómo resolver problemas de equilibrio de cuerpos rígidos mediante las ecuaciones de equilibrio.

## 5.1 Condiciones para el equilibrio de un cuerpo rígido

En esta sección desarrollaremos las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio del cuerpo rígido que se muestra en la figura 5-1*a*. Este cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas externas y momentos de par que es el resultado de los efectos de fuerzas gravitatorias, eléctricas, magnéticas o de contacto causadas por cuerpos adyacentes. Las fuerzas internas causadas por interacciones entre partículas dentro del cuerpo no se muestran en la figura porque estas fuerzas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos y por consiguiente se cancelarán, lo cual es una consecuencia de la tercera ley de Newton.

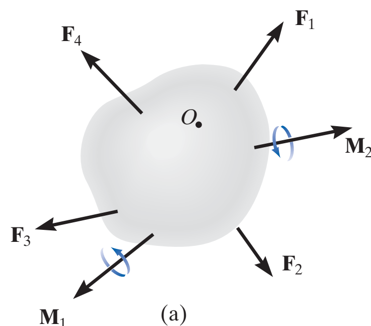
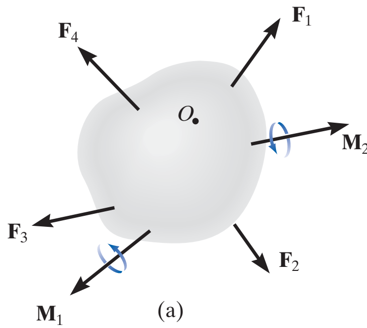
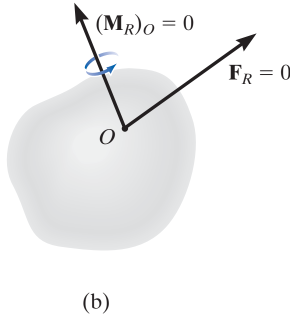



**Fig. 5-1**



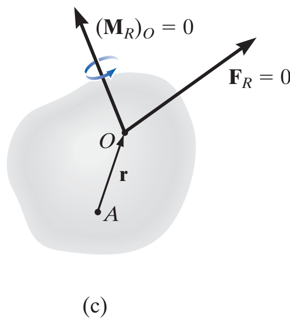




Fig. 5-1

Si utilizamos los métodos del capítulo anterior, el sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo puede reducirse a una fuerza resultante y un momento de par equivalentes en cualquier punto arbitrario $O$ sobre el cuerpo o fuera de él, figura 5-1*b*. Si tanto la fuerza como el momento de par resultantes son iguales a cero, entonces se dice que el cuerpo está en *equilibrio*. En forma matemática, el equilibrio de un cuerpo se expresa como

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \qquad (5\text{-}1)$$

La primera de estas ecuaciones establece que la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a *cero*. La segunda ecuación establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas en el sistema con respecto al punto $O$, añadida a todos los momentos de par es igual a *cero*. Estas dos ecuaciones no sólo son necesarias para el equilibrio, también son suficientes. Para mostrar esto, considere la sumatoria de los momentos con respecto a algún otro punto, como el punto $A$ de la figura 5-1*c*. Necesitamos

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R + (\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, esta ecuación se cumple sólo si se satisfacen las ecuaciones 5-1, a saber $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{0}$.

Cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio, supondremos que el cuerpo permanece rígido. Sin embargo, en realidad todos los cuerpos se deforman cuando están sometidos a cargas. Aunque éste sea el caso, la mayoría de los materiales de ingeniería como el acero y el concreto son muy rígidos por lo que su deformación suele ser muy pequeña. Por lo tanto, al aplicar las ecuaciones de equilibrio, podemos suponer de manera general que el cuerpo permanecerá *rígido* y *no se deformará* bajo la carga aplicada sin introducir ningún error significativo. De esta forma, la dirección de las fuerzas aplicadas y sus brazos de momento con respecto a una referencia fija, permanecen sin cambio antes y después de cargar el cuerpo.

## EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

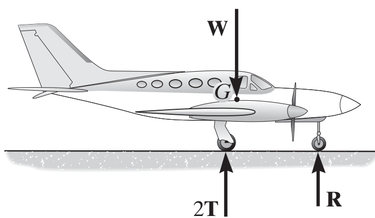



Fig. 5-2

En la primera parte del capítulo, consideraremos el caso donde el sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido se encuentra en, o puede ser proyectado sobre un *solo* plano y, además, cualesquier momentos de par que actúen sobre el cuerpo se dirigen de manera perpendicular a dicho plano. Este tipo de sistema de fuerzas y momentos de par suele denominarse sistema de fuerzas *coplanares* o bidimensionales. Por ejemplo, el avión de la figura 5-2 tiene un plano de simetría a través de su eje central, y por lo tanto las cargas que actúan sobre el avión son simétricas con respecto a ese plano. Así, cada una de las dos llantas de las alas soportará la misma carga $\mathbf{T}$, lo cual se representa en la vista lateral (bidimensional) del avión como $2\mathbf{T}$.

## 5.2 Diagramas de cuerpo libre

La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere de una especificación completa de *todas* las fuerzas externas conocidas y desconocidas que actúan *sobre* un cuerpo. La mejor manera de tomar en cuenta esas fuerzas es trazar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, el cual lo representa *aislado* o "libre" de su entorno, esto es, un "cuerpo libre". Sobre este bosquejo es necesario mostrar *todas* las fuerzas y los momentos de par que ejerce el entorno *sobre el cuerpo,* de manera que cuando se apliquen las ecuaciones de equilibrio se puedan tener en cuenta estos efectos. *Para resolver problemas en mecánica, es de primordial importancia tener un entendimiento total de cómo trazar un diagrama de cuerpo libre.*

**Reacciones en soportes.** Antes de presentar un procedimiento formal sobre cómo trazar un diagrama de cuerpo libre, primero consideraremos los diversos tipos de reacciones que ocurren en soportes y puntos de contacto entre cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerza. Como regla general,

- Si un soporte evita la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces se desarrolla una fuerza sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si se evita una rotación, se ejerce un momento de par sobre el cuerpo.

Por ejemplo, consideremos tres maneras en que un elemento horizontal, como una viga, está soportado en su extremo. Un método es por medio de un *rodillo* o cilindro, figura 5-3*a*. Como este soporte sólo evita que la viga se *traslade* en dirección vertical, el rodillo puede ejercer una *fuerza* sobre la viga únicamente en esta dirección, figura 5-3*b*.

La viga puede ser soportada de una forma más restrictiva con un *pasador*, como se muestra en la figura 5-3*c*. El pasador liso atraviesa un orificio localizado en la viga y en dos placas que están fijas al suelo. Aquí, el pasador puede evitar la *traslación* de la viga en *cualquier dirección* $\phi$, figura 5-3*d*, por lo que debe ejercer una *fuerza* **F** sobre la viga en esta dirección. Por lo general, para fines de análisis es más fácil representar esta fuerza resultante **F** por medio de sus dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, figura 5-3*e*. Si se conocen $F_x$ y $F_y$, entonces se pueden calcular $F$ y $\phi$.

La manera más restrictiva de soportar la viga sería con un *soporte fijo* como se muestra en la figura 5-3*f*. Este soporte impedirá la *traslación y la rotación* de la viga. Para ello deben desarrollarse una *fuerza y un momento de par* sobre la viga en su punto de conexión, figura 5-3*g*. Como en el caso del pasador, la fuerza se suele representar mediante sus componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.

En la tabla 5-1 se presentan otros tipos comunes de soportes para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas. (En todos los casos se supone que se conoce el ángulo $\theta$). Estudie cuidadosamente cada uno de los símbolos usados para representar esos soportes y los tipos de reacciones que éstos ejercen sobre sus elementos en contacto.

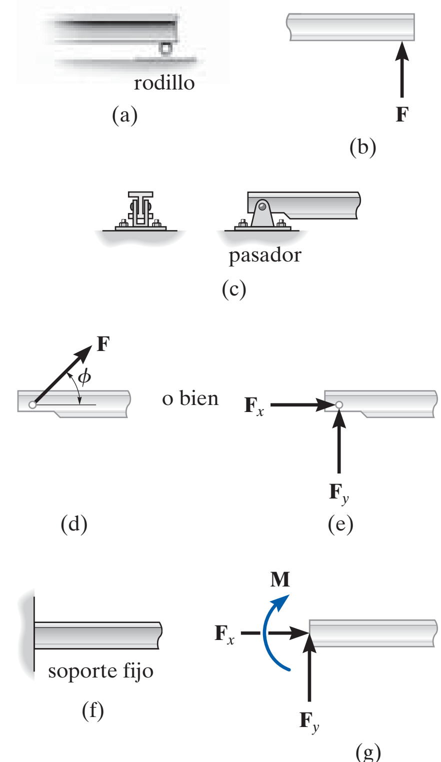



**Fig. 5-3**

5

5

**TABLA 5-1 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas bidimensionales**

| Tipos de conexión | Reacción | Número de incógnitas |
|---|---|---|
| (1) cable | $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del elemento en la dirección del cable. |
| (2) eslabón sin peso | $\theta$, **F** o bien $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón. |
| (3) rodillo | $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. |
| (4) rodillo o pasador confinado en una ranura lisa | **F**, $\theta$ o bien **F**, $\theta$ | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura. |
| (5) soporte mecedora | $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. |
| (6) superficie de contacto lisa | $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. |
| (7) elemento conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa | $\theta$ o bien $\theta$, **F** | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra. |

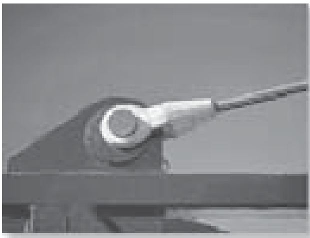
*continúa*

**TABLA 5-1 Continuación**

| Tipos de conexión | Reacción | Número de incógnitas |
|---|---|---|
| (8) $\theta$ pasador liso o articulación lisa | $F_y$, $F_x$ o bien $F$, $\phi$ | Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante. Observe que $\phi$ y $\theta$ no son necesariamente iguales [no suelen serlo, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)]. |
| (9) elemento con conexión fija a un collar sobre una barra lisa | $F$, $M$ | Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra. |
| (10) soporte fijo | $F_y$, $F_x$, $M$ o bien $F$, $\phi$, $M$ | Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante. |

5

En la siguiente serie de fotografías se presentan ejemplos típicos de soportes reales. Los números indican los tipos de conexión a que se hace referencia en la tabla 5-1.



El cable ejerce una fuerza sobre la ménsula, o soporte, en la dirección del cable. (1)



El soporte de mecedora para esta trabe de puente permite el movimiento horizontal de manera que el puente pueda dilatarse y contraerse por cambios en la temperatura. (5)

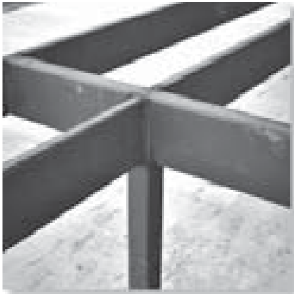
Esta trabe de concreto descansa sobre el borde que supuestamente actúa como una superficie de contacto lisa. (6)





Esta instalación de edificio está soportada por un pasador en la parte superior de la columna. (8)

Las vigas del piso de este edificio se sueldan entre sí para formar conexiones fijas. (10)



**Fuerzas internas.** Como mencionamos en la sección 5.1, las fuerzas internas que actúan entre partículas adyacentes en un cuerpo siempre se presentan en parejas colineales que tienen la misma magnitud pero que actúan en direcciones opuestas (tercera ley de Newton). Como estas fuerzas se cancelan entre sí, no crearán un *efecto externo* sobre el cuerpo. Por esta razón, las fuerzas internas no deben incluirse en el diagrama de cuerpo libre si se toma en cuenta todo el cuerpo. Por ejemplo, el motor que se muestra en la figura 5-4*a* tiene un diagrama de cuerpo libre que aparece en la figura 5-4*b*. Las fuerzas internas entre todas sus partes conectadas, a saber tornillos y tuercas, se cancelarán porque forman parejas colineales y opuestas. En el diagrama de cuerpo libre sólo se muestran las fuerzas externas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$, que ejercen las cadenas y el peso $\mathbf{W}$ del motor.

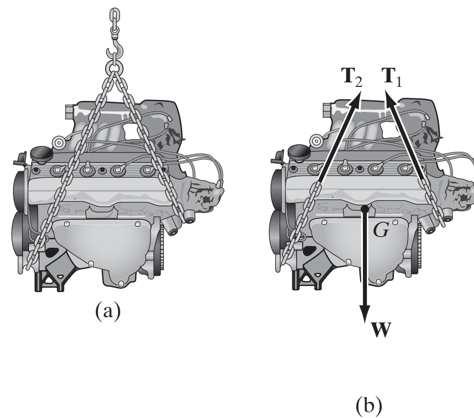



**Fig. 5-4**

**Peso y centro de gravedad.** Cuando un cuerpo está sometido a un campo gravitatorio, cada una de sus partículas tiene un peso específico. En la sección 4.8 se mostró que dicho sistema se puede reducir a una sola fuerza resultante que actúa a través de un punto específico. Nos referimos a esta fuerza resultante como al *peso* **W** del cuerpo, y a la posición de su punto de aplicación como al *centro de gravedad*. Los métodos usados para su determinación se desarrollarán en el capítulo 9.

En los ejemplos y problemas que siguen, si el peso del cuerpo es importante para el análisis, esta fuerza resultante se indicará en el enunciado del problema. También, cuando el cuerpo sea *uniforme*, o esté hecho de material homogéneo, el centro de gravedad se localizará en el *centro geométrico* o *centroide* del cuerpo; sin embargo, si el cuerpo no es homogéneo o tiene una forma poco común, entonces se dará la ubicación de su centro de gravedad $G$.

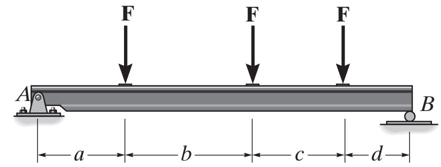
**Modelos idealizados.** Cuando un ingeniero realiza un análisis de fuerzas de cualquier objeto, debe considerar un modelo analítico correspondiente o modelo idealizado que dé resultados que se aproximen lo más posible a la situación real. Para ello, tiene que hacerse una selección cuidadosa de manera que el tipo de soportes, el comportamiento del material y las dimensiones del objeto queden justificados. De esta manera es posible confiar en que cualquier diseño o análisis dará

resultados seguros. En casos complejos, este proceso puede requerir el desarrollo de varios modelos diferentes del objeto que debe analizarse. En cualquier caso, este proceso de selección requiere tanto habilidad como experiencia.

Los siguientes dos casos ilustran lo que se requiere para desarrollar un modelo apropiado. Como se ve en la figura 5-5*a*, se va a utilizar la viga de acero para soportar los largueros del techo de un edificio. En un análisis de fuerza, es razonable suponer que el material (acero) es rígido puesto que sólo ocurrirán muy pequeñas deflexiones cuando se cargue la viga. Una conexión con pernos en *A* permitirá cualquier rotación que ocurra cuando se aplique la carga, por lo que para el soporte puede considerarse un *pasador liso*. En *B* puede considerarse un *rodillo*, puesto que ahí el soporte no ofrece resistencia al movimiento horizontal. Para especificar la carga de techo *A* se usa el código de construcción a fin de poder calcular las cargas **F** de los largueros. Estas fuerzas serán mayores que cualquier carga real sobre la viga ya que toman en cuenta los casos extremos de carga para efectos dinámicos o de vibración. Finalmente, el peso de la viga por lo general se pasa por alto cuando es pequeño comparado con la carga que soporta la viga. Por consiguiente, el modelo idealizado de la viga se muestra con dimensiones promedio *a*, *b*, *c* y *d* en la figura 5-5*b*.




(a)

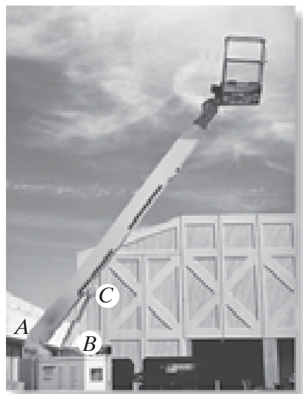



(b)

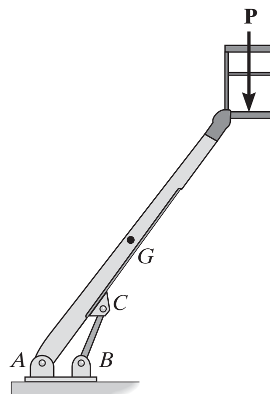
**Fig. 5-5**

Como un segundo caso, considere la pluma de ascenso de la figura 5-6*a*, la cual está soportada por un pasador colocado en *A* y por el cilindro hidráulico *BC*, que puede aproximarse como un eslabón sin peso. Podemos suponer que el material es rígido, y con su densidad conocida, se determinan el peso de la pluma y la ubicación de su centro de gravedad *G*. Cuando se especifica una carga de diseño **P**, el modelo idealizado que se muestra en la figura 5-6*b* puede usarse para un análisis de fuerza. Para especificar la ubicación de las cargas y soportes, se usan dimensiones promedio (no se muestran aquí).

En algunos de los ejemplos presentados en el texto se darán modelos idealizados de objetos específicos. Sin embargo, es necesario tener en mente que cada caso representa la reducción de una situación práctica mediante supuestos simplificados como los que se ilustran aquí.




(a)




(b)

**Fig. 5-6**

5

5

## Procedimiento para el análisis

Para construir el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido o cualquier grupo de cuerpos considerados como un solo sistema, deben darse los siguientes pasos:

**Trace el contorno.**
Imagine el cuerpo *aislado* o recortado "libre" de sus restricciones y conexiones, y delinee (en un bosquejo) su contorno.

**Muestre todas las fuerzas y momentos de par.**
Identifique todas las *fuerzas externas* conocidas y desconocidas y los momentos de par que *actúan sobre el cuerpo*. Las que por lo general se encuentran se deben a (1) cargas aplicadas, (2) reacciones que ocurren en los soportes o en puntos de contacto con otros cuerpos (vea la tabla 5-1), y (3) el peso del cuerpo. Para tomar en cuenta todos estos efectos, puede servir hacer trazos sobre los límites, y señalar cuidadosamente cada fuerza o momento de par que actúa en el cuerpo.

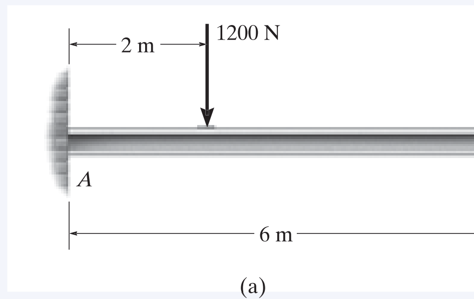
**Identifique cada carga y las dimensiones dadas.**
Las fuerzas y los momentos de par que se conocen deben marcarse con sus propias magnitudes y direcciones. Se usan letras para representar las magnitudes y los ángulos de dirección de fuerzas y momentos de par que sean desconocidos. Establezca un sistema coordenado $x$, $y$ de manera que se puedan identificar estas incógnitas, $A_x$, $A_y$, etcétera. Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

## Puntos importantes

- Ningún problema de equilibrio debe resolverse sin *trazar primero el diagrama de cuerpo libre*, de manera que se tomen en cuenta todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Si un soporte *evita la traslación* de un cuerpo en una dirección particular, entonces el soporte ejerce una *fuerza* sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si se *evita la rotación*, entonces el soporte ejerce un *momento de par* sobre el cuerpo.
- Estudie la tabla 5-1.
- Las fuerzas internas nunca se muestran en el diagrama de cuerpo libre puesto que se presentan en parejas colineales iguales pero opuestas, y por consiguiente, se cancelan.
- El peso de un cuerpo es una fuerza externa, y su efecto se representa mediante una sola fuerza resultante que actúa a través del centro de gravedad $G$ del cuerpo.
- Los *momentos de par* pueden colocarse en cualquier parte del diagrama de cuerpo libre puesto que son vectores libres. Las fuerzas pueden actuar en cualquier punto a lo largo de sus líneas de acción ya que son *vectores deslizantes*.

## EJEMPLO 5.1

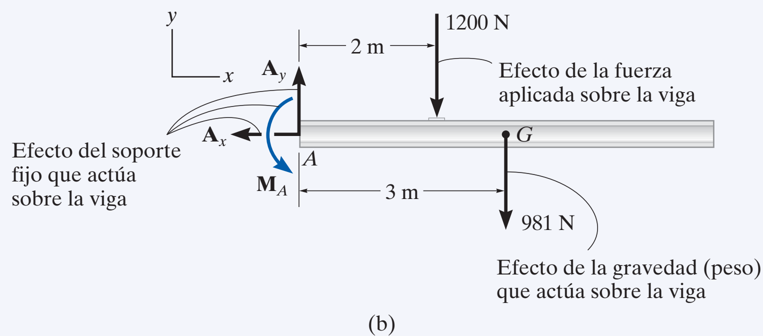
Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga uniforme que se muestra en la figura 5-7*a*. La viga tiene una masa de 100 kg.




(a)

### SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre de la viga se muestra en la figura 5-7*b*. Como el soporte en $A$ es fijo, la pared ejerce tres reacciones que actúan *sobre la viga*, identificadas como $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{M}_A$. Las magnitudes de estas reacciones son *desconocidas*, y sus sentidos son *supuestos*. El peso de la viga, $W = 100(9.81)\text{ N} = 981\text{ N}$, actúa a través del centro de gravedad $G$ de la viga, que está a 3 m de $A$ puesto que la viga es uniforme.

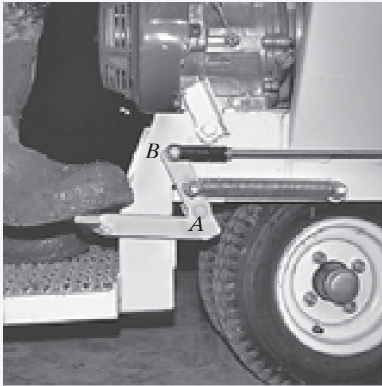



(b)

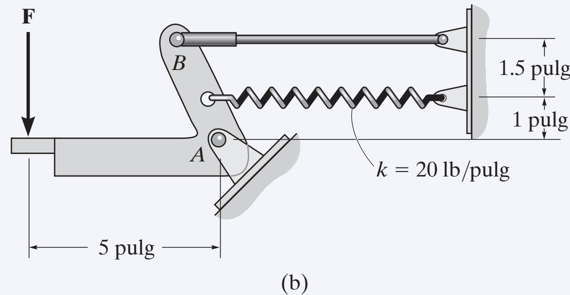
**Fig. 5-7**

## EJEMPLO 5.2

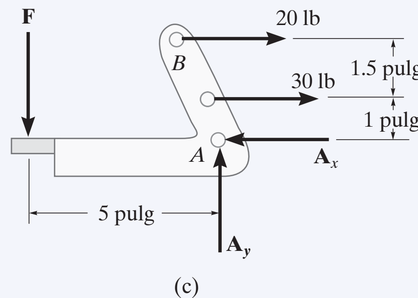
Trace el diagrama de cuerpo libre del pedal que se muestra en la figura 5-8*a*. El operador aplica una fuerza vertical al pedal de manera que el resorte se estira 1.5 pulg y la fuerza en el eslabón corto en *B* es de 20 lb.




(a)




(b)




(c)

**Fig. 5-8**



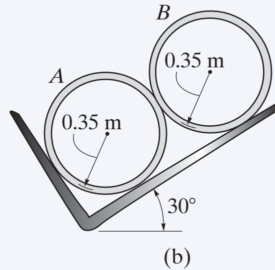
### SOLUCIÓN

Como podemos ver por la fotografía, la palanca está unida holgadamente al bastidor del camión en *A* por medio de un perno. La barra en *B* está articulada en sus extremos y actúa como un "eslabón corto". Después de realizar las mediciones apropiadas, el modelo idealizado de la palanca se muestra en la figura 5-8*b*. A partir de esto, se muestra el diagrama de cuerpo libre en la figura 5-8*c*. El soporte de pasador en *A* ejerce las componentes de fuerza $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ sobre la palanca. El eslabón en *B* ejerce una fuerza de 20 lb, y actúa en la dirección del eslabón. Además, el resorte ejerce también una fuerza horizontal sobre la palanca. Si se mide la rigidez y se encuentra que es $k = 20$ lb/pulg, entonces, como el alargamiento $s = 1.5$ pulg, con la ecuación 3-2, $F_s = ks = 20$ lb/pulg (1.5 pulg) $= 30$ lb. Finalmente, el zapato del operador aplica una fuerza vertical **F** sobre el pedal. Las dimensiones de la palanca se muestran también sobre el diagrama de cuerpo libre, ya que esta información será útil cuando se calculen los momentos de las fuerzas. Como es usual, se han dado por descontados los sentidos de las fuerzas desconocidas en *A*. Los sentidos correctos serán evidentes después de resolver las ecuaciones de equilibrio.

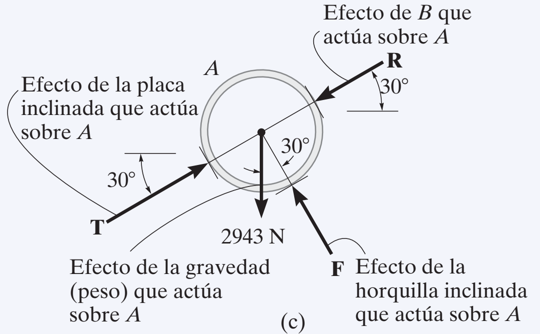
## EJEMPLO 5.3

Dos tubos lisos, cada uno con masa de 300 kg, están soportados por la horquilla del tractor en la figura 5-9*a*. Dibuje los diagramas de cuerpo libre para cada tubo y para los dos tubos juntos.

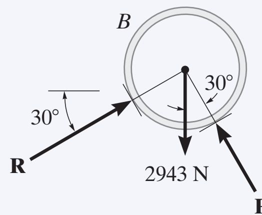

(a)



(b)



(c)



(d)

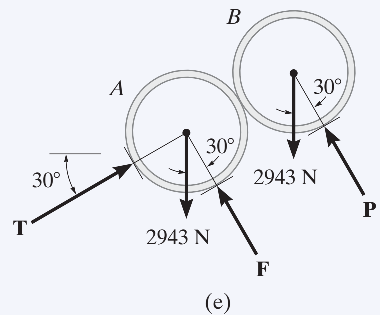
## SOLUCIÓN

El modelo idealizado a partir del cual debemos dibujar los diagramas de cuerpo libre se muestra en la figura 5-9*b*. Aquí los tubos están identificados, se han agregado las dimensiones, y la situación física se redujo a su forma más simple.

En la figura 5-9*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre para el tubo *A*. Su peso es $W = 300(9.81) = 2943$ N. Suponiendo que todas las superficies de contacto son *lisas*, las fuerzas reactivas **T**, **F**, **R** actúan en una dirección *normal* a la tangente en sus superficies de contacto.

El diagrama de cuerpo libre del tubo *B* se muestra en la figura 5-9*d*. ¿Puede identificar cada una de las tres fuerzas que actúan *sobre este tubo*? En particular, observe que **R**, que representa la fuerza de *A* sobre *B*, figura 5-9*d*, es igual y opuesta a **R** que representa la fuerza de *B* sobre *A*, figura 5-9*c*. Esto es una consecuencia de la tercera ley del movimiento de Newton.

El diagrama de cuerpo libre de ambos tubos combinados (“sistema”) se muestra en la figura 5-9*e*. Aquí, la fuerza de contacto **R**, que actúa entre *A* y *B*, está considerada como una fuerza *interna* y por ello no se muestra en el diagrama de cuerpo libre. Es decir, representa un par de fuerzas colineales iguales pero opuestas que se cancelan entre sí.



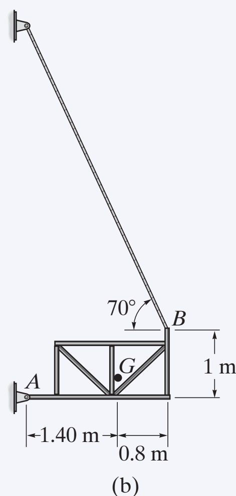
(e)

**Fig. 5-9**

5

## EJEMPLO 5.4

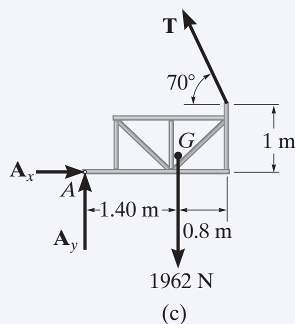
Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la plataforma sin carga que está suspendida del borde de la torre petrolera, figura 5-10*a*. La plataforma tiene una masa de 200 kg.



(b)



**Fig. 5-10**



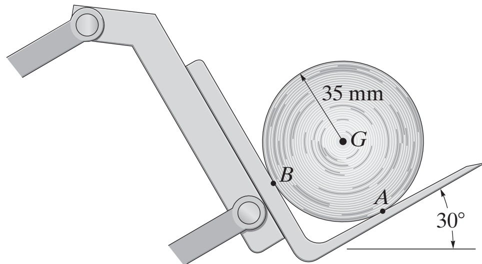
(c)

### SOLUCIÓN

El modelo idealizado de la plataforma se considerará en dos dimensiones ya que, por observación, la carga y las dimensiones son simétricas con respecto a un plano vertical que pasa por su centro, figura 5-10*b*. Se considera que la conexión en *A* es un pasador y que el cable soporta la plataforma en *B*. La dirección del cable y las dimensiones promedio de la plataforma están indicadas, y se determinó el centro de gravedad *G*. A partir de este modelo hemos dibujado el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 5-10*c*. El peso de la plataforma es de 200(9.81) = 1962 N. Las componentes de fuerza $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ junto con la fuerza del cable **T** representan las reacciones que *ambos* pasadores y *ambos* cables ejercen sobre la plataforma, figura 5-10*a*. En consecuencia, y de acuerdo con la solución para estas reacciones, la mitad de la magnitud de esas reacciones se desarrolla en *A* y la mitad se desarrolla en *B*.

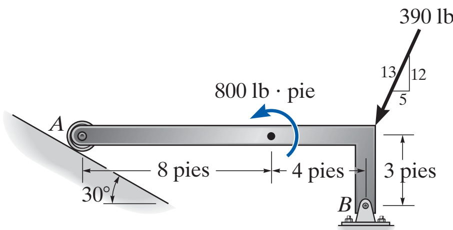
## PROBLEMAS

**•5-1.** Trace el diagrama de cuerpo libre del cilindro de papel de 50 kg que tiene su centro de masa en *G* y descansa sobre la horquilla lisa del transportador de papel. Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).



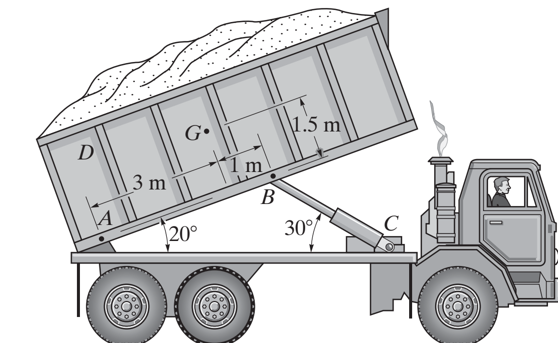

**Prob. 5-1**

**5-2.** Trace el diagrama de cuerpo libre del elemento *AB*, que se apoya mediante un rodillo en *A* y un pasador en *B*. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).



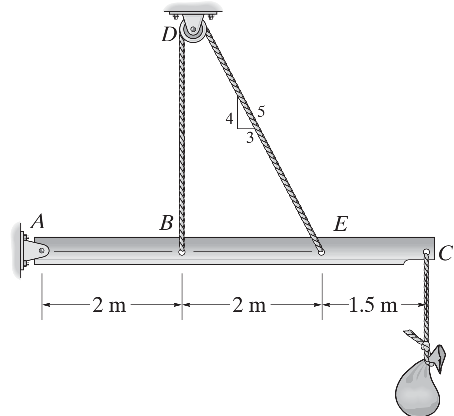

**Prob. 5-2**

**5-3.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la caja de volteo *D* del camión, la cual tiene un peso de 5000 lb y centro de gravedad en *G*. La caja está soportada por un pasador en *A* y un cilindro hidráulico *BC* (eslabón corto) conectado mediante un pasador. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).



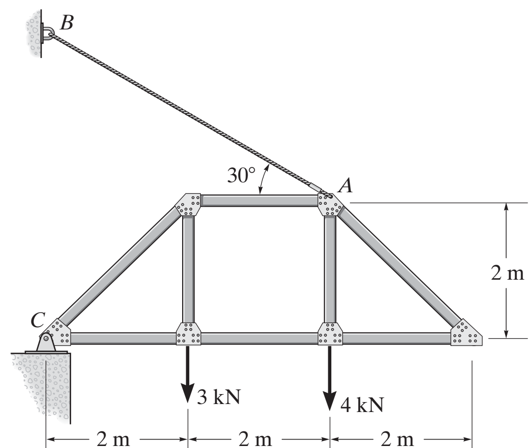

**Prob. 5-3**

***5.4.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la viga que soporta la carga de 80 kg y que está apoyada mediante un pasador en *A* y por medio de un cable que pasa alrededor de la polea en *D*. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).




**Prob. 5-4**

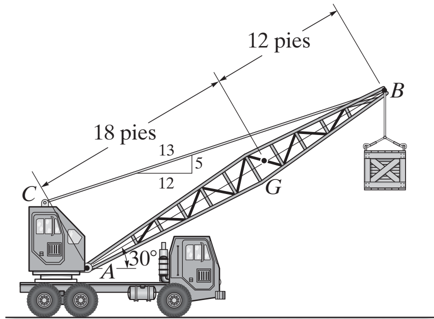
**•5-5.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la armadura que está soportada por el cable *AB* y el pasador *C*. Explique la importancia de cada fuerza que actúa en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).




**Prob. 5-5**

5

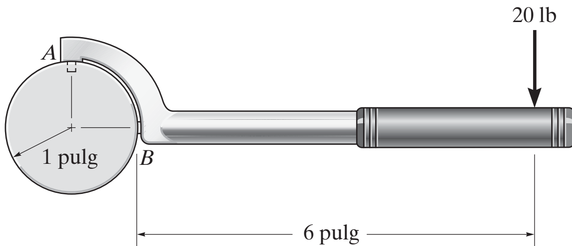
**5-6.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la pluma *AB* de la grúa, la cual tiene un peso de 650 lb y centro de gravedad en *G*. La pluma está soportada por un pasador en *A* y un cable *BC*. La carga de 1250 lb está suspendida de un cable unido en *B*. Explique la importancia de cada fuerza que actúa en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).




**Prob. 5-6**

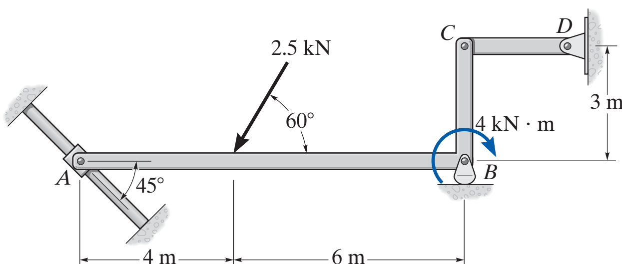


**5-7.** Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la "llave de horquilla" que está sometida a la fuerza de 20 lb. El soporte en *A* puede considerarse un pasador, y la superficie de contacto en *B* es lisa. Explique la importancia de cada fuerza que actúa en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).



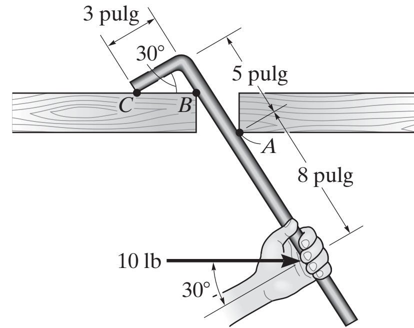

**Prob. 5-7**

***5-8.** Trace el diagrama de cuerpo libre del elemento *ABC* que está soportado por un collar liso en *A*, un rodillo en *B*, y un eslabón corto *CD*. Explique la importancia de cada fuerza que actúa en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).



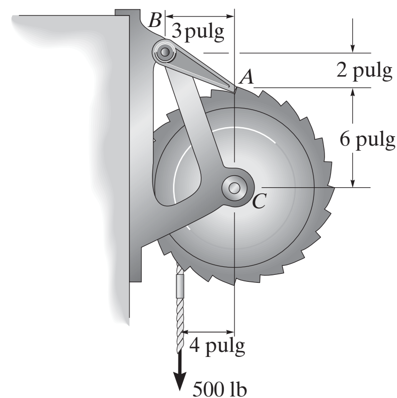

**Prob. 5-8**

**•5-9.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la barra, cuyo grosor no se toma en cuenta, y puntos de contacto lisos en *A*, *B* y *C*. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).




**Prob. 5-9**

**5-10.** Trace el diagrama de cuerpo libre del malacate, el cual consiste en un tambor de 4 pulg de radio. Está conectado mediante un pasador en su centro *C*, y en su aro exterior hay un engrane de cremallera con un radio medio de 6 pulg. El trinquete *AB* sirve como un elemento de dos fuerzas (eslabón corto) y evita que el tambor gire. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama. (Vea la figura 5-7*b*).




**Prob. 5-10**

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**P5-1.** Trace el diagrama de cuerpo libre del bote de basura uniforme que tiene un peso significativo. Está apoyado mediante un pasador en $A$ y descansa contra el elemento horizontal liso en $B$. Muestre su resultado en la vista lateral. Marque cualquier dimensión que sea necesaria.




**P5-1**

**P5-2.** Trace el diagrama de cuerpo libre del elemento $ABC$ que se utiliza para soportar una retroexcavadora. El pasador superior $B$ está conectado al cilindro hidráulico, el cual puede considerarse como un pasador corto (elemento de dos fuerzas), la zapata de apoyo en $A$ es lisa y el elemento $ABC$ está conectado al bastidor mediante un pasador en $C$.




**P5-2**

**P5-3.** Trace el diagrama de cuerpo libre de un ala del avión de pasajeros. Los pesos del motor y el ala son significativos. Las llantas en $B$ ruedan libremente.




**P5-3**

***P5-4.** Trace el diagrama de cuerpo libre de la rueda y el elemento $ABC$ usados como parte del tren de aterrizaje de un avión a propulsión. El cilindro hidráulico $AD$ actúa como un elemento de dos fuerzas, y hay una conexión de pasador en $B$.




**P5-4**

5

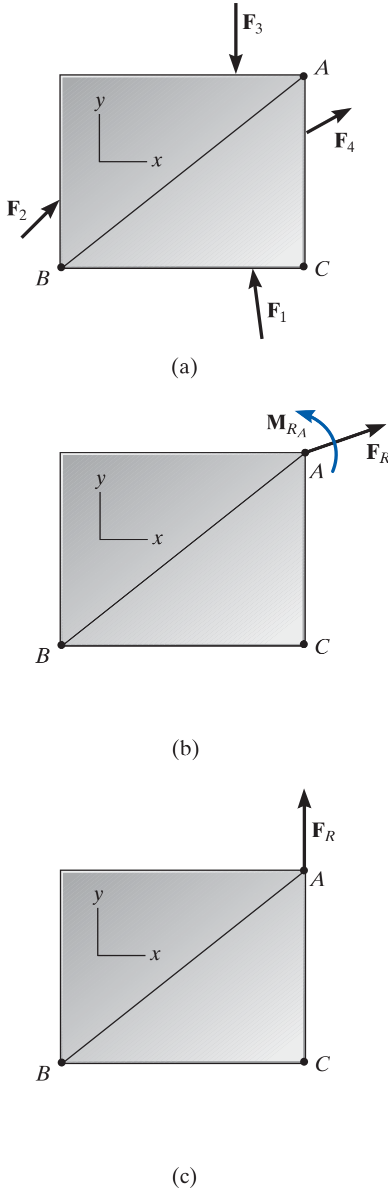


**Fig. 5-11**

5

## 5.3 Ecuaciones de equilibrio

En la sección 5.1 desarrollamos las dos ecuaciones que se requieren y bastan para obtener el equilibrio de un cuerpo rígido, esto es, $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Cuando el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas, las cuales se encuentran en el plano *x-y*, las fuerzas se pueden descomponer en sus componentes *x* y *y*. En consecuencia, las condiciones de equilibrio en dos dimensiones son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0 \tag{5-2}$$

Aquí, $\Sigma F_x$ y $\Sigma F_y$ representan, respectivamente, las sumas algebraicas de las componentes *x* y *y* de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y $\Sigma M_O$ representa la suma algebraica de los momentos de par y los momentos de todas las componentes de fuerza con respecto al eje *z*, el cual es perpendicular al plano *x-y* y que pasa por el punto arbitrario *O*.

### Conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio.

Aunque las ecuaciones 5-2 se usan con *mayor frecuencia* para resolver problemas de equilibrio coplanar, pueden usarse también dos conjuntos *alternativos* de tres ecuaciones de equilibrio independientes. Uno de estos conjuntos es

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \tag{5-3}$$

Al usar estas ecuaciones se requiere que una línea que pase por los puntos *A* y *B* *no sea paralela* al eje *y*. Para probar que las ecuaciones 5-3 proporcionan las *condiciones* de equilibrio, considere el diagrama de cuerpo libre de la placa que se muestra en la figura 5-11*a*. Con los métodos de la sección 4.8, todas las fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre pueden reemplazarse por una fuerza resultante equivalente $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$, que actúan en el punto *A*, y un momento de par resultante $\mathbf{M}_{R_A} = \Sigma \mathbf{M}_A$, figura 5-11*b*. Si se satisface $\Sigma M_A = 0$, es necesario que $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. Además, para que $\mathbf{F}_R$ satisfaga a $\Sigma F_x = 0$, *no debe tener componentes* a lo largo del eje *x*, y por lo tanto, $\mathbf{F}_R$ debe ser paralela al eje *y*, figura 5-11*c*. Finalmente, se requiere que $\Sigma M_B = 0$, donde *B* no se encuentra sobre la línea de acción de $\mathbf{F}_R$, entonces $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$. Como las ecuaciones 5-3 muestran que ambas resultantes son iguales a cero, ciertamente el cuerpo que aparece en la figura 5-11*a* debe estar en equilibrio.

Un segundo conjunto alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0$$
$$\Sigma M_B = 0 \quad (5\text{-}4)$$
$$\Sigma M_C = 0$$

Aquí es necesario que los puntos $A$, $B$ y $C$ no se encuentren en la misma línea. Para probar que al satisfacer esas ecuaciones se garantiza el equilibrio, considere de nuevo el diagrama de cuerpo libre de la figura 5-11*b*. Si $\Sigma M_A = 0$ debe ser satisfecha, entonces $\mathbf{M}_{R_A} = \mathbf{0}$. $\Sigma M_C = 0$ se satisface si la línea de acción de $\mathbf{F}_R$ pasa por el punto $C$ como se muestra en la figura 5-11*c*. Por último, si requerimos que $\Sigma M_B = 0$, es necesario que $\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$, y entonces la placa de la figura 5-11*a* debe estar en equilibrio.

## Procedimiento para el análisis

Los problemas de equilibrio de fuerzas coplanares para un cuerpo rígido pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

### Diagrama de cuerpo libre.

- Establezca los ejes coordenados $x$, $y$ en cualquier orientación adecuada.
- Trace un contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Marque todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes $x$ o $y$. El sentido de una fuerza o momento de par que tiene una magnitud *desconocida*, pero línea de acción conocida, puede *suponerse*.
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Aplique la ecuación de equilibrio de momentos, $\Sigma M_O = 0$, con respecto a un punto ($O$) que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas. De este modo, los momentos de esas incógnitas son cero con respecto a $O$, y se puede determinar una *solución directa* para la tercera incógnita.
- Al aplicar las ecuaciones de equilibrio mediante fuerzas, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, oriente los ejes $x$ y $y$ a lo largo de líneas que proporcionen la descomposición más simple de las fuerzas en sus componentes $x$ y $y$.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da como resultado un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, esto indica que el sentido es contrario al que se supuso en el diagrama de cuerpo libre.

## EJEMPLO 5.5

Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en la viga, causada por el pasador en $B$ y el soporte de mecedora en $A$, como se muestra en la figura 5-12*a*. No tome en cuenta el peso de la viga.

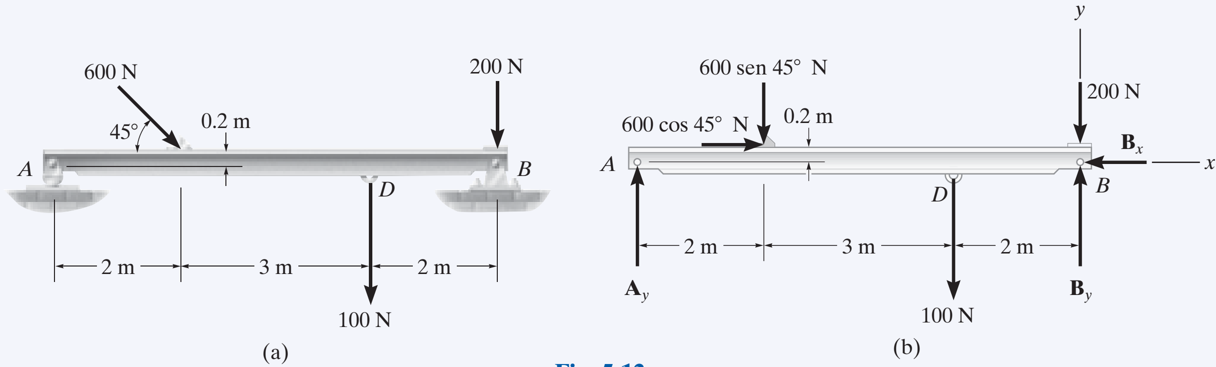



**Fig. 5-12**

5

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Identifique cada una de las fuerzas que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga, figura 5-12*b*. (Vea el ejemplo 5.1). Por sencillez, la fuerza de 600 N se representa mediante sus componentes $x$ y $y$ como se muestra en la figura 5-12*b*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar las fuerzas en la dirección $x$ se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 600 \cos 45° \text{ N} - B_x = 0$$

$$B_x = 424 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Una solución directa para $\mathbf{A}_y$ se puede obtener mediante la ecuación de momentos $\Sigma M_B = 0$ con respecto al punto $B$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 100 \text{ N}(2 \text{ m}) + (600 \text{ sen } 45° \text{ N})(5 \text{ m})$$

$$- (600 \cos 45° \text{ N})(0.2 \text{ m}) - A_y(7 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 319 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

Al sumar fuerzas en la dirección $y$, y usar este resultado, obtenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 319 \text{ N} - 600 \text{ sen } 45° \text{ N} - 100 \text{ N} - 200 \text{ N} + B_y = 0$$

$$B_y = 405 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

**NOTA:** podemos verificar este resultado al sumar momentos con respecto al punto $A$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -(600 \text{ sen } 45° \text{ N})(2 \text{ m}) - (600 \cos 45° \text{ N})(0.2 \text{ m})$$

$$-(100 \text{ N})(5 \text{ m}) - (200 \text{ N})(7 \text{ m}) + B_y(7 \text{ m}) = 0$$

$$B_y = 405 \text{ N} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

## EJEMPLO 5.6

La cuerda de la figura 5-13*a* soporta una fuerza de 100 lb y se enrolla sobre la polea sin fricción. Determine la tensión en la cuerda en $C$ y las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador $A$.

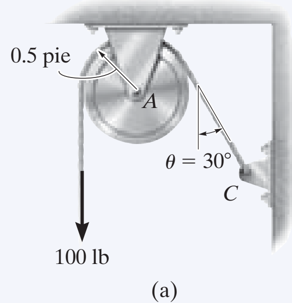
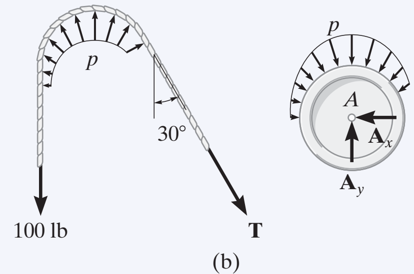



**Fig. 5-13**

### SOLUCIÓN

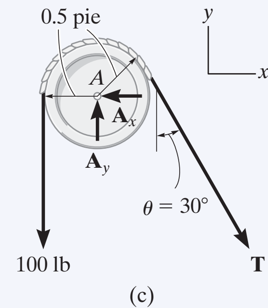
**Diagramas de cuerpo libre.** Los diagramas de cuerpo libre de la cuerda y la polea se muestran en la figura 5-13*b*. Tenga presente que el principio de acción igual pero reacción opuesta se debe observar con gran cuidado al trazar cada uno de esos diagramas: la cuerda ejerce una distribución de carga desconocida $p$ sobre la polea en la superficie de contacto, mientras que la polea ejerce un efecto igual pero opuesto sobre la cuerda. Sin embargo, para encontrar la solución es más sencillo *combinar* los diagramas de cuerpo libre de la polea y esta porción de la cuerda, de manera que la carga distribuida se vuelva *interna* al "sistema" y, por lo tanto, pueda eliminarse del análisis, figura 5-13*c*.




**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto al punto $A$ para eliminar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$, figura 5-13*c*, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad 100 \text{ lb } (0.5 \text{ pie}) - T(0.5 \text{ pie}) = 0$$

$$T = 100 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$




Con el resultado

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + 100 \text{ sen } 30° \text{ lb} = 0$$

$$A_x = 50.0 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 100 \text{ lb} - 100 \cos 30° \text{ lb} = 0$$

$$A_y = 187 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** se observa que la tensión permanece *constante* al pasar la cuerda sobre la polea. (Por supuesto, esto es cierto para *cualquier ángulo* $\theta$ en el que esté dirigida la cuerda y para *cualquier radio* $r$ de la polea).

5

## EJEMPLO 5.7

El elemento que se muestra en la figura 5-14*a* está articulado en $A$ y descansa contra un soporte liso ubicado en $B$. Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador $A$.

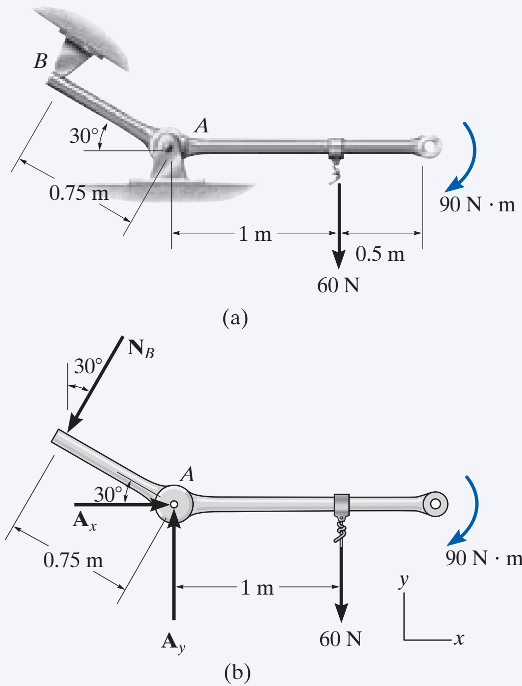



**Fig. 5-14**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 5-14*b*, la reacción $\mathbf{N}_B$ es perpendicular al eslabón en $B$. También, las componentes horizontal y vertical de reacción están representadas en $A$.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto a $A$, obtenemos una solución directa para $N_B$,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -90\text{ N}\cdot\text{m} - 60\text{ N}(1\text{ m}) + N_B(0.75\text{ m}) = 0$$

$$N_B = 200\text{ N}$$

Con este resultado,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 200\text{ sen }30^\circ\text{ N} = 0$$

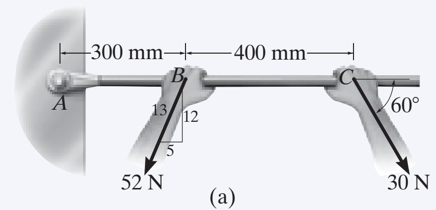
$$A_x = 100\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 200\cos 30^\circ\text{ N} - 60\text{ N} = 0$$

$$A_y = 233\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 5.8

La llave de cubo que se muestra en la figura 5-15*a* se usa para apretar el perno en *A*. Si la llave no gira cuando se aplica la carga al maneral, determine el par de torsión o el momento aplicado al perno y la fuerza de la llave sobre el perno.




### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** El diagrama de cuerpo libre para la llave se muestra en la figura 5-15*b*. Dado que el perno actúa como un "soporte fijo", ejerce las componentes de fuerza $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ y un momento $\mathbf{M}_A$ sobre la llave en *A*.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - 52\left(\tfrac{5}{13}\right)\text{N} + 30\cos 60^\circ\ \text{N} = 0$$

$$A_x = 5.00\ \text{N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 52\left(\tfrac{12}{13}\right)\text{N} - 30\ \text{sen}\ 60^\circ\ \text{N} = 0$$

$$A_y = 74.0\ \text{N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\ M_A - \left[52\left(\tfrac{12}{13}\right)\text{N}\right](0.3\ \text{m}) - (30\ \text{sen}\ 60^\circ\ \text{N})(0.7\ \text{m}) = 0$$

$$M_A = 32.6\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

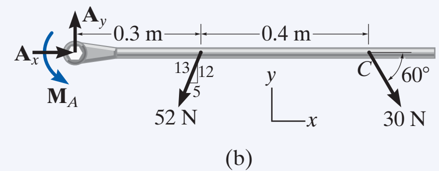



**Fig. 5-15**

Observe que en esta sumatoria de momentos debe *incluirse* $\mathbf{M}_A$. Este momento de par es un vector libre y representa la resistencia del perno a girar sobre la llave. Por la tercera ley de Newton, la llave ejerce un momento o par de torsión igual pero opuesto sobre el perno. Además, la fuerza resultante sobre la llave es

$$F_A = \sqrt{(5.00)^2 + (74.0)^2} = 74.1\ \text{N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** aunque sólo pueden escribirse *tres* ecuaciones independientes de equilibrio para un cuerpo rígido, es un buen hábito *revisar* los cálculos mediante una cuarta ecuación de equilibrio. Por ejemplo, los cálculos anteriores se pueden verificar en parte al sumar momentos con respecto al punto *C*:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;\ \left[52\left(\tfrac{12}{13}\right)\text{N}\right](0.4\ \text{m}) + 32.6\ \text{N}\cdot\text{m} - 74.0\ \text{N}(0.7\ \text{m}) = 0$$

$$19.2\ \text{N}\cdot\text{m} + 32.6\ \text{N}\cdot\text{m} - 51.8\ \text{N}\cdot\text{m} = 0$$

## EJEMPLO 5.9

Determine las componentes horizontal y vertical de reacción sobre el elemento en el pasador $A$, y la reacción normal en el rodillo $B$ de la figura 5-16*a*.

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 5.16*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre. El pasador en $A$ ejerce dos componentes de reacción sobre el elemento, $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$.

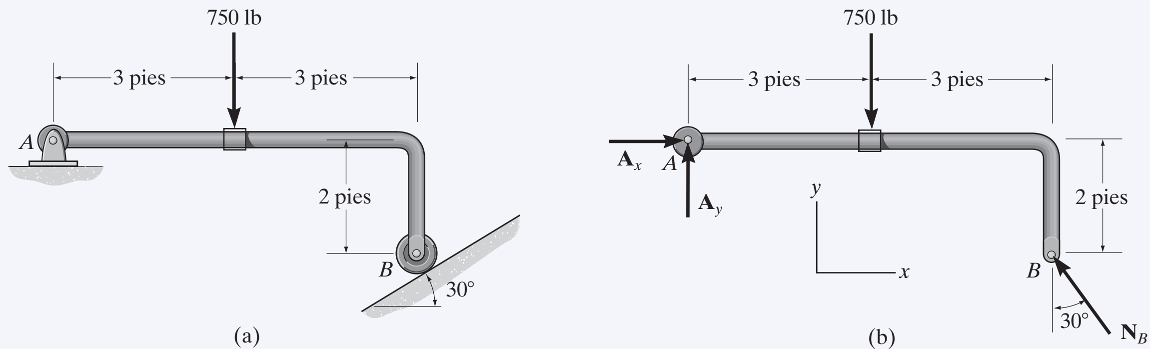



**Fig. 5-16**

**Ecuaciones de equilibrio.** La reacción $N_B$ puede obtenerse *directamente* al sumar momentos con respecto al punto $A$ puesto que $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ no producen momentos con respecto a $A$.

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$

$$[N_B \cos 30°](6 \text{ pies}) - [N_B \text{ sen } 30°](2 \text{ pies}) - 750 \text{ lb}(3 \text{ pies}) = 0$$

$$N_B = 536.2 \text{ lb} = 536 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Con este resultado

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - (536.2 \text{ lb}) \text{ sen } 30° = 0$

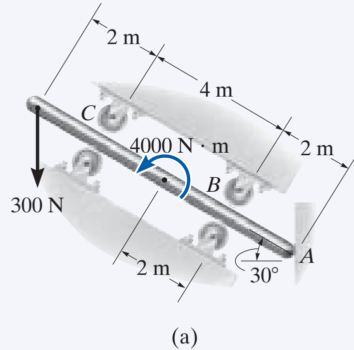
$$A_x = 268 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y + (536.2 \text{ lb}) \cos 30° - 750 \text{ lb} = 0$

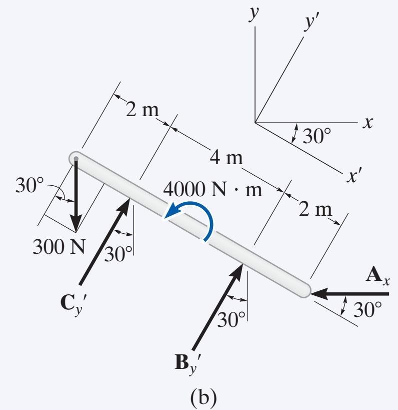
$$A_y = 286 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 5.10

La barra uniforme lisa que se muestra en la figura 5-17*a* está sometida a una fuerza y a un momento de par. Si la barra está soportada en $A$ por una pared lisa, y en $B$ y $C$ por rodillos colocados en la parte superior o inferior, determine las reacciones en esos soportes. No tome en cuenta el peso de la barra.




(a)




(b)

**Fig. 5-17**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se ve en la figura 5-17*b*, todas las reacciones de soporte actúan en forma normal a las superficies de contacto ya que dichas superficies son lisas. Se muestra que las reacciones en $B$ y $C$ actúan en la dirección $y'$ positiva. Esto hace suponer que los rodillos ubicados al fondo de la barra sólo se usan para soporte.

**Ecuaciones de equilibrio.** Si utilizamos el sistema coordenado $x$, $y$ que se muestra en la figura 5-17*b*, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad C_{y'} \text{ sen } 30° + B_{y'} \text{ sen } 30° - A_x = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -300 \text{ N} + C_{y'} \cos 30° + B_{y'} \cos 30° = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -B_{y'}(2 \text{ m}) + 4000 \text{ N}\cdot\text{m} - C_{y'}(6 \text{ m}) + (300 \cos 30° \text{ N})(8 \text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

Al escribir la ecuación de momentos, debe observarse que la línea de acción de la componente de fuerza 300 sen 30° N pasa por el punto $A$ y, por lo tanto, esta fuerza no está incluida en la ecuación de momentos.

Al resolver simultáneamente las ecuaciones 2 y 3 obtenemos

$$B_{y'} = -1000.0 \text{ N} = -1 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$C_{y'} = 1346.4 \text{ N} = 1.35 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Como $B_{y'}$ es un escalar negativo, el sentido de $\mathbf{B}_{y'}$ es opuesto al del diagrama de cuerpo libre de la figura 5-17*b*. Por consiguiente, el rodillo superior ubicado en $B$ sirve como soporte en vez del inferior. Se retiene el signo negativo para $B_{y'}$ (¿por qué?) y al sustituir los resultados en la ecuación 1, obtenemos

$$1346.4 \text{ sen } 30° \text{ N} + (-1000.0 \text{ sen } 30° \text{ N}) - A_x = 0$$

$$A_x = 173 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 5.11



(a)

La rampa uniforme del camión que se muestra en la figura 5-18*a* pesa 400 lb y está articulada al bastidor del camión en cada lado; asimismo, se mantiene en la posición mostrada mediante los dos cables laterales. Determine la tensión en los cables.

### SOLUCIÓN

En la figura 5-18*b* se muestra el modelo idealizado de la rampa, que indica todas las dimensiones y soportes necesarios. Aquí el centro de gravedad está localizado en el punto medio ya que la rampa es aproximadamente uniforme.

(b)

**Diagrama de cuerpo libre.** A partir del modelo idealizado, el diagrama de cuerpo libre de la rampa se muestra en la figura 5-18*c*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto al punto $A$ se tendrá una solución directa para la tensión en el cable. Si se usa el principio de momentos, hay varias maneras de determinar el momento de **T** con respecto a $A$. Si usamos las componentes $x$ y $y$, con **T** aplicada en $B$, tenemos

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad -T\cos 20°(7 \text{ sen } 30° \text{ pie}) + T \text{ sen } 20°(7\cos 30° \text{ pie})$$

$$+ 400 \text{ lb } (5 \cos 30° \text{ pie}) = 0$$

$$T = 1425 \text{ lb}$$

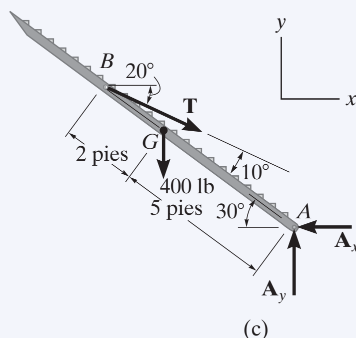
La manera más simple de calcular el momento de **T** con respecto a $A$ es descomponerla en componentes a lo largo y de manera perpendicular a la rampa en $B$. Entonces, el momento de la componente a lo largo de la rampa es cero con respecto a $A$, por lo que

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \qquad -T \text{ sen } 10°(7 \text{ pies}) + 400 \text{ lb } (5 \cos 30° \text{ pie}) = 0$$

$$T = 1425 \text{ lb}$$

Dado que dos cables soportan la rampa,

$$T' = \frac{T}{2} = 712 \text{ lb}$$ ***Resp.***




(c)

**Fig. 5-18**

**NOTA:** como ejercicio, demuestre que $A_x = 1339$ lb y $A_y = 887.4$ lb.

## EJEMPLO 5.12

Determine las reacciones del soporte sobre el elemento que se muestra en la figura 5-19*a*. El collar en *A* está fijo al elemento y puede deslizarse verticalmente a lo largo del eje vertical.

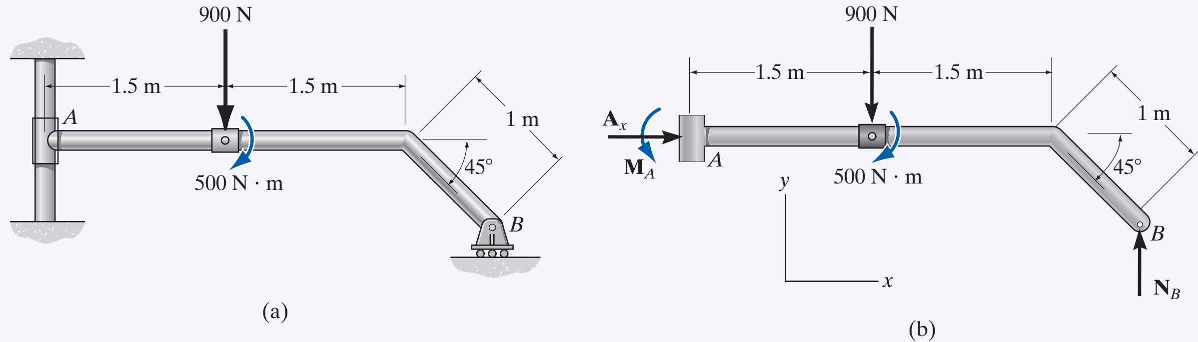



**Fig. 5-19**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 5-19*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento. El collar ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{A}_x$ y un momento $\mathbf{M}_A$ sobre el elemento. La reacción $\mathbf{N}_B$ del rodillo sobre el elemento es vertical.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las fuerzas $A_x$ y $N_B$ pueden calcularse directamente a partir de las ecuaciones de equilibrio de fuerza.

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad N_B - 900 \text{ N} = 0$

$N_B - 900 \text{ N}$ ***Resp.***

El momento $M_A$ puede determinarse al sumar los momentos con respecto al punto *A* o bien con respecto al punto *B*.

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$

$$M_A - 900 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 500 \text{ N}\cdot\text{m} + 900 \text{ N}\,[3 \text{ m} + (1 \text{ m}) \cos 45°] = 0$$

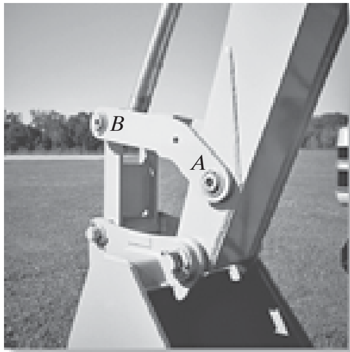
$$M_A = -1486 \text{ N}\cdot\text{m} = 1.49 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright$$ ***Resp.***

o bien

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;\quad M_A + 900 \text{ N}\,[1.5 \text{ m} + (1 \text{ m}) \cos 45°] - 500 \text{ N}\cdot\text{m} = 0$$

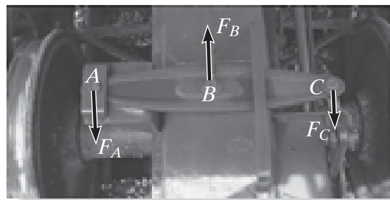
$$M_A = -1486 \text{ N}\cdot\text{m} = 1.49 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowright$$ ***Resp.***

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_A$ tiene el sentido de rotación opuesto al del diagrama de cuerpo libre.

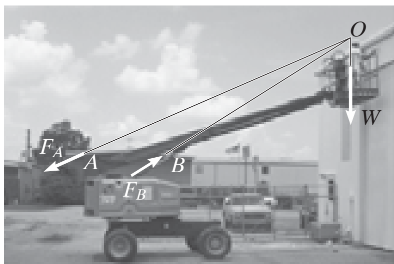



El eslabón $AB$ del cucharón de la retroexcavadora es un ejemplo típico de un elemento de dos fuerzas, ya que está conectado mediante pasadores en sus extremos y, si no se toma en cuenta su peso, ninguna otra fuerza actúa sobre este elemento.

5




El eslabón que se usa para frenar este vagón de ferrocarril es un elemento de tres fuerzas. Como la fuerza $\mathbf{F}_B$ en la barra $B$ y $\mathbf{F}_C$ desde el eslabón en $C$ son paralelas, para lograr el equilibrio la fuerza resultante $\mathbf{F}_A$ en el pasador $A$ también debe ser paralela a estas dos fuerzas.

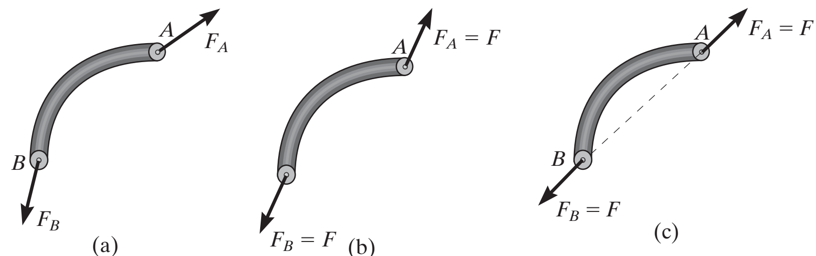



La pluma de este elevador es un elemento de tres fuerzas, sin tomar en cuenta su peso. Aquí, las líneas de acción del peso del trabajador, $\mathbf{W}$, y la fuerza del elemento de dos fuerzas (cilindro hidráulico) en $B$, $\mathbf{F}_B$, se intersecan en $O$. Para el equilibrio de momento, la fuerza resultante en el pasador $A$, $\mathbf{F}_A$, también debe estar dirigida hacia $O$.

## 5.4 Elementos de dos y tres fuerzas

Las soluciones de algunos problemas de equilibrio pueden simplificarse al identificar los elementos que están sometidos a sólo dos o tres fuerzas.

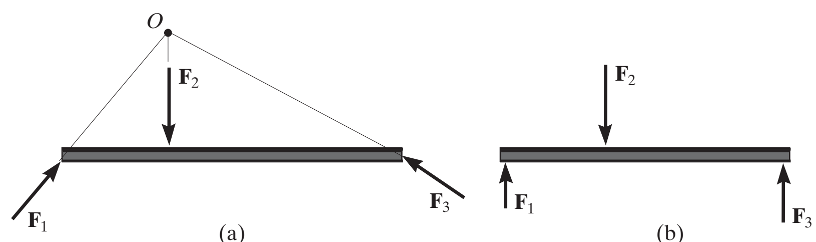
**Elementos de dos fuerzas** Como lo indica su nombre, un *elemento de dos fuerzas* tiene fuerzas aplicadas en sólo dos puntos sobre el elemento. Un ejemplo se muestra en la figura 5-20*a*. Para satisfacer el equilibrio de fuerzas, $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ deben tener la misma magnitud, $F_A = F_B = F$, pero dirección opuesta ($\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$), figura 5-20*b*. Además, el equilibrio de momentos requiere que $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ compartan la misma línea de acción, lo cual sólo puede ocurrir si están dirigidas a lo largo de la línea que une a los puntos $A$ y $B$ ($\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ o bien $\Sigma\mathbf{M}_B = \mathbf{0}$), figura 5-20*c*. Por lo tanto, para que cualquier elemento de dos fuerzas esté en equilibrio, las dos fuerzas que actúan sobre él *deben tener la misma magnitud, actuar en direcciones opuestas y tener la misma línea de acción, dirigida a lo largo de la línea que une los puntos donde actúan estas fuerzas*.




Elemento de dos fuerzas

**Fig. 5-20**

**Elementos de tres fuerzas** Si un elemento está sometido a sólo *tres fuerzas*, se denomina *elemento de tres fuerzas*. El equilibrio de momento se puede satisfacer sólo si las tres fuerzas forman un sistema de fuerzas *concurrentes* o *paralelas.* Para ilustrar esto, considere el elemento sometido a las tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, que se muestra en la figura 5-21*a*. Si las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se intersecan en el punto $O$, entonces la línea de acción de $\mathbf{F}_3$ *también* debe pasar por el punto $O$, de modo que las fuerzas satisfagan $\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Como caso especial, si las tres fuerzas son paralelas, figura 5-21*b*, la ubicación del punto de intersección, $O$, se aproximará al infinito.




Elemento de tres fuerzas

**Fig. 5-21**

## EJEMPLO 5.13

La palanca $ABC$ está articulada en $A$ y conectada a un eslabón corto $BD$, como se muestra en la figura 5-22*a*. Si el peso del elemento es insignificante, determine la fuerza del pasador sobre la palanca en $A$.

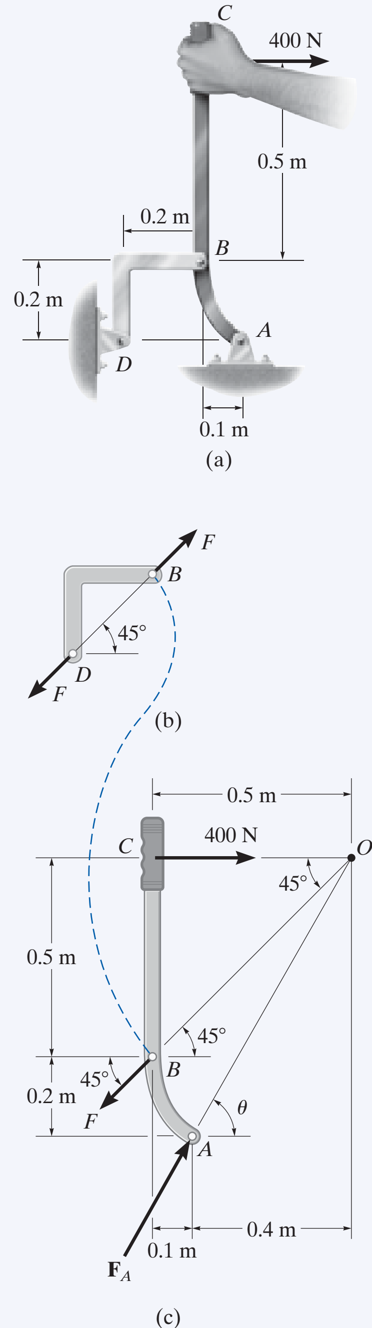



**Fig. 5-22**

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** Como se ve en la figura 5-22*b*, el eslabón corto $BD$ es un *elemento de dos fuerzas*, por lo que las *fuerzas resultantes* en los pasadores $D$ y $B$ deben ser iguales, opuestas y colineales. Aunque la magnitud de la fuerza es una incógnita, la línea de acción es conocida ya que pasa por $B$ y $D$.

La palanca $ABC$ es un *elemento de tres fuerzas*, por lo tanto, para satisfacer el equilibrio de momento, las tres fuerzas no paralelas que actúan sobre la palanca deben ser concurrentes en $O$, figura 5-22*c*. En particular, observe que la fuerza **F** sobre la palanca en $B$ es igual pero opuesta a la fuerza **F** que actúa en $B$ sobre el eslabón. ¿Por qué? La distancia $CO$ debe ser de 0.5 m ya que las líneas de acción de **F** y la fuerza de 400 N son conocidas.

**Ecuaciones de equilibrio.** Como se requiere que el sistema de fuerzas sea concurrente en $O$, y ya que $\Sigma M_O = 0$, el ángulo $\theta$ que define la línea de acción de $\mathbf{F}_A$ puede determinarse por trigonometría,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{0.4}\right) = 60.3^\circ$$

Con los ejes $x$, $y$ y la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas,

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_A \cos 60.3^\circ - F \cos 45^\circ + 400 \text{ N} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A \text{ sen } 60.3^\circ - F \text{ sen } 45^\circ = 0$$

Al despejar, obtenemos

$$F_A = 1.07 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

$$F = 1.32 \text{ kN}$$

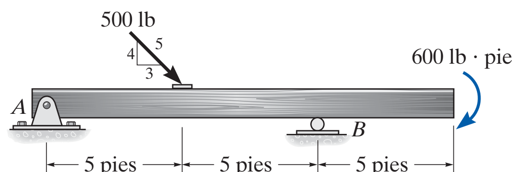
**NOTA:** también podemos resolver este problema por la representación de la fuerza en $A$ mediante sus dos componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ y la aplicación de $\Sigma M_A = 0$, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ a la palanca. Una vez determinadas $A_x$ y $A_y$, podemos obtener $F_A$ y $\theta$.

5

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

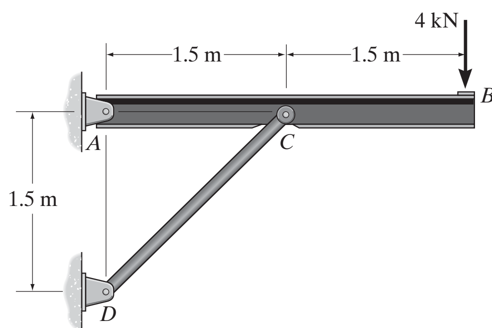
*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

**F5-1.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los soportes. Desprecie el grosor de la viga.



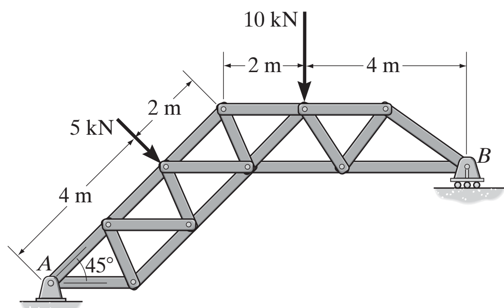

F5-1

**F5-2.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la reacción sobre la viga en $C$.



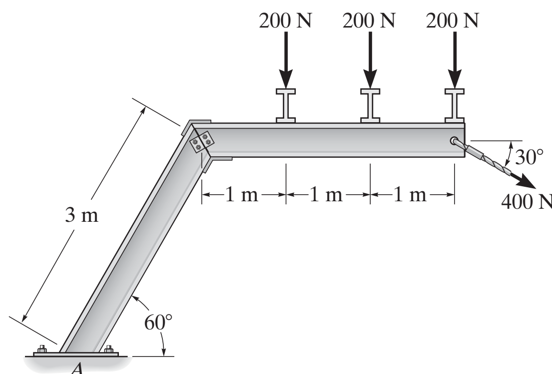

F5-2

**F5-3.** La armadura se sostiene mediante un pasador en $A$ y un rodillo en $B$. Determine las reacciones de soporte.



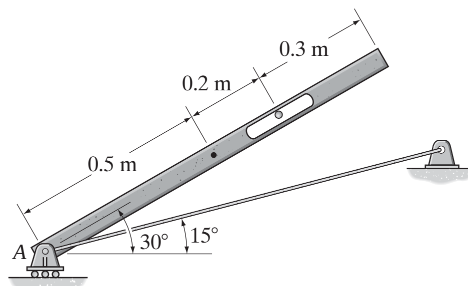

F5-3

**F5-4.** Determine las componentes de reacción en el soporte fijo ubicado en $A$. El grosor de la viga no cuenta.



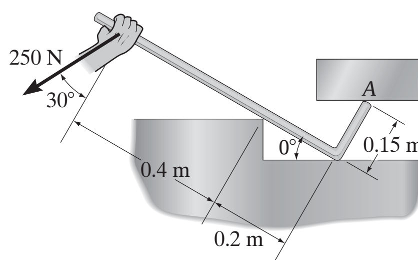

F5-4

**F5-5.** La barra de 25 kg tiene un centro de masa en $G$. Si la barra se sostiene mediante una clavija lisa en $C$, un rodillo en $A$ y una cuerda $AB$, determine las reacciones en estos soportes.




F5-5

**F5-6.** Determine las reacciones en los puntos de contacto lisos $A$, $B$ y $C$ de la barra.




F5-6

## PROBLEMAS

*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

**5.11.** Determine las reacciones normales en *A* y *B* en el problema 5-1.

***5.12.** Determine la tensión en la cuerda y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte *A* de la viga en el problema 5-4.

•**5-13.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en *C* y la tensión en el cable *AB* para la armadura del problema 5-5.

**5-14.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en *A* y la tensión en el cable *BC* sobre la pluma del problema 5-6.

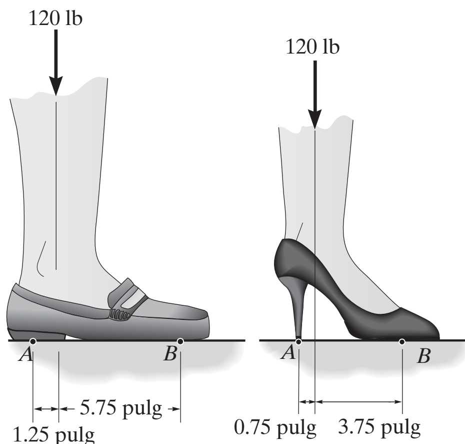
**5-15.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en *A* y la reacción normal en *B* sobre la llave de horquilla del problema 5-7.

***5-16.** Determine las reacciones normales en *A* y *B* y la fuerza en el eslabón *CD* que actúa sobre el elemento del problema 5-8.

•**5-17.** Determine las reacciones normales en los puntos de contacto en *A*, *B* y *C* de la barra que se muestra en el problema 5-9.

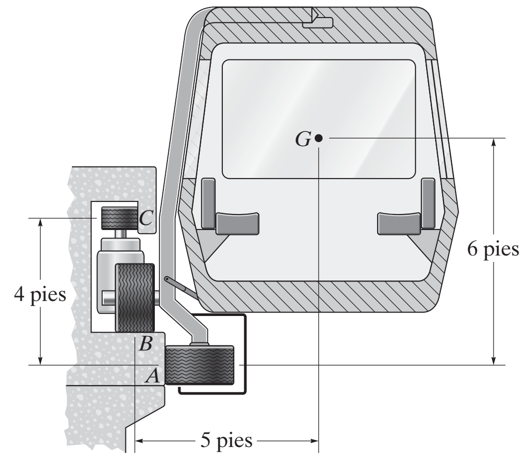
**5-18.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *C* y la fuerza en el trinquete del malacate que se muestra en el problema 5-10.

**5-19.** Compare la fuerza ejercida sobre la punta del pie y el talón de una mujer de 120 lb cuando calza zapatos normales y cuando lleva zapatos de tacón. Suponga que todo su peso recae sobre uno de sus pies y que las reacciones ocurren en los puntos *A* y *B* que se muestran en la figura.



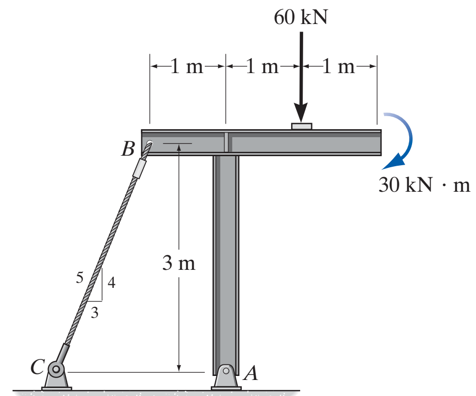

**Prob. 5-19**

***5-20.** El vagón de ferrocarril tiene un peso de 24 000 lb y un centro de gravedad en *G*. Está suspendido de la vía en sus partes delantera y trasera mediante seis llantas ubicadas en *A*, *B* y *C*. Determine las reacciones normales sobre estas llantas si se supone que la vía es una superficie lisa y que, tanto en las llantas delanteras como en las traseras, se sostiene una porción equivalente de la carga.



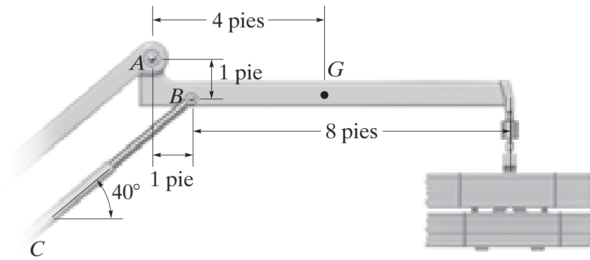

**Prob. 5-20**

•**5-21.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *A* y la tensión desarrollada en el cable *BC* que se usa para sostener el bastidor de acero.



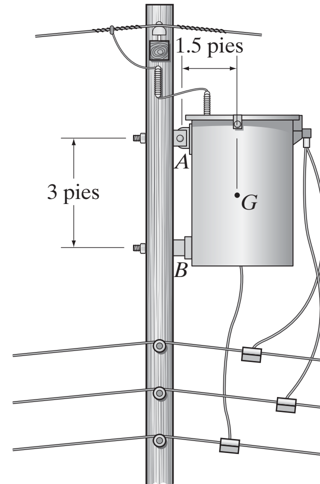

**Prob. 5-21**

**5-22.** La pluma articulada de la grúa tiene un peso de 125 lb y centro de gravedad en $G$. Si sostiene una carga de 600 lb, determine la fuerza que actúa en el pasador $A$ y la fuerza en el cilindro hidráulico $BC$ cuando la pluma está en la posición mostrada.




**Prob. 5-22**

**•5-25.** El transformador eléctrico de 300 lb con centro de gravedad en $G$ se sostiene mediante un pasador en $A$ y una plataforma lisa en $B$. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la reacción de la plataforma $B$ sobre el transformador.

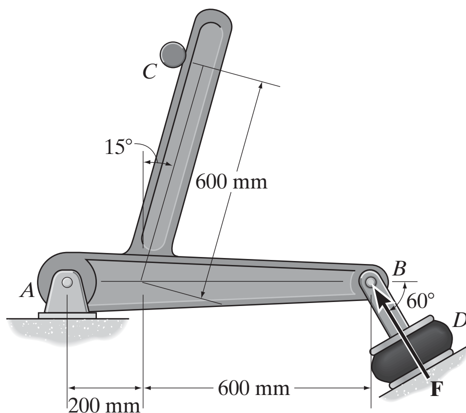



**Prob. 5-25**

5

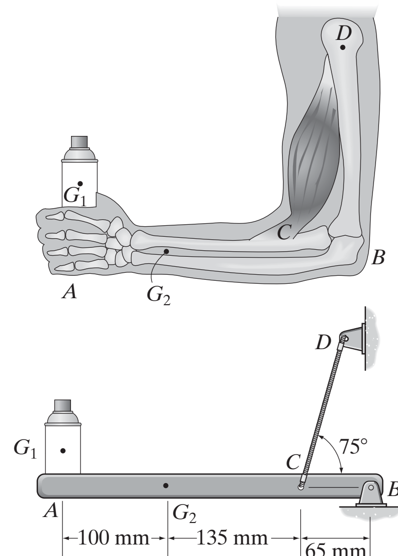
**5-23.** El actuador neumático en $D$ se usa para aplicar una fuerza de $F = 200$ N sobre el elemento en $B$. Determine los componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la fuerza del eje liso ubicado en $C$ sobre el elemento.

***5-24.** El actuador neumático en $D$ se usa para aplicar una **F** sobre el elemento en $B$. La reacción normal en el eje liso ubicado en $C$ sobre el elemento es de 300 N. Determine la magnitud de **F** y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$.



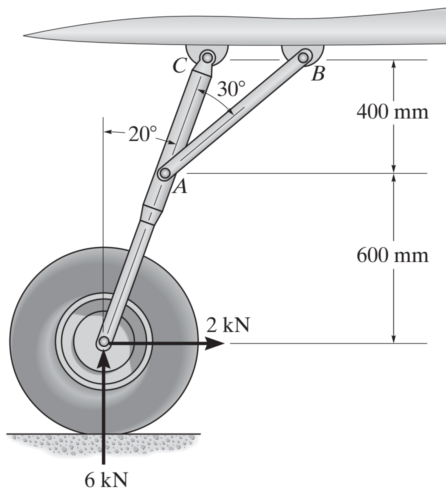

**Probs. 5-23/24**

**5-26.** En la parte superior de la siguiente figura se muestra un diagrama esquelético de una mano sosteniendo una carga. Si la carga y el antebrazo tienen masas de 2 kg y 1.2 kg, respectivamente, y sus centros de masa se localizan en $G_1$ y $G_2$, determine la fuerza desarrollada en el bíceps $CD$ y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el codo $B$. El antebrazo que sostiene al sistema puede modelarse como el sistema estructural que se muestra en la parte inferior de la figura.



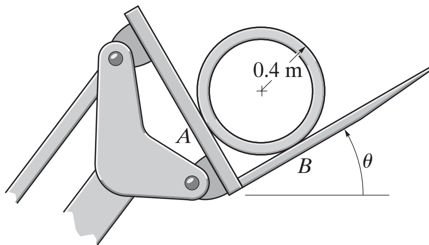

**Prob. 5-26**

**5-27.** Cuando se aplican los frenos de un avión, la rueda frontal ejerce dos fuerzas sobre el extremo del tren de aterrizaje como se muestra en la figura. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $C$ y la fuerza en el tirante $AB$.



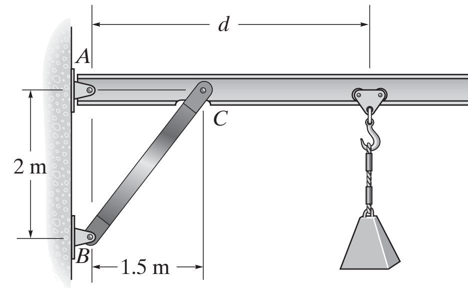

Prob. 5-27

***5-28.** El tubo de desagüe de 1.4 Mg se sostiene en las barras del montacargas. Determine las fuerzas normales en $A$ y $B$ como funciones del ángulo de inclinación $\theta$ y grafique los resultados de las fuerzas (eje vertical) contra $\theta$ (eje horizontal) para $0 \leq \theta \leq 90°$.




Prob. 5-28

**•5-29.** La masa de 700 kg se suspende de un trole cargador que se mueve a lo largo del riel desde $d = 1.7$ m hasta $d = 3.5$ m. Determine la fuerza a lo largo del tirante articulado $BC$ (eslabón corto) y la magnitud de la fuerza en el pasador $A$ como una función de la posición $d$. Grafique los resultados de $F_{BC}$ y $F_A$ (eje vertical) contra $d$ (eje horizontal).

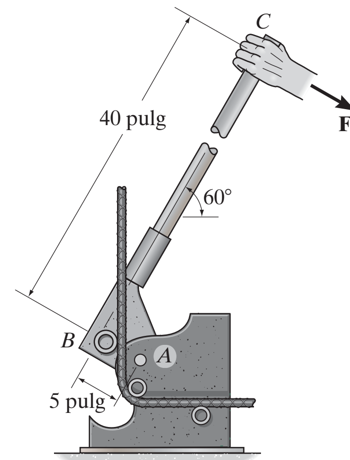



Prob. 5-29



**5-30.** Si la fuerza de $F = 100$ lb se aplica a la manija del doblador de barras, determine las componentes vertical y horizontal de la reacción en el pasador $A$ y la reacción del rodillo $B$ sobre la barra lisa.

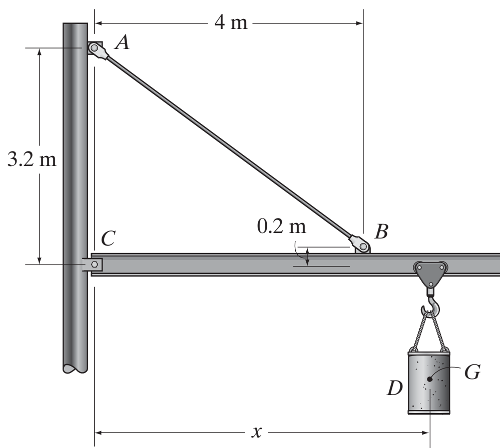
**5-31.** Si se requiere que la fuerza del rodillo liso en $B$ sobre el doblador de barras sea de 1.5 kip, determine las componentes vertical y horizontal de la reacción en el pasador $A$ y la magnitud de la fuerza **F** que se aplica a la manija.




Probs. 5-30/31

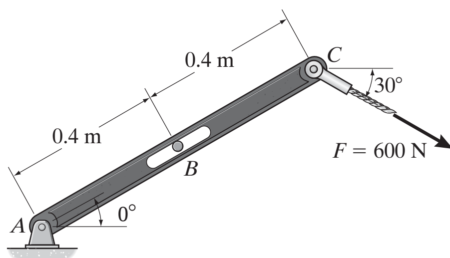
*5-32. El brazo de la grúa se sostiene mediante un pasador en $C$ y la varilla $AB$. Si la carga tiene una masa de 2 Mg con su centro de masa localizado en $G$, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $C$ y la fuerza desarrollada en la varilla $AB$ sobre la grúa cuando $x = 5$ m.

•5-33. El brazo de la grúa se sostiene mediante un pasador en $C$ y la varilla $AB$. La varilla puede soportar una tensión máxima de 40 kN. Si la carga tiene una masa de 2 Mg con su centro de masa localizado en $G$, determine la máxima distancia $x$ permisible y las componentes horizontal y vertical correspondientes de la reacción en $C$.



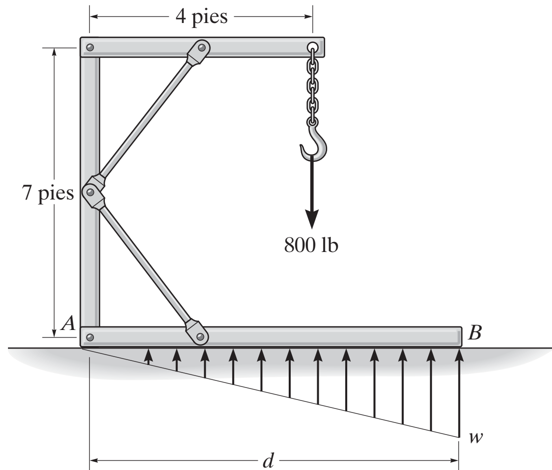

**Probs. 5-32/33**

**5-34.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la fuerza normal en la clavija lisa $B$ sobre el elemento.



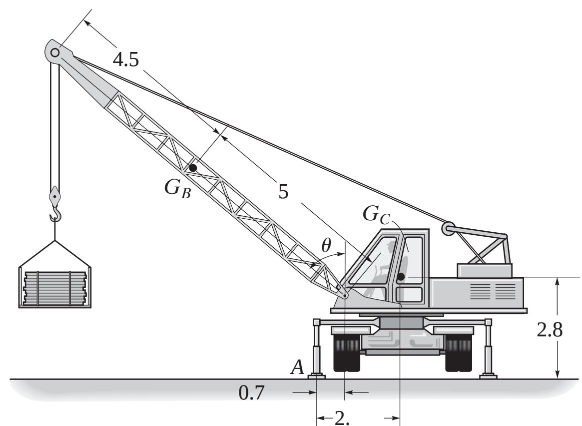

**Prob. 5-34**

**5-35.** El armazón se sostiene mediante el elemento $AB$ que descansa sobre el piso liso. Cuando el armazón está cargado, la distribución de presión sobre $AB$ es lineal como se muestra en la figura. Determine la longitud $d$ del elemento $AB$ y la intensidad $w$ para este caso.



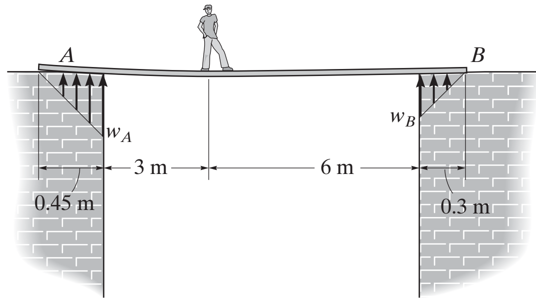

**Prob. 5-35**

*5-36. Los elementos $A$ y $B$ se utilizan para estabilizar la grúa y evitar que se vuelque al levantar cargas muy grandes. Si se va a levantar una carga de 3 Mg, determine el *máximo* ángulo $\theta$ de la pluma de modo que la grúa no se vuelque. La grúa tiene una masa de 5 Mg y centro de masa en $G_C$, mientras que la pluma tiene una masa de 0.6 Mg y centro de masa en $G_B$.




**Prob. 5-36**

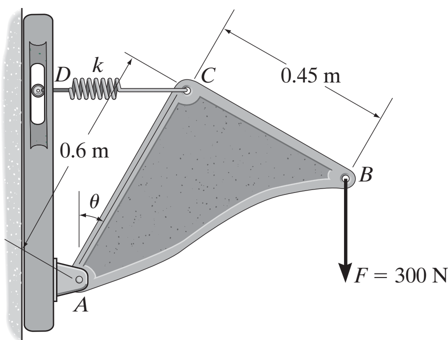
**•5-37.** El tablón de madera que descansa entre dos edificios se flexiona ligeramente cuando sostiene a una persona de 50 kg. Esta flexión causa una distribución triangular de carga en sus extremos, con intensidades máximas de $w_A$ y $w_B$. Calcule $w_A$ y $w_B$, cada una medida en N/m, cuando la persona está parada a 3 m de uno de los extremos como se muestra en la figura. Pase por alto la masa de la plancha.




**Prob. 5-37**

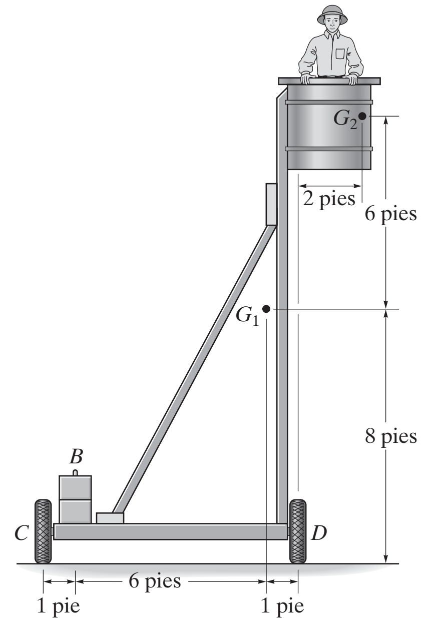
**5-38.** El resorte $CD$ permanece en la posición horizontal en todo momento debido al rodillo en $D$. Si el resorte no se estira cuando $\theta = 0°$ y la ménsula logra su posición de equilibrio cuando $\theta = 30°$, determine la rigidez $k$ del resorte y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$.

**5-39.** El resorte $CD$ permanece en la posición horizontal en todo momento debido al rodillo en $D$. Si el resorte no se estira cuando $\theta = 0°$ y la rigidez del resorte es $k = 1.5$ kN/m, determine el mínimo ángulo $\theta$ requerido para el equilibrio y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$.



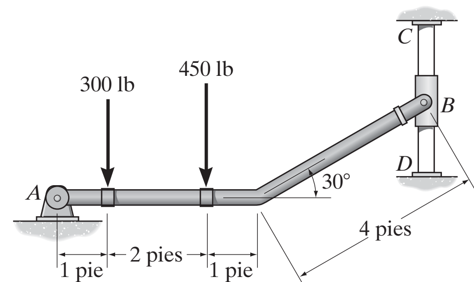

**Probs. 5-38/39**

***5-40.** El ensamble de la plataforma tiene un peso de 250 lb y su centro de gravedad está en $G_1$. Si se quiere soportar una carga máxima de 400 lb colocada en el punto $G_2$, determine el contrapeso $W$ mínimo que debe ubicarse en $B$ para evitar una volcadura de la plataforma.



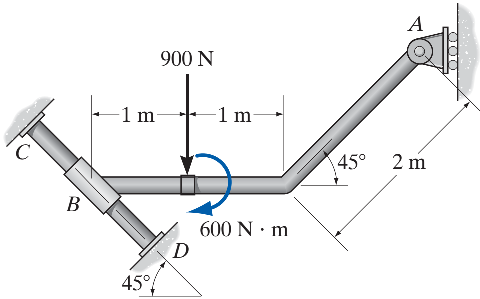

**Prob. 5-40**

**•5-41.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la reacción del collar liso $B$ sobre la barra.



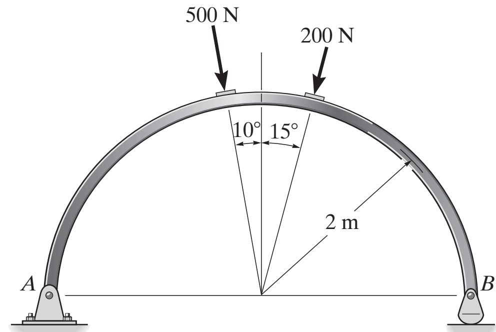

**Prob. 5-41**

**5-42.** Determine las reacciones de soporte del rodillo $A$ y el collar liso $B$ sobre la barra. El collar está fijo a la barra $AB$, pero puede deslizarse a lo largo de la barra $CD$.




Prob. 5-42

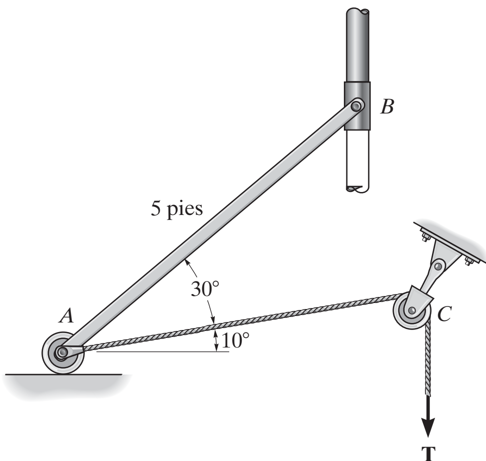
***5-44.** Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el pasador $A$ y la reacción en el soporte de mecedora $B$ de la viga curva.




Prob. 5-44



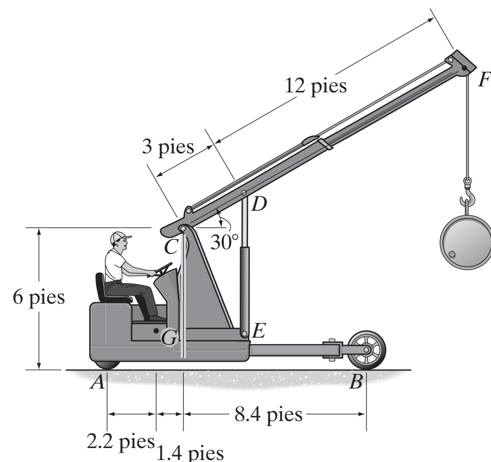
**5-43.** La barra uniforme $AB$ tiene un peso de 15 lb. Determine la fuerza en el cable cuando la barra está en la posición mostrada.




Prob. 5-43

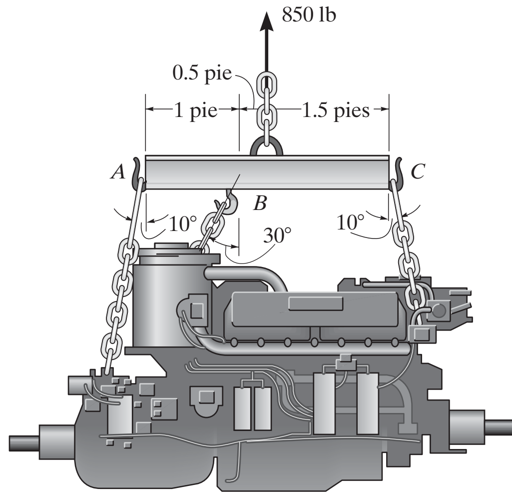
**•5-45.** La grúa de piso y el conductor tienen un peso total de 2500 lb con un centro de gravedad en $G$. Si se requiere que la grúa levante un barril de 500 lb, determine la reacción normal sobre *ambas* ruedas en $A$ y *ambas* ruedas en $B$ cuando la pluma está en la posición mostrada.

**5-46.** La grúa de piso y el conductor tienen un peso total de 2500 lb con un centro de gravedad en $G$. Determine el peso máximo del barril que puede levantar la grúa sin que esto cause una volcadura cuando la pluma está en la posición mostrada.




Probs. 5-45/46

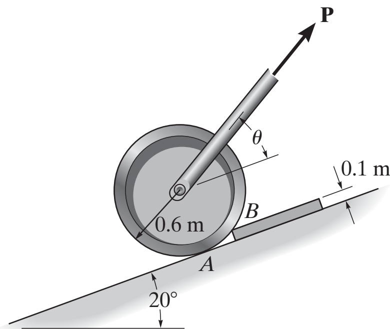
**5-47.** El motor tiene un peso de 850 lb. Determine la fuerza que ejerce cada una de las cadenas sobre los ganchos de soporte en $A$, $B$ y $C$. Pase por alto el tamaño de los ganchos y el grosor de la viga.




Prob. 5-47

*5-48. Determine la fuerza $P$ necesaria para jalar el rodillo de 50 kg sobre el escalón liso. Considere que $\theta = 60°$.

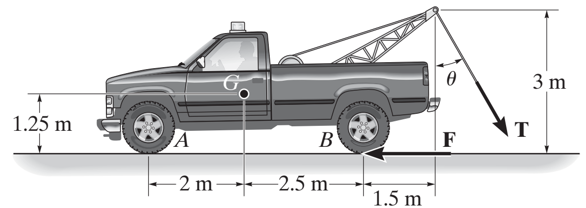
•5-49. Determine la magnitud y la dirección $\theta$ de la fuerza mínima $P$ necesaria para jalar el rodillo de 50 kg sobre el escalón liso.




Probs. 5-48/49

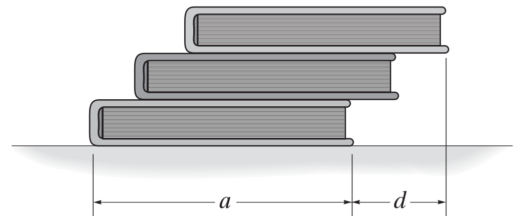
**5-50.** El cable de sujeción de una camioneta remolcadora está sometido a una fuerza de $T = 6$ kN cuando el cable tiene una dirección $\theta = 60°$. Determine las magnitudes de la fuerza total **F** de frenado por fricción para el par de ruedas traseras $B$ y de las fuerzas normales totales en *las dos* ruedas delanteras $A$ y las dos ruedas traseras $B$ para lograr el equilibrio. La camioneta tiene una masa total de 4 Mg y centro de masa en $G$.

**5-51.** Determine la fuerza mínima $T$ en el cable y el ángulo crítico $\theta$ que hará que la camioneta comience a volcarse, es decir, para que la reacción normal en $A$ sea igual a cero. Suponga que la camioneta está frenada y no patinará en $B$. La camioneta tiene una masa total de 4 Mg y centro de masa en $G$.



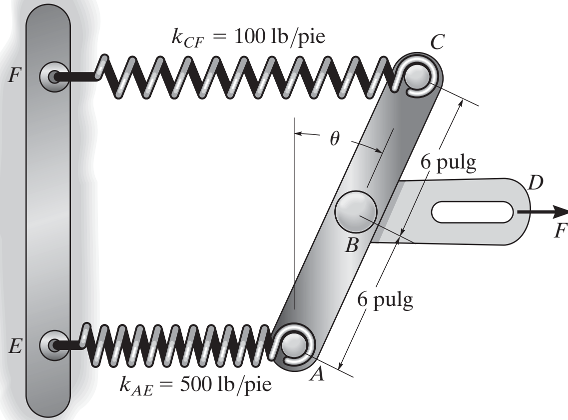

Probs. 5-50/51

*5-52. Tres libros iguales, cada uno con peso $W$ y longitud $a$, están colocados como se muestra. Determine la distancia $d$ máxima que el libro superior puede sobresalir con respecto al de la base sin que se caiga.



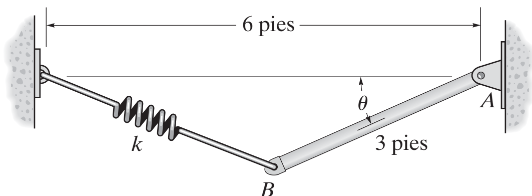

Prob. 5-52

•**5-53.** Determine el ángulo $\theta$ con el que el eslabón $ABC$ se mantiene en equilibrio si el elemento $BD$ se mueve 2 pulg a la derecha. Los resortes están originalmente sin estirar cuando $\theta = 0°$. Cada resorte tiene la rigidez que se muestra. Los resortes permanecen horizontales porque están unidos a guías de rodillo.




**Prob. 5-53**

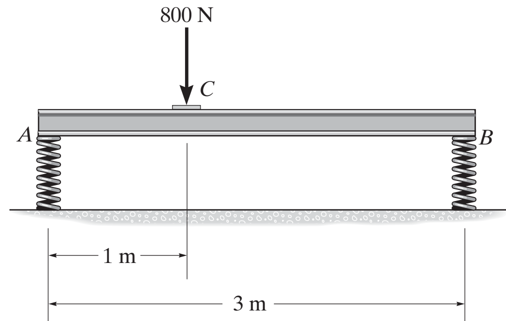
**5-54.** La barra uniforme $AB$ tiene un peso de 15 lb y el resorte no se estira cuando $\theta = 0°$. Si $\theta = 30°$, determine la rigidez $k$ del resorte.




**Prob. 5-54**

**5-55.** La viga horizontal está soportada por resortes en sus extremos. Cada resorte tiene una rigidez de $k = 5$ kN/m y originalmente no está estirado cuando la viga se encuentra en posición horizontal. Determine el ángulo de inclinación de la viga si se aplica una carga de 800 N en el punto $C$ como se muestra.

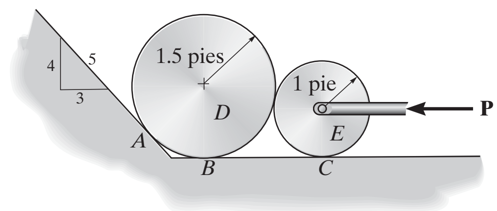
*****5-56.** La viga horizontal está soportada por resortes en sus extremos. Si la rigidez del resorte localizado en $A$ es $k_A = 5$ kN/m, determine la rigidez requerida en el resorte ubicado en $B$ de manera que si la viga se carga con 800 N permanezca en posición horizontal. Los resortes están construidos originalmente de modo que la viga mantenga la posición horizontal cuando está descargada.




**Probs. 5-55/56**

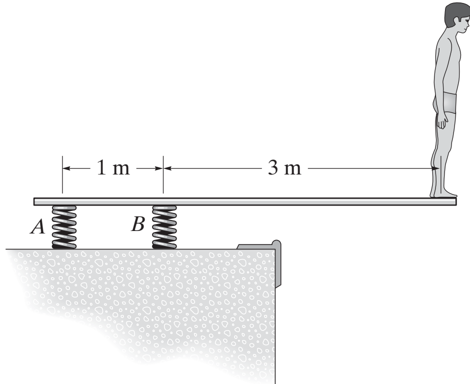
•**5-57.** Los discos lisos $D$ y $E$ tienen un peso de 200 lb y 100 lb, respectivamente. Si una fuerza horizontal de $P =$ 200 lb se aplica al centro del disco $E$, determine las reacciones normales en los puntos de contacto con el suelo en $A$, $B$ y $C$.

**5-58.** Los discos lisos $D$ y $E$ tienen un peso de 200 lb y 100 lb, respectivamente. Determine la fuerza horizontal $P$ máxima que puede aplicarse al centro del disco $E$ sin ocasionar que el disco $D$ se mueva hacia arriba por el plano inclinado.



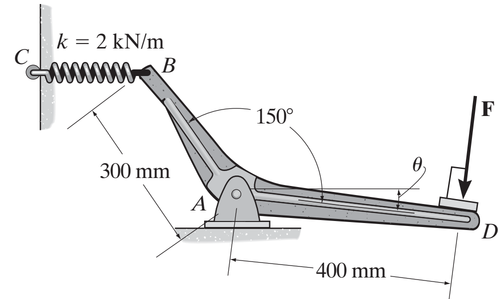

**Probs. 5-57/58**

**5-59.** Un joven está de pie en el extremo de un trampolín, el cual se sostiene por medio de los resortes ubicados en $A$ y $B$, cada resorte tiene rigidez $k = 15$ kN/m. En la posición mostrada el trampolín está horizontal. Si el joven tiene una masa de 40 kg, determine el ángulo de inclinación que forma el trampolín con la horizontal después de que salta al agua. Ignore el peso del trampolín y suponga que es rígido.



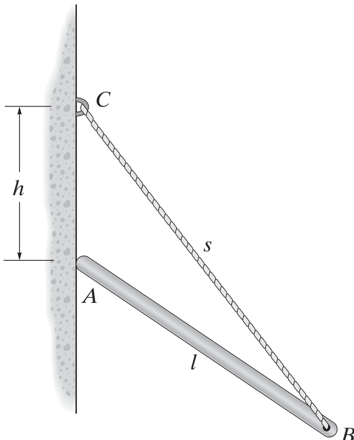

**Prob. 5-59**

**•5-61.** Si el resorte $BC$ no se estira con $\theta = 0°$ y la palanca angular logra su posición de equilibrio cuando $\theta = 15°$, determine la fuerza **F** aplicada en forma perpendicular al segmento $AD$ y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$. El resorte $BC$ permanece en la posición horizontal en todo momento debido al rodillo en $C$.



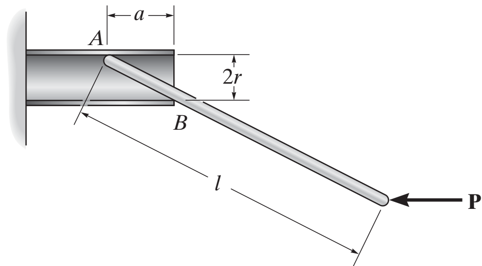

**Prob. 5-61**

***5-60.** La barra uniforme tiene una longitud $l$ y un peso $W$. Está soportada en un extremo $A$ por una pared lisa y en el otro extremo por una cuerda de longitud $s$, la cual está unida a la pared como se muestra en la figura. Demuestre que para lograr el equilibrio se requiere que $h = [(s^2 - l^2)/3]^{1/2}$.




**Prob. 5-60**

**5-62.** La varilla delgada de longitud $l$ está soportada por el tubo liso. Determine la distancia $a$ necesaria para el equilibrio si la carga aplicada es **P**.




**Prob. 5-62**

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**P5-5.** La barra de sujeción se usa para sostener el volado a la entrada de un edificio. Si está conectado mediante pasadores a la pared del edificio en *A* y al centro del volado *B*, determine si la fuerza en la barra se incrementará, disminuirá o permanecerá igual si (*a*) el soporte en *A* se mueve a una posición *D* más baja, y (*b*) el soporte en *B* se mueve a una posición *C* más cercana a la orilla. Explique su respuesta con un análisis de equilibrio, usando dimensiones y cargas. Suponga que el volado está sostenido mediante pasadores en la pared del edificio.




**P5-5**

**P5-6.** El hombre trata de jalar la cuatrimoto hacia arriba por el plano inclinado y sobre la plataforma de la camioneta. Desde la posición que se muestra, ¿será más efectivo mantener la cuerda atada en *A*, o sería mejor atarla al eje de las ruedas delanteras en *B*? Trace un diagrama de cuerpo libre y haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.




**P5-6**

**P5-7.** Como cualquier avión, este jet descansa sobre tres ruedas. ¿Por qué no usar una rueda adicional en la cola para tener un mejor soporte? (Piense en alguna razón para no incluir esta rueda). Si hubiera una cuarta rueda en la cola, trace un diagrama de cuerpo libre del jet desde una vista lateral (2 D), y muestre por qué no es posible determinar las reacciones en todas las ruedas con las ecuaciones de equilibrio.



**P5-7**

***P5-8.** ¿Cuál es el mejor sitio para acomodar la mayoría de los troncos en la carretilla, de modo que se minimice el tamaño de la fuerza que actúa sobre la columna vertebral de la persona que transporta la carga? Haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.



**P5-8**

# EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

## 5.5 Diagramas de cuerpo libre

El primer paso para resolver problemas tridimensionales de equilibrio, como en el caso de los bidimensionales, es trazar un diagrama de cuerpo libre. Sin embargo, antes de mostrar esto, es necesario analizar los tipos de reacción que pueden presentarse en los soportes.

**Reacciones de soporte.** En la tabla 5-2, se muestran las fuerzas y los momentos de par reactivos que actúan en varios tipos de soportes y conexiones, cuando los elementos se ven en tres dimensiones. Es importante reconocer los símbolos usados para representar cada uno de esos soportes y entender claramente cómo se desarrollan las fuerzas y los momentos de par. Igual que en el caso bidimensional:

- Una fuerza se desarrolla mediante un soporte que restringe la traslación de su elemento conectado.
- Un momento de par se desarrolla cuando se evita la rotación del elemento conectado.

Por ejemplo, en la tabla 5-2, la junta (4) de rótula esférica impide cualquier traslación del elemento conectado; por lo tanto, una fuerza debe actuar en el elemento en el punto de conexión. Esta fuerza tiene tres componentes con magnitudes desconocidas $F_x$, $F_y$, $F_z$. Si esas componentes son conocidas, se puede obtener la magnitud de la fuerza $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, y la orientación de la fuerza está definida por los ángulos directores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ecuaciones 2-7*. Dado que el elemento conectado puede girar libremente con respecto a *cualquier* eje, ninguna junta de rótula esférica resiste momento alguno de par.

Debe observarse que en los soportes de chumacera (5) y (7), se muestra que *cada* pasador (8) y la articulación *única* (9) deben resistir componentes tanto de fuerza como de momento de par. Sin embargo, si esos soportes se usan junto con *otras* chumaceras, pasadores, o articulaciones para mantener un cuerpo rígido en equilibrio y los soportes están *alineados adecuadamente* cuando se conectan al cuerpo, entonces las *reacciones de fuerza* en esos soportes pueden *por sí solas* ser adecuadas para soportar el cuerpo. En otras palabras, los momentos de par resultan redundantes y no se muestran en el diagrama de cuerpo libre. La razón de esto se aclara después de estudiar los ejemplos que siguen.



*Las tres incógnitas también se pueden representar como una magnitud de fuerza desconocida $F$ y dos ángulos directores coordenados. El tercer ángulo director se obtiene con la identidad $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, ecuación 2-8.

**TABLA 5-2 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas tridimensionales**

| Tipos de conexión | Reacción | Número de incógnitas |
|---|---|---|
| (1) cable | F | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa alejándose del elemento en la dirección conocida del cable. |
| (2) Soporte superficial liso | F | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. |
| (3) rodillo | F | Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto. |
| (4) rótula esférica | $F_z$, $F_x$, $F_y$ | Tres incógnitas. Las reacciones son tres componentes rectangulares de fuerza. |
| (5) chumacera simple | $M_z$, $F_z$, $M_x$, $F_x$ | Cuatro incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y dos componentes de momento de par que actúan perpendicularmente al eje. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos. |

*continúa*

**TABLA 5-2 Continuación**

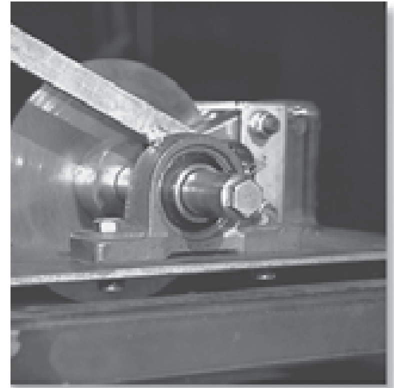
| Tipos de conexión | Reacción | Número de incógnitas |
|---|---|---|
| (6) chumacera simple con flecha cuadrada | $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_x$ | Cinco incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y tres componentes de momento de par. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos. |
| (7) chumacera de empuje simple | $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_x$ | Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. *Nota:* en general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos. |
| (8) pasador liso simple | $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{F}_x$ | Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos. |
| (9) bisagra simple | $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$ | Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. *Nota:* por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos. |
| (10) soporte fijo | $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{M}_y$ | Seis incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y tres componentes de momento de par. |

5

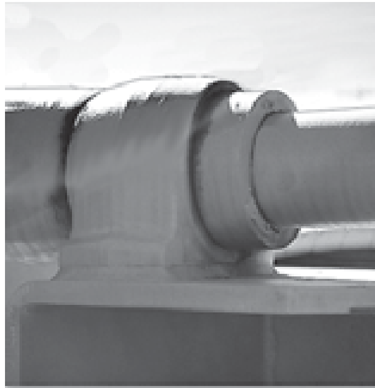
En la siguiente serie de fotografías se muestran ejemplos típicos de soportes reales, cuyas referencias están en la tabla 5-2.



Esta junta de rótula esférica proporciona una conexión para la caja de una máquina niveladora de tierra con su bastidor. (4)



Esta chumacera simple soporta el extremo de la flecha. (5)



Esta chumacera de empuje se usa para soportar la flecha impulsora de una máquina. (7)



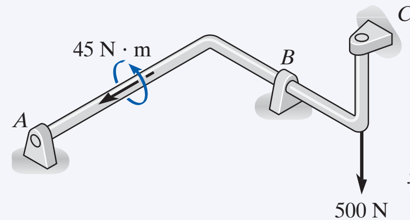
Este pasador se usa para soportar el extremo de un tirante usado en un tractor.

**Diagramas de cuerpo libre.** El procedimiento general para establecer el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido se bosquejó en la sección 5.2. En esencia, se requiere primero "aislar" el cuerpo por medio del delineado de su contorno. A esto sigue una cuidadosa *rotulación* de *todas* las fuerzas y momentos de par con referencia a un sistema coordenado $x$, $y$, $z$ establecido. Se sugiere mostrar las componentes de reacción con magnitud desconocida en cuanto actúan en el diagrama de cuerpo libre en *sentido positivo*. De este modo, si se obtienen valores negativos, esto indicará que las componentes actúan en las direcciones coordenadas negativas.

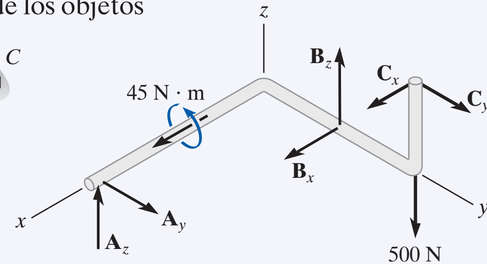
## EJEMPLO 5.14

Considere las dos barras y la placa, junto con sus diagramas de cuerpo libre asociados que se muestran en la figura 5-23. Los ejes $x$, $y$, $z$ se establecen en el diagrama y las componentes de reacción desconocidas están indicadas con *sentido positivo*. El peso de los objetos no se considera.

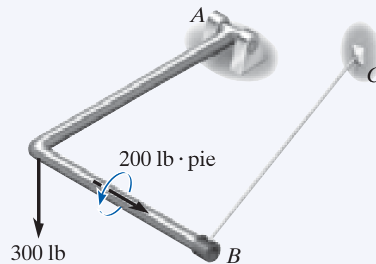
### SOLUCIÓN



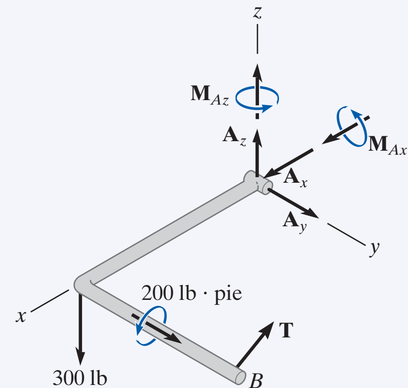

Chumaceras en $A$, $B$, $C$, alineadas apropiadamente.



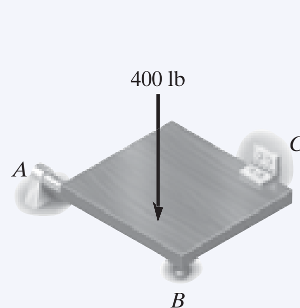

Las reacciones de fuerza desarrolladas mediante las chumaceras son suficientes para obtener el equilibrio ya que impiden que la flecha gire con respecto a cada uno de los ejes coordenados.



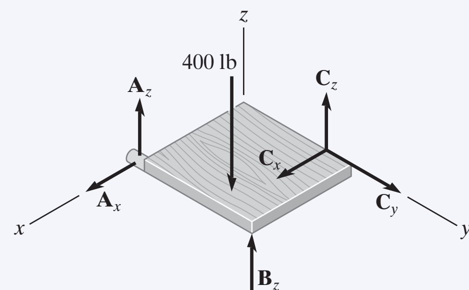

Pasador en $A$ y cable en $BC$.




Mediante el pasador colocado sobre la barra, se desarrollan componentes de momento para impedir rotaciones con respecto a los ejes $x$ y $z$.




Chumacera alineada apropiadamente en $A$ y bisagra en $C$. Rodillo en $B$.




Mediante la chumacera y la visagra colocada sobre la placa, se desarrollan sólo reacciones de fuerza para impedir rotaciones con respecto a cada eje coordenado. En la bisagra no se desarrolla ningún momento.

**Fig. 5-23**

## 5.6 Ecuaciones de equilibrio

Como se estableció en la sección 5.1, las condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido sometido a un sistema tridimensional de fuerzas requieren que la fuerza *resultante* y el momento de par *resultante* que actúan sobre el cuerpo sean iguales a *cero*.

**Ecuaciones vectoriales de equilibrio.** Las dos condiciones para lograr el equilibrio de un cuerpo rígido pueden expresarse matemáticamente en forma vectorial como

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= 0 \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}5)$$

donde $\Sigma \mathbf{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y $\Sigma \mathbf{M}_O$ es la suma de los momentos de par y los momentos de todas las fuerzas con respecto a cualquier punto $O$ localizado en el cuerpo o fuera de él.

5

**Ecuaciones escalares de equilibrio.** Si todas las fuerzas externas y los momentos de par aplicados se expresan en forma vectorial cartesiana y se sustituyen en las ecuaciones 5-5, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Como las componentes **i**, **j** y **k** son independientes entre sí, las ecuaciones anteriores se satisfacen siempre que

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}6a)$$

y

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}6b)$$

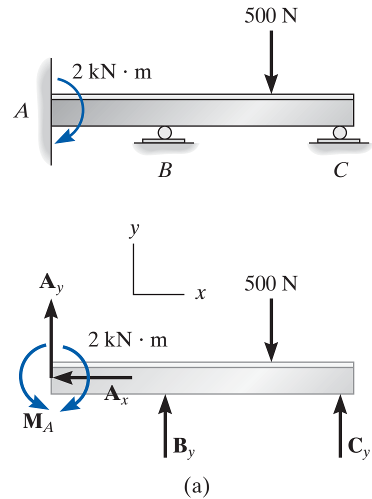
Estas *seis ecuaciones escalares de equilibrio* pueden usarse para resolver cuando mucho seis incógnitas mostradas en el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones 5-6*a* exigen que la suma de las componentes externas de fuerza que actúan en las direcciones *x*, *y* y *z* sea igual a cero; asimismo, las ecuaciones 5-6*b* requieren que la suma de las componentes de momento con respecto a los ejes *x*, *y* y *z*, sea igual a cero.

# 5.7 Restricciones y determinación estática

Para asegurar el equilibrio de un cuerpo rígido, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio, sino que el cuerpo también debe estar sostenido o restringido propiamente por sus soportes. Algunos cuerpos pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, mientras que otros pueden no tener suficientes o estar colocados de tal manera que ocasionen el movimiento del cuerpo. A continuación se analiza cada uno de esos casos.

**Restricciones redundantes.** Cuando un cuerpo tiene soportes redundantes, es decir, más de los necesarios para mantenerlo en equilibrio, se vuelve estáticamente indeterminado. *Estáticamente indeterminado* significa que habrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para su solución. Por ejemplo, la viga de la figura 5-24*a*, y el ensamble de tubos de la figura 5-24*b*, que se muestran junto con sus diagramas de cuerpo libre, son estáticamente indeterminados debido a las reacciones adicionales (o redundantes) en los soportes. Para la viga hay cinco incógnitas, $M_A$, $A_x$, $A_y$, $B_y$ y $C_y$, para las cuales sólo se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$, ecuaciones 5-2). El ensamble de tubos tiene ocho incógnitas, para las cuales sólo se pueden escribir seis ecuaciones de equilibrio, ecuaciones 5-6.

Las ecuaciones adicionales necesarias para resolver problemas estáticamente indeterminados del tipo que se muestra en la figura 5-24 se obtienen generalmente a partir de las condiciones de deformación presentes en los puntos de soporte. Estas ecuaciones implican las propiedades físicas del cuerpo que se estudian en temas relacionados con la mecánica elástica, como la "mecánica de materiales"*.



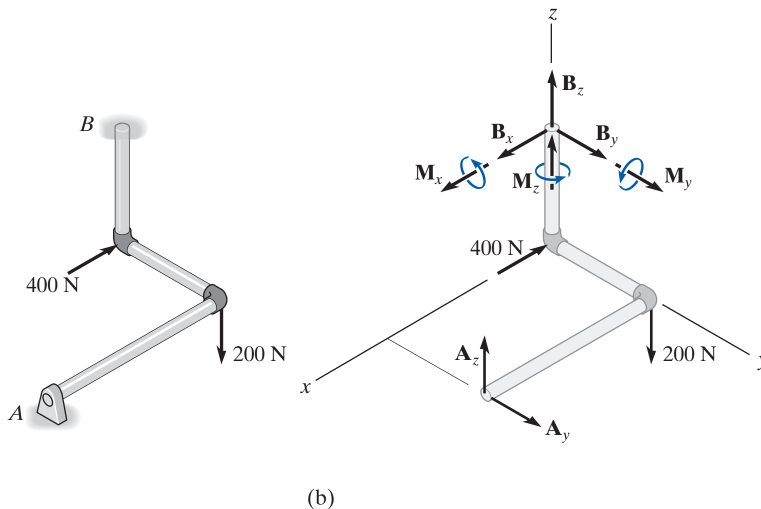



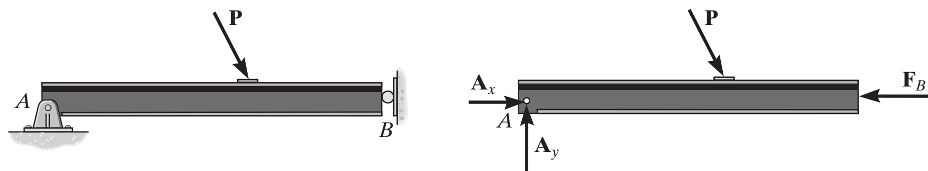

**Fig. 5-24**

*Vea R.C. Hibbeler, *Mecánica de materiales*, 7a. ed., Pearson Education/Prentice Hall, Inc.

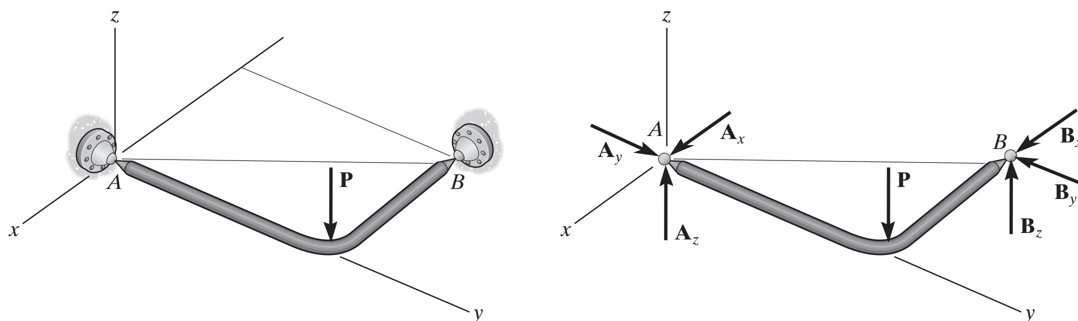
**Restricciones impropias.** Cuando se tienen tantas fuerzas reactivas desconocidas como ecuaciones de equilibrio, no siempre se garantiza que un cuerpo se encuentre estable cuando está sometido a una carga particular. Por ejemplo, el soporte de pasador en $A$ y el soporte de rodillo en $B$ para la viga de la figura 5-25*a*, están colocados de tal modo que las líneas de acción de las fuerzas de reacción son *concurrentes* en un punto $A$. En consecuencia, la carga **P** aplicada ocasionará que la viga gire un poco con respecto a $A$, por lo que la viga está impropiamente restringida, $\Sigma M_A \neq 0$.

En tres dimensiones, un cuerpo estará impropiamente restringido si las líneas de acción de todas las fuerzas reactivas intersecan un eje común. Por ejemplo, las fuerzas reactivas en los soportes de rótula esférica, ubicados en los puntos $A$ y $B$ de la figura 5-25*b*, intersecan el eje que pasa por $A$ y $B$. Como los momentos de estas fuerzas con respecto a $A$ y $B$ son todos iguales a cero, entonces la carga **P** hará que el elemento gire con respecto al eje $AB$, $\Sigma M_{AB} \neq 0$.






(a)




(b)

**Fig. 5-25**

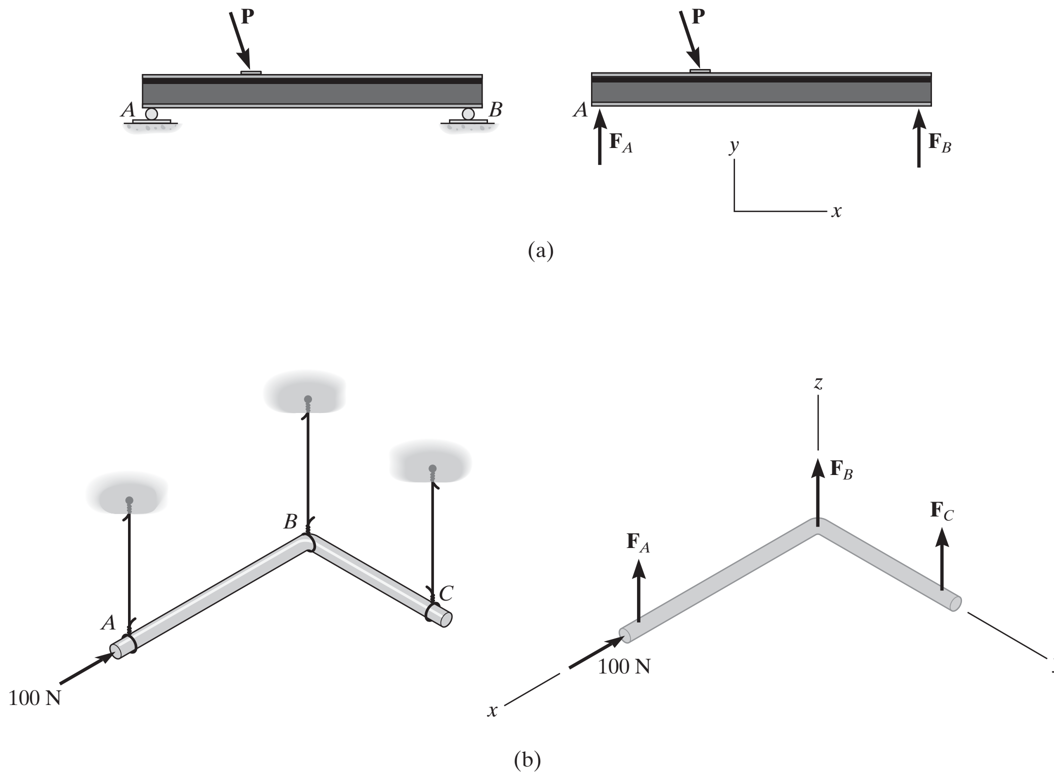



Fig. 5-26

Otra manera en que una restricción impropia conduce a la inestabilidad ocurre cuando todas las *fuerzas de reacción* son *paralelas*. En la figura 5-26 se muestran ejemplos bidimensionales y tridimensionales de esto. En ambos casos, la suma de fuerzas a lo largo del eje *x* no será igual a cero.

En algunos casos, un cuerpo puede tener *menos* fuerzas de reacción que ecuaciones de equilibrio que deben ser satisfechas. Entonces, el cuerpo está sólo *parcialmente restringido*. Por ejemplo, considere el elemento *AB* de la figura 5-27*a* con su correspondiente diagrama de cuerpo libre en la figura 5-27*b*. Aquí, $\Sigma F_y = 0$ no será satisfecha para las condiciones de carga, y por lo tanto no se mantendrá el equilibrio.

Para resumir estos puntos, un cuerpo se considera *impropiamente restringido* si todas las fuerzas de reacción se intersecan en un punto común o pasan por un eje común, o si todas las fuerzas de reacción son paralelas. En la práctica de la ingeniería, estas situaciones deben evitarse en todo momento ya que pueden causar una condición inestable.

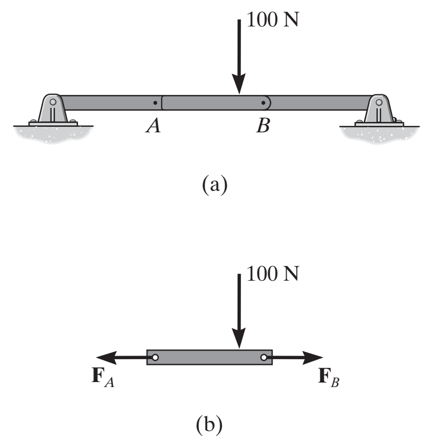



Fig. 5-27

5

## Puntos importantes

- Al resolver cualquier problema de equilibrio, siempre trace primero el diagrama de cuerpo libre.
- Si un soporte *evita la traslación* de un cuerpo en una dirección específica, entonces el soporte ejerce una *fuerza* sobre el cuerpo en esa dirección.
- Si un soporte *evita la rotación con respecto a un eje*, entonces el soporte ejerce un *momento de par* sobre el cuerpo con respecto al eje.
- Si un cuerpo está sometido a más reacciones desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles, entonces el problema es *estáticamente indeterminado*.
- Un cuerpo estable requiere que las líneas de acción de las fuerzas reactivas no intersequen un eje común y no sean paralelas entre sí.



## Procedimiento para el análisis

Los problemas de equilibrio tridimensional para un cuerpo rígido pueden resolverse por el siguiente procedimiento.

### Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el contorno del cuerpo.
- Muestre todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- Establezca el origen de los ejes $x$, $y$, $z$ en un punto conveniente y oriente los ejes de manera que sean paralelos a las fuerzas y momentos externos tanto como sea posible.
- Rotule todas las cargas y especifique sus direcciones relativas a los ejes $x$, $y$, $z$. En general, muestre todas las componentes *desconocidas* con un *sentido positivo* a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$.
- Indique las dimensiones del cuerpo necesarias para calcular los momentos de las fuerzas.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Si las componentes $x$, $y$, $z$ de fuerza y momento parecen fáciles de determinar, entonces aplique las seis ecuaciones escalares de equilibrio; de otra manera, use las ecuaciones vectoriales.
- No es necesario que el conjunto de ejes seleccionados para la sumatoria de fuerzas coincida con el conjunto de ejes elegidos para la sumatoria de momentos. En realidad, para realizar la suma de fuerzas y momentos puede elegirse un eje en cualquier dirección arbitraria.
- Elija la dirección de un eje para la suma de momentos de manera que interseque la línea de acción de las fuerzas desconocidas tanto como sea posible. Tenga en cuenta que los momentos de las fuerzas que pasan por los puntos sobre este eje y las fuerzas que son paralelas al eje serán iguales a cero.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio da como resultado un escalar negativo para una magnitud de fuerza o de momento de par, esto indica que el sentido es contrario al supuesto en el diagrama de cuerpo libre.

## EJEMPLO 5.15

La placa homogénea que se muestra en la figura 5-28*a* tiene una masa de 100 kg y está sometida a una fuerza y un momento de par a lo largo de sus bordes. Si está soportada en el plano horizontal por medio de un rodillo en $A$, una rótula esférica en $B$ y una cuerda en $C$, determine las componentes de reacción en estos soportes.

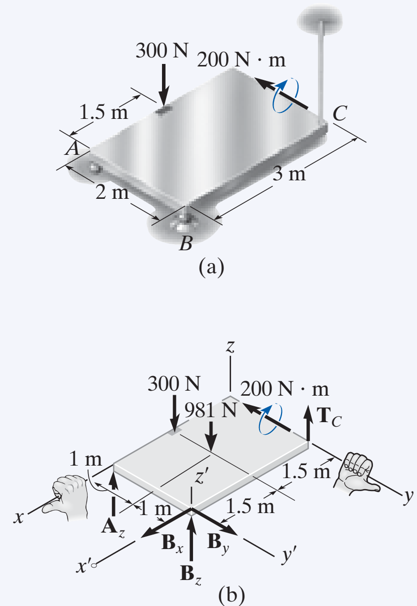


**Fig. 5-28**

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS ESCALAR)*

**Diagrama de cuerpo libre.** Hay cinco reacciones desconocidas que actúan sobre la placa, como se muestra en la figura 5-28*b*. Se supone que cada una de esas reacciones actúa en una dirección coordenada positiva.

**Ecuaciones de equilibrio.** Como la geometría tridimensional es bastante sencilla, un *análisis escalar* proporciona una *solución directa* a este problema. Una suma de fuerzas a lo largo de cada eje resulta en

$\Sigma F_x = 0; \qquad B_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0; \qquad B_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z + B_z + T_C - 300\text{ N} - 981\text{ N} = 0 \qquad (1)$

Recuerde que el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular (brazo de momento) desde la línea de acción de la fuerza hasta el eje. Asimismo, las fuerzas que son paralelas a un eje o pasan por él no generan momento con respecto al eje. Por consiguiente, al sumar momentos con respecto a los ejes $x$ y $y$ positivos, tenemos

$\Sigma M_x = 0; \qquad T_C(2\text{ m}) - 981\text{ N}(1\text{ m}) + B_z(2\text{ m}) = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_y = 0;$

$300\text{ N}(1.5\text{ m}) + 981\text{ N}(1.5\text{ m}) - B_z(3\text{ m}) - A_z(3\text{ m}) - 200\text{ N}\cdot\text{m} = 0 \qquad (3)$

Las componentes de la fuerza en $B$ se pueden eliminar si los momentos se suman con respecto a los ejes $x'$y $y'$. Obtenemos

$\Sigma M_{x'} = 0; \qquad 981\text{ N}(1\text{ m}) + 300\text{ N}(2\text{ m}) - A_z(2\text{ m}) = 0 \qquad (4)$

$\Sigma M_{y'} = 0;$

$-300\text{ N}(1.5\text{ m}) - 981\text{ N}(1.5\text{ m}) - 200\text{ N}\cdot\text{m} + T_C(3\text{ m}) = 0 \qquad (5)$

Resolver las ecuaciones 1 a 3, o las más convenientes 1, 4 y 5, da como resultado

$A_z = 790\text{ N} \qquad B_z = -217\text{ N} \qquad T_C = 707\text{ N}$ ***Resp.***

El signo negativo indica que $\mathbf{B}_z$ actúa hacia abajo.

**NOTA:** la solución de este problema no requiere el uso de una sumatoria de momentos con respecto al eje $z$. La placa está parcialmente restringida, ya que los soportes no pueden impedir que gire respecto del eje $z$ si se aplica una fuerza en el plano $x$-$y$.

5

## EJEMPLO 5.16

Determine las componentes de reacción que ejercen la junta de rótula esférica ubicada en $A$, la chumacera lisa en $B$ y el soporte de rodillo en $C$, sobre el ensamble de barras que se muestra en la figura 5-29*a*.

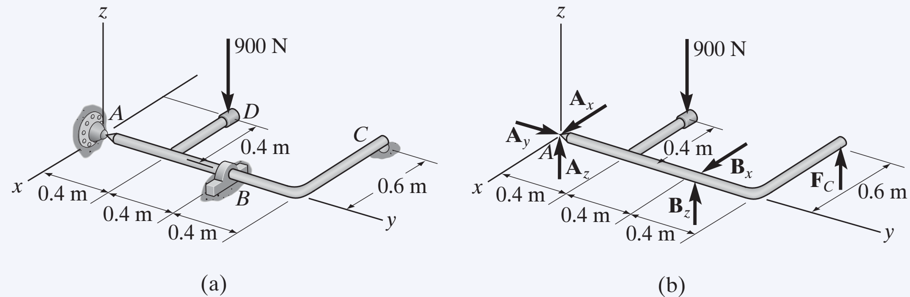



**Fig. 5-29**

5

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 5-29*b*, las fuerzas de reacción de los soportes evitarán que el ensamble gire con respecto a cada eje coordenado, de esta manera la chumacera en $B$ sólo ejerce fuerzas de reacción sobre el elemento.

**Ecuaciones de equilibrio.** Podemos obtener una solución directa para $A_y$ si sumamos fuerzas a lo largo del eje $y$.

$\Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y = 0$ ***Resp.***

La fuerza $F_C$ puede determinarse directamente al sumar momentos con respecto al eje $y$.

$\Sigma M_y = 0;$ $\quad F_C(0.6 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$

$F_C = 600 \text{ N}$ ***Resp.***

Con este resultado, $B_z$ puede determinarse al sumar momentos con respecto al eje $x$.

$\Sigma M_x = 0;$ $\quad B_z(0.8 \text{ m}) + 600 \text{ N}(1.2 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$

$B_z = -450 \text{ N}$ ***Resp.***

El signo negativo indica que $\mathbf{B}_z$ actúa hacia abajo. La fuerza $B_x$ puede encontrarse al sumar momentos con el respecto al eje $z$.

$\Sigma M_z = 0;$ $\quad -B_x(0.8 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$ ***Resp.***

Así,

$\Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x + 0 = 0 \quad A_x = 0$ ***Resp.***

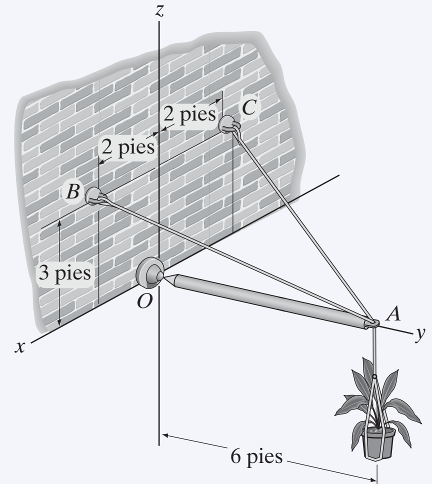
Por último, con los resultados de $B_z$ y $F_C$.

$\Sigma F_z = 0;$ $\quad A_z + (-450 \text{ N}) + 600 \text{ N} - 900 \text{ N} = 0$

$A_z = 750 \text{ N}$ ***Resp.***

## EJEMPLO 5.17

El pescante se usa para sostener la maceta de 75 lb que se muestra en la figura 5-30*a*. Determine la tensión desarrollada en los cables *AB* y *AC*.




(a)

**Fig. 5-30**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 5-30*b*, se muestra el diagrama de cuerpo libre del pescante.

**Ecuaciones de equilibrio.** Usaremos un análisis vectorial.

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = F_{AB}\left(\frac{\{2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\text{ pies}}{\sqrt{(2\text{ pies})^2 + (-6\text{ pies})^2 + (3\text{ pies})^2}}\right)$$

$$= \tfrac{2}{7}F_{AB}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AB}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AB}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = F_{AC}\left(\frac{\{-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\text{ pies}}{\sqrt{(-2\text{ pies})^2 + (-6\text{ pies})^2 + (3\text{ pies})^2}}\right)$$

$$= -\tfrac{2}{7}F_{AC}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AC}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AC}\mathbf{k}$$

Podemos eliminar la reacción de la fuerza en *O* al escribir la ecuación de equilibrio del momento con respecto al punto *O*.

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$(6\mathbf{j}) \times \left[\left(\tfrac{2}{7}F_{AB}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AB}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AB}\mathbf{k}\right) + \left(-\tfrac{2}{7}F_{AC}\mathbf{i} - \tfrac{6}{7}F_{AC}\mathbf{j} + \tfrac{3}{7}F_{AC}\mathbf{k}\right) + (-75\mathbf{k})\right] = \mathbf{0}$$

$$\left(\tfrac{18}{7}F_{AB} + \tfrac{18}{7}F_{AC} - 450\right)\mathbf{i} + \left(-\tfrac{12}{7}F_{AB} + \tfrac{12}{7}F_{AC}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

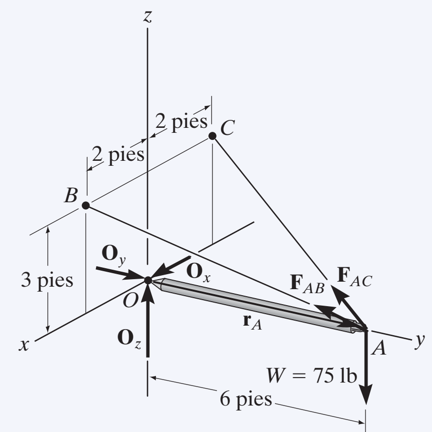
$$\Sigma M_x = 0; \qquad \tfrac{18}{7}F_{AB} + \tfrac{18}{7}F_{AC} - 450 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = 0; \qquad 0 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0; \qquad -\tfrac{12}{7}F_{AB} + \tfrac{12}{7}F_{AC} = 0 \qquad (2)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2),

$$F_{AB} = F_{AC} = 87.5\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

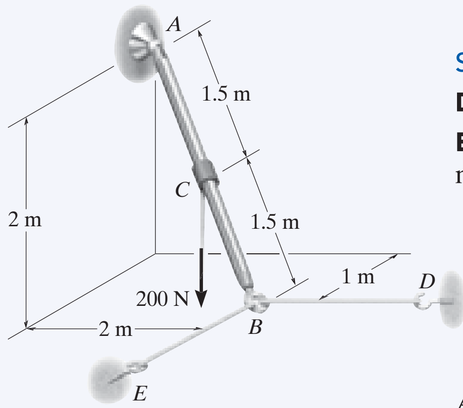



(b)

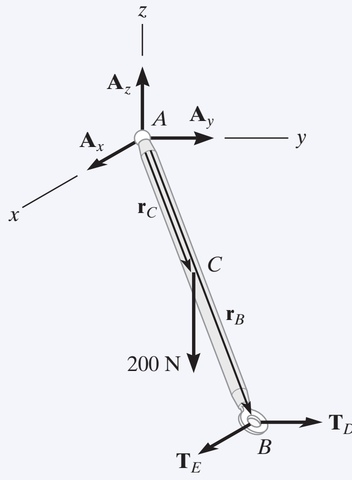
5

## EJEMPLO 5.18

La barra $AB$ que se muestra en la figura 5-31$a$ está sometida a la fuerza de 200 N. Determine las reacciones en la junta de rótula esférica $A$ y la tensión en los cables $BD$ y $BE$.




(a)




(b)

**Fig. 5-31**

### SOLUCIÓN (ANÁLISIS VECTORIAL)

**Diagrama de cuerpo libre.** Figura 5-31$b$.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al representar cada fuerza del diagrama de cuerpo libre en forma vectorial cartesiana tenemos

$$\mathbf{F}_A = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_E = T_E\mathbf{i}$$
$$\mathbf{T}_D = T_D\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = \{-200\mathbf{k}\}\text{ N}$$

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_A + \mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$(A_x + T_E)\mathbf{i} + (A_y + T_D)\mathbf{j} + (A_z - 200)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad A_x + T_E = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad A_y + T_D = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad A_z - 200 = 0 \qquad (3)$$

Al sumar momentos con respecto al punto $A$ resulta

$$\Sigma\mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (\mathbf{T}_E + \mathbf{T}_D) = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}\mathbf{r}_B$, entonces

$$(0.5\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{k}) + (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (T_E\mathbf{i} + T_D\mathbf{j}) = \mathbf{0}$$

Al desarrollar y reordenar términos se obtiene

$$(2T_D - 200)\mathbf{i} + (-2T_E + 100)\mathbf{j} + (T_D - 2T_E)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma M_x = 0; \qquad 2T_D - 200 = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma M_y = 0; \qquad -2T_E + 100 = 0 \qquad (5)$$
$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_D - 2T_E = 0 \qquad (6)$$

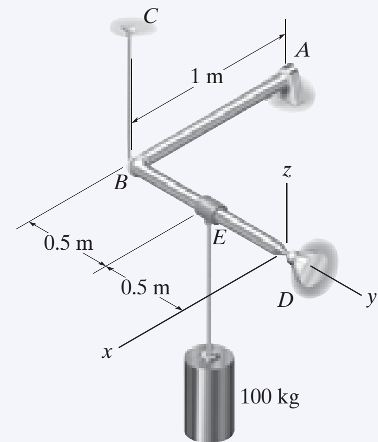
Si resolvemos las ecuaciones de la 1 a la 5 obtenemos

$$T_D = 100\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$T_E = 50\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$A_x = -50\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$A_y = -100\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$A_z = 200\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

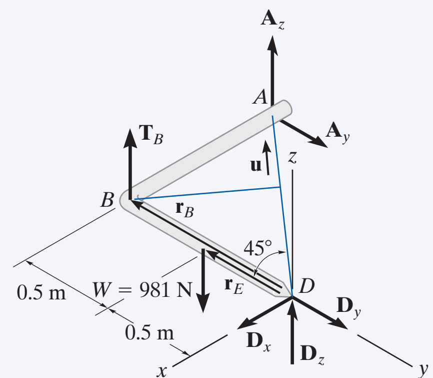
**NOTA:** el signo negativo indica que $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ tienen un sentido que es opuesto al que se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 5-31$b$.

## EJEMPLO 5.19

La barra doblada que se muestra en la figura 5-32*a* está soportada en *A* por una chumacera, en *D* por una junta de rótula esférica, y en *B* por medio del cable *BC*. Con sólo *una ecuación de equilibrio*, obtenga una solución directa para la tensión en el cable *BC*. La chumacera en *A* es capaz de ejercer componentes de fuerza sólo en las direcciones *z* y *y* puesto que está apropiadamente alineada sobre el eje.



(a)



(b)

**Fig. 5-32**

### SOLUCIÓN *(ANÁLISIS VECTORIAL)*

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 5-32*b*, hay seis incógnitas.

**Ecuaciones de equilibrio.** La tensión $\mathbf{T}_B$ en el cable puede obtenerse *directamente* al sumar momentos con respecto a un eje que pase por los puntos *D* y *A*. ¿Por qué? La dirección del eje está definida por el vector unitario $\mathbf{u}$, donde

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$
$$= -0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}$$

Por lo tanto, la suma de los momentos con respecto a este eje será cero siempre que

$$\Sigma M_{DA} = \mathbf{u} \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

Aquí $\mathbf{r}$ representa un vector de posición trazado desde *cualquier punto* sobre el eje *DA* hasta cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza $\mathbf{F}$ (vea la ecuación 4-11). Con referencia a la figura 5-32*b*, podemos escribir

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_E \times \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$(-0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}) \cdot \left[(-1\mathbf{j}) \times (T_B\mathbf{k}) + (-0.5\mathbf{j}) \times (-981\mathbf{k})\right] = \mathbf{0}$$

$$(-0.7071\,\mathbf{i} - 0.7071\,\mathbf{j}) \cdot [(-T_B + 490.5)\mathbf{i}] = \mathbf{0}$$

$$-0.7071(-T_B + 490.5) + 0 + 0 = 0$$

$$T_B = 490.5 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Como los brazos de momento desde el eje hasta $\mathbf{T}_B$ y $\mathbf{W}$ son fáciles de obtener, también podemos determinar este resultado con un análisis escalar. Como se muestra en la figura 5-32*b*,

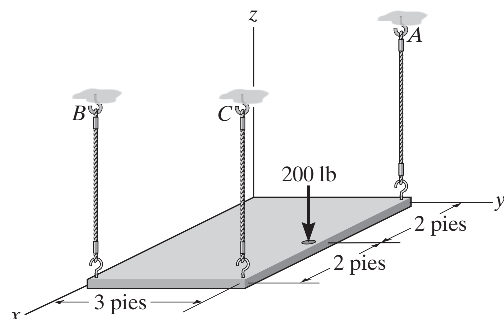
$$\Sigma M_{DA} = 0; \quad T_B(1 \text{ m sen } 45°) - 981 \text{ N}(0.5 \text{ m sen } 45°) = 0$$

$$T_B = 490.5 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS FUNDAMENTALES

*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

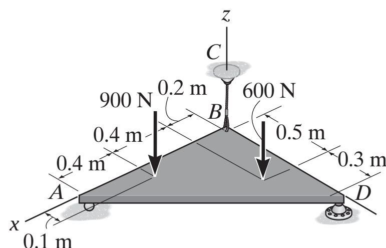
**F5-7.** La placa uniforme tiene un peso de 500 lb. Determine la tensión en cada uno de los cables de soporte.




**F5-7**

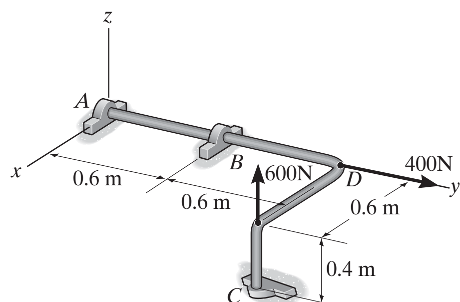
5

**F5-8.** Para la placa que se muestra en la figura, determine las reacciones en el soporte de rodillo $A$, la junta de rótula esférica $D$ y la tensión en el cable $BC$.



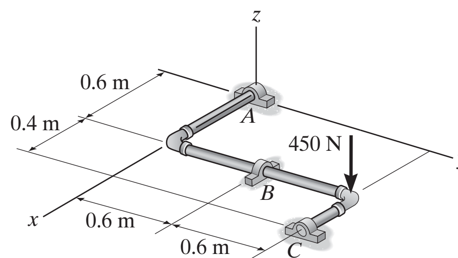

**F5-8**

**F5-9.** La barra se sostiene mediante chumaceras lisas en $A$, $B$ y $C$ y está sometida a las dos fuerzas mostradas. Determine las reacciones en los soportes.



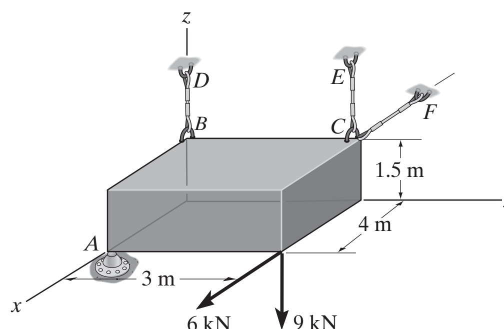

**F5-9**

**F5-10.** Determine las reacciones de soporte en las chumaceras lisas $A$, $B$ y $C$ del ensamble de tubos.



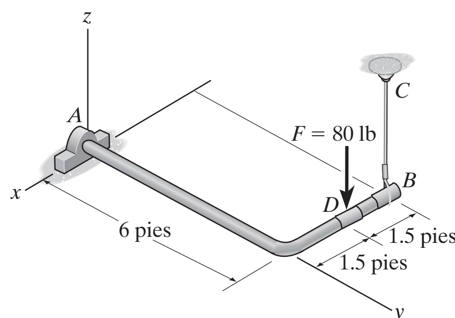

**F5-10**

**F5-11.** Determine la fuerza desarrollada en las cuerdas $BD$, $CE$ y $CF$ y las reacciones de la junta de rótula $A$ sobre el bloque.




**F5-11**

**F5-12.** Determine las componentes de reacción que ejercen la chumacera de empuje $A$ y el cable $BC$ sobre la barra.

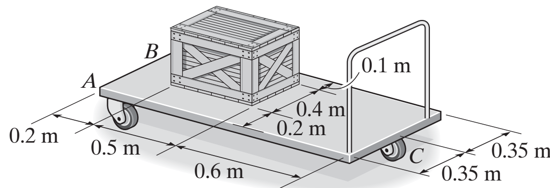



**F5-12**

## PROBLEMAS

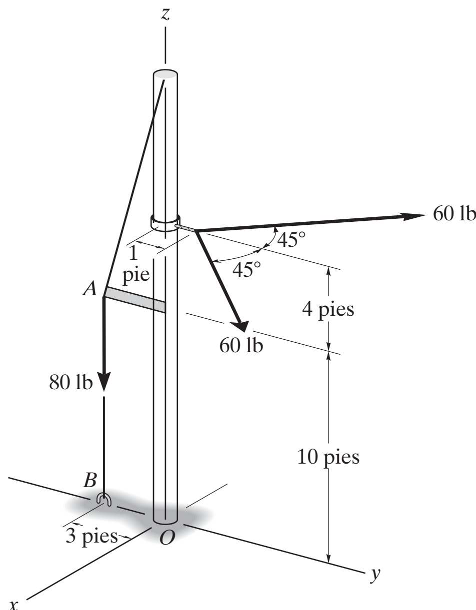
*Todas las soluciones a los problemas deben incluir un DCL.*

**5-63.** El carro de carga soporta una caja uniforme que tiene una masa de 85 kg. Determine las reacciones verticales sobre las tres ruedas en $A$, $B$ y $C$. La rueda en $B$ no se muestra. No tome en cuenta la masa de la carretilla.




Prob. 5-63

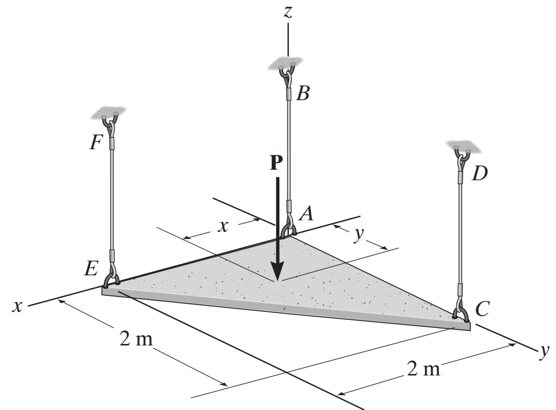
*__5-64.__ El poste para una línea de potencia está sometido a las dos fuerzas del cable de 60 lb, cada fuerza se encuentra en un plano paralelo al plano $x$-$y$. Si la tensión en la retenida $AB$ es de 80 lb, determine las componentes de reacción $x$, $y$, $z$ en la base $O$ del poste.




Prob. 5-64

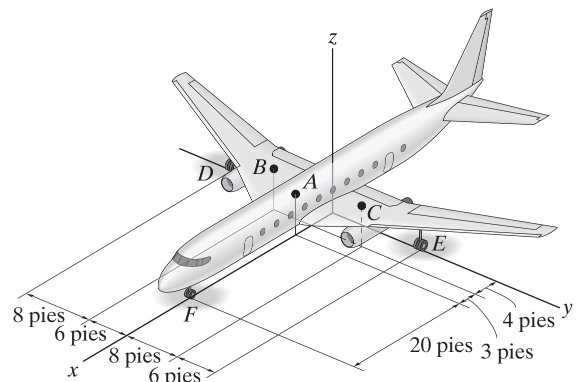
•**5-65.** Si $P = 6$ kN, $x = 0.75$ m y $y = 1$ m, determine la tensión desarrollada en los cables $AB$, $CD$ y $EF$. Haga caso omiso del peso de la placa.

**5-66.** Determine la ubicación $x$ y $y$ del punto de aplicación de la fuerza **P** de modo que la tensión desarrollada en los cables $AB$, $CD$ y $EF$ sea la misma. Pase por alto el peso de la placa.



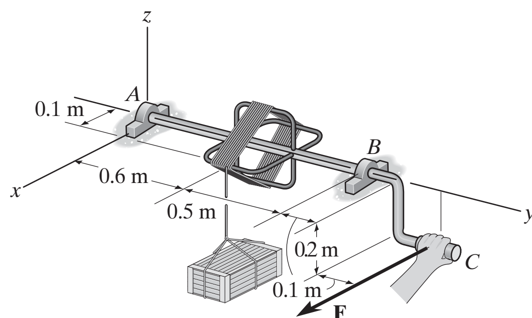

Probs. 5-65/66

**5-67.** Debido a una distribución desigual del combustible en los tanques de las alas, los centros de gravedad para el fuselaje del avión $A$ y las alas $B$ y $C$ se localizan como se muestra en la figura. Si estos componentes tienen pesos $W_A = 45\,000$ lb, $W_B = 8000$ lb y $W_C = 6000$ lb, determine las reacciones normales de las ruedas $D$, $E$ y $F$ sobre el suelo.



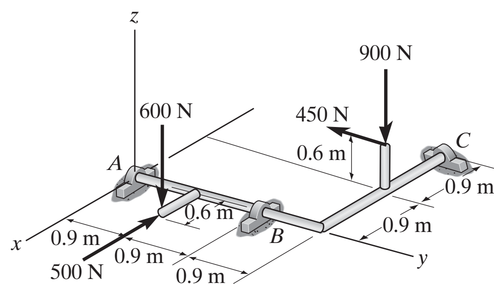

Prob. 5-67

***5-68.** Determine la magnitud de la fuerza **F** que debe ejercerse sobre la manivela en *C* para sostener la caja de 75 kg en la posición mostrada. También, determine las componentes de reacción en la chumacera de empuje *A* y en la chumacera lisa *B*.



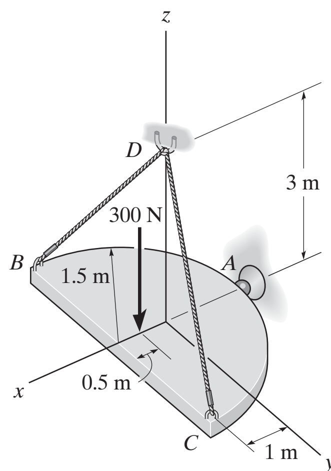

Prob. 5-68

**•5-69.** La flecha está soportado por tres chumaceras lisas en *A*, *B* y *C*. Determine las componentes de reacción en estos soportes.



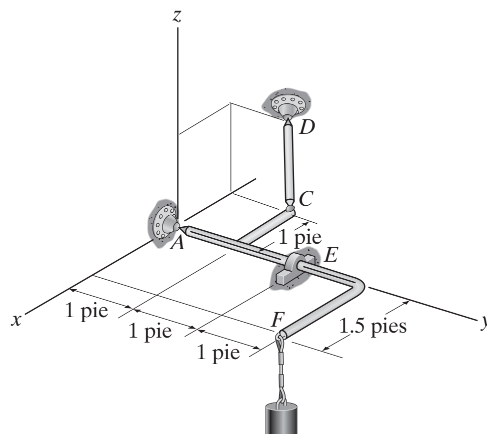

Prob. 5-69

**5-70.** Determine la tensión en los cables *BD* y *CD* y las componentes de reacción *x*, *y*, *z* en la junta de rótula esférica ubicada en *A*.



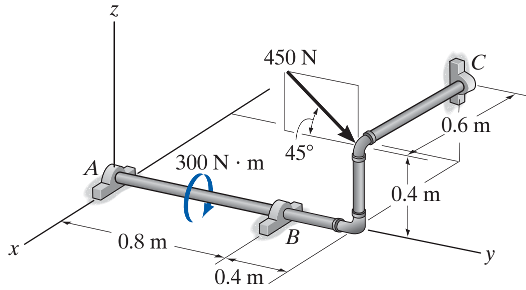

Prob. 5-70

**5-71.** El ensamble de barras se usa para sostener el cilindro de 250 lb. Determine las componentes de reacción en la junta de rótula esférica *A*, en la chumacera lisa *E* y la fuerza desarrollada a lo largo de la barra *CD*. Las conexiones en *C* y *D* son juntas de rótula esférica.



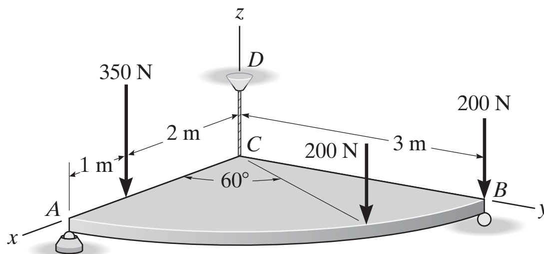

Prob. 5-71

*5-72. Determine las componentes de reacción que actúan en las chumaceras lisas $A$, $B$ y $C$.



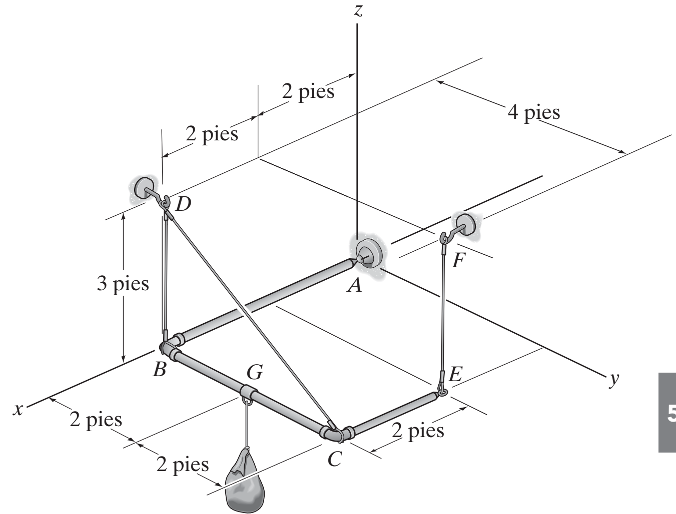

**Prob. 5-72**

•5-73. Determine las componentes de fuerza que actúan sobre la rótula esférica en $A$, la reacción en el rodillo $B$ y la tensión en la cuerda $CD$ necesarias para el equilibrio de la placa con forma de cuadrante circular.



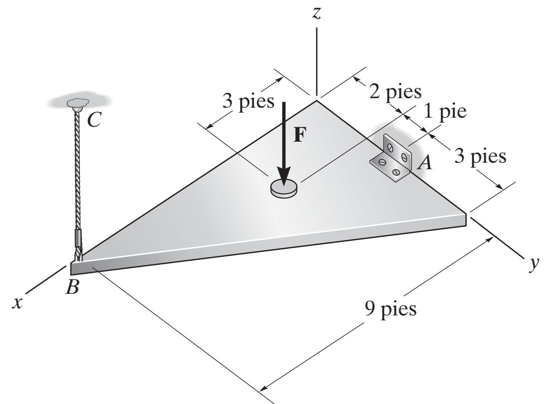

**Prob. 5-73**

5-74. Si la carga tiene un peso de 200 lb, determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en la junta de rótula esférica $A$ y la tensión en cada uno de los cables.




**Prob. 5-74**

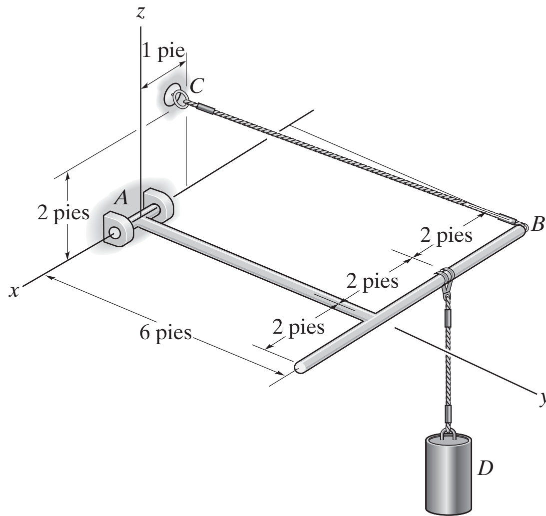
5-75. Si el cable puede estar sometido a una tensión máxima de 300 lb, determine la fuerza $F$ máxima que puede aplicarse a la placa. Calcule las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en la bisagra $A$ para esta carga.




**Prob. 5-75**

5

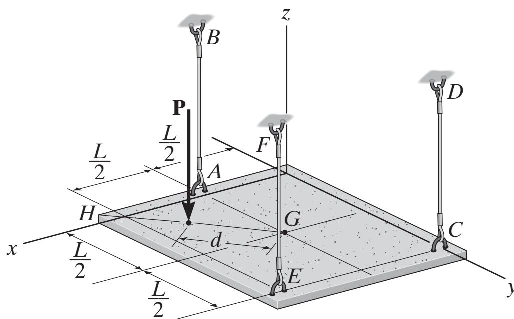
***5-76.** El elemento se sostiene mediante un pasador en $A$ y un cable $BC$. Si la carga en $D$ es de 300 lb, determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en el pasador $A$ y la tensión en el cable $BC$.




**Prob. 5-76**

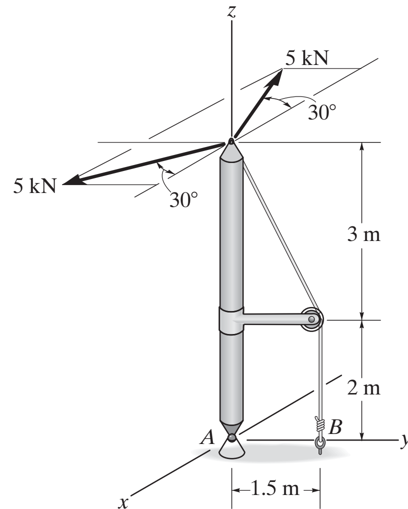
**•5-77.** La placa tiene un peso de $W$ con centro de gravedad en $G$. Determine la distancia $d$ a lo largo de la línea $GH$ donde la fuerza vertical $P = 0.75W$ hará que la tensión en el cable $CD$ sea cero.

**5-78.** La placa tiene un peso de $W$ con centro de gravedad en $G$. Determine la tensión desarrollada en los alambres $AB$, $CD$ y $EF$ si la fuerza $P = 0.75W$ se aplica en $d = L/2$.




**Probs. 5-77/78**

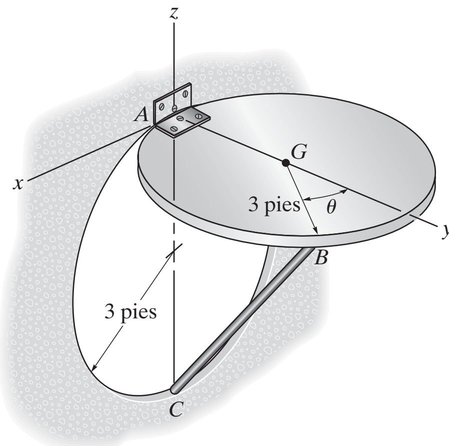
**5-79.** El pescante está soportado por una junta de rótula esférica en $A$ y una retenida en $B$. Si las cargas de 5 kN se encuentran en un plano que es paralelo al plano $x$-$y$, determine las componentes de reacción $x$, $y$, $z$ en $A$ y la tensión existente en el cable en $B$.




**Prob. 5-79**

***5-80.** La puerta circular tiene un peso de 55 lb y un centro de gravedad en $G$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en la bisagra $A$ y la fuerza que actúa a lo largo del bastón $CB$ necesarias para mantener la puerta en equilibrio. Considere que $\theta = 45°$.

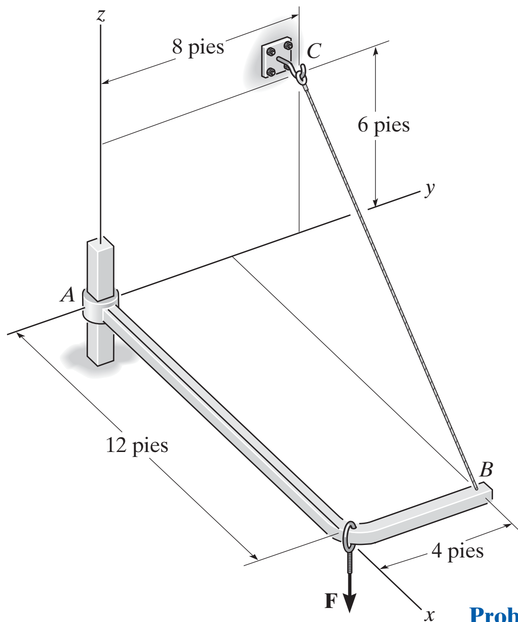
**•5-81.** La puerta circular tiene un peso de 55 lb y un centro de gravedad en $G$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en la bisagra $A$ y la fuerza que actúa a lo largo del bastón $CB$ necesarias para sostener la puerta en equilibrio. Considere que $\theta = 90°$.




**Probs. 5-80/81**

**5-82.** El elemento $AB$ está soportado en $B$ mediante un cable y en $A$ por medio de una barra *cuadrada* fija que entra holgadamente por el orificio cuadrado del collar. Si $\mathbf{F} = \{20\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 75\mathbf{k}\}$ lb, determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en $A$ y la tensión en el cable.

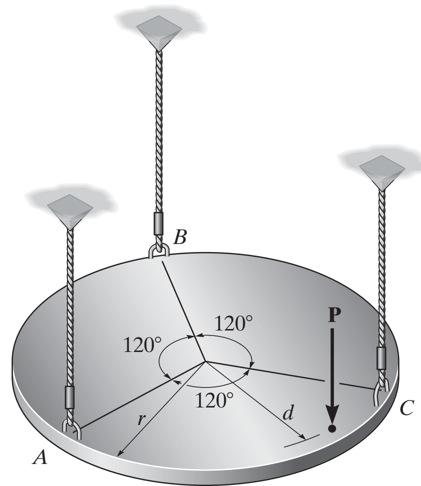
**5-83.** El elemento $AB$ está soportado en $B$ mediante un cable y en $A$ por medio de una barra *cuadrada* fija que entra holgadamente en el orificio cuadrado del collar. Determine la tensión en el cable $BC$ si la fuerza $\mathbf{F} = \{-45\mathbf{k}\}$ lb.




**Probs. 5-82/83**

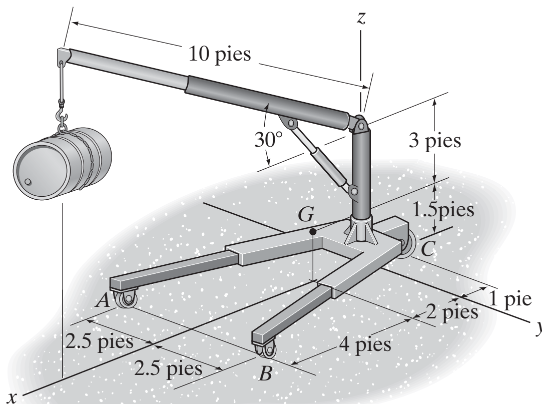
**•5-85.** La placa circular tiene un peso $W$ y centro de gravedad en su centro. Está sostenida por tres cuerdas verticales atadas a su borde; determine la distancia $d$ máxima desde el centro hasta el punto donde se puede aplicar cualquier fuerza vertical $\mathbf{P}$ de manera que, en ninguno de los cables, la fuerza se vuelva cero.

**5-86.** Resuelva el problema 5-85 si se pasa por alto el peso $W$ de la placa.



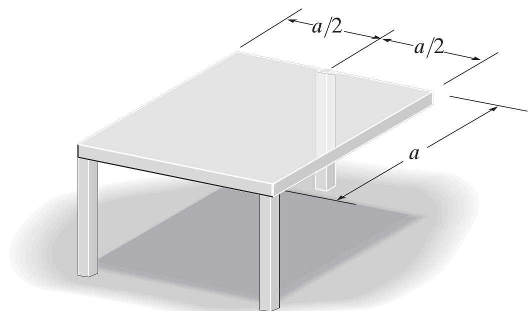

**Probs. 5-85/86**

***5-84.** Determine el máximo peso del barril de petróleo que puede soportar la grúa de piso sin caerse. Incluso, cuáles son las reacciones verticales en las ruedas lisas $A$, $B$ y $C$ para este caso. La grúa de piso tiene un peso de 300 lb, con su centro de gravedad ubicado en $G$.




**Prob. 5-84**

**5-87.** Una mesa cuadrada uniforme que tiene un peso $W$ y lados de magnitud $a$ se sostiene mediante tres patas verticales. Determine la mínima fuerza vertical $\mathbf{P}$ que puede aplicarse a su parte superior para ocasionar la volcadura de la mesa.




**Prob. 5-87**

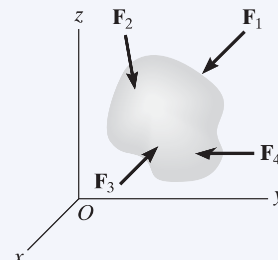
5

## REPASO DEL CAPÍTULO

**Equilibrio**

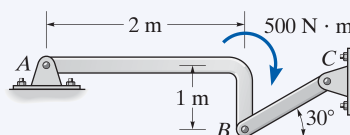
Un cuerpo en equilibrio no gira pero puede trasladarse con velocidad constante, o no se mueve.

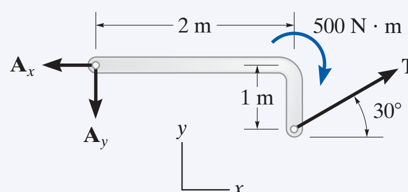
$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$$




**Dos dimensiones**

Antes de analizar el equilibrio de un cuerpo, es necesario trazar primero un diagrama de cuerpo libre. Este diagrama es una forma delineada que muestra todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.



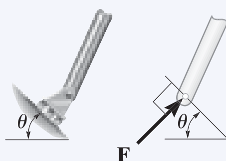




Los momentos de par pueden colocarse en cualquier punto en un diagrama de cuerpo libre puesto que son vectores libres. Las fuerzas pueden actuar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción ya que son vectores deslizantes.

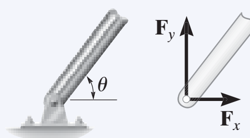
Los ángulos usados para descomponer fuerzas, y las dimensiones empleadas para tomar los momentos de las fuerzas, también deben mostrarse en el diagrama de cuerpo libre.

A continuación se presentan en dos dimensiones algunos tipos comunes de soportes y sus reacciones.

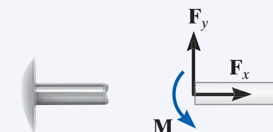
Recuerde que un soporte ejercerá una fuerza sobre el cuerpo en una dirección particular si evita la traslación del cuerpo en esa dirección, y ejercerá un momento de par sobre el cuerpo si evita una rotación.




rodillo




pasador o bisagra lisa



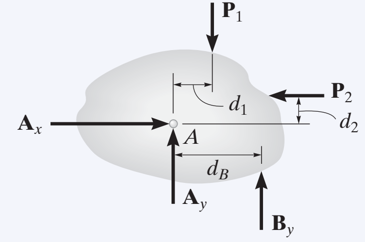

soporte fijo

Las tres ecuaciones escalares de equilibrio pueden aplicarse al resolver problemas en dos dimensiones, ya que la geometría es fácil de visualizar.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$

Para la solución más directa, trate de sumar fuerzas a lo largo de un eje que elimine tantas fuerzas desconocidas como sea posible. Sume momentos con respecto a un punto $A$ que pase por la línea de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.

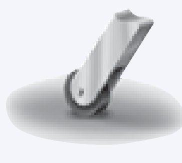
$$\Sigma F_x = 0;$$
$$A_x - P_2 = 0 \qquad A_x = P_2$$
$$\Sigma M_A = 0;$$
$$P_2 d_2 + B_y d_B - P_1 d_1 = 0$$
$$B_y = \frac{P_1 d_1 - P_2 d_2}{d_B}$$



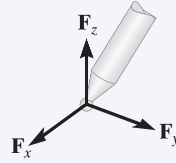



**Tres dimensiones**

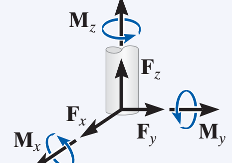
A continuación se muestran aquí en tres dimensiones algunos tipos comunes de soporte y sus reacciones.




rodillo


rótula esférica




soporte fijo

En tres dimensiones, a menudo es conveniente usar un análisis vectorial cartesiano al aplicar las ecuaciones de equilibrio. Para hacer esto, exprese primero, en forma vectorial cartesiana, cada fuerza y cada momento de par conocidos y desconocidos mostrados en el diagrama de cuerpo libre. Luego iguale a cero la suma de fuerzas. Tome momentos con respecto a un punto $O$ que se encuentre sobre la línea de acción de tantas componentes desconocidas de fuerza como sea posible. Desde el punto $O$ dirija vectores de posición hacia cada fuerza, y luego use el producto cruz para determinar el momento de cada fuerza.

Las seis ecuaciones escalares de equilibrio se establecen haciendo las respectivas componentes **i**, **j** y **k** de esas sumas de fuerzas y de momentos iguales a cero.

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

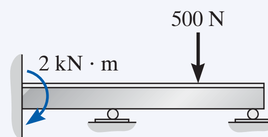
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

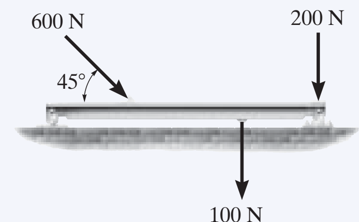
**Determinación y estabilidad**

Si un cuerpo está soportado por un número mínimo de restricciones para asegurar el equilibrio, entonces es estáticamente determinado. Si tiene más restricciones que las requeridas, entonces es estáticamente indeterminado.

Para restringir apropiadamente el cuerpo, las reacciones no deben ser todas concurrentes o paralelas entre sí.



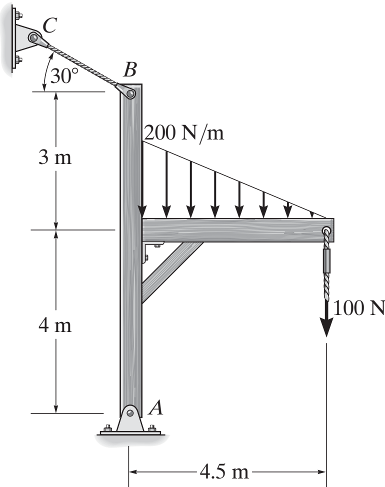

Estáticamente indeterminadas,
cinco reacciones,
tres ecuaciones de equilibrio




Restricción apropiada,
estáticamente determinada

## PROBLEMAS DE REPASO

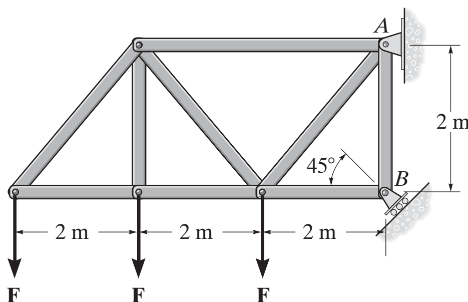
***5-88.** Determine las componentes vertical y horizontal de la reacción en el pasador $A$ y la fuerza en el cable $BC$. Pase por alto el grosor de los elementos.




**Prob. 5-88**

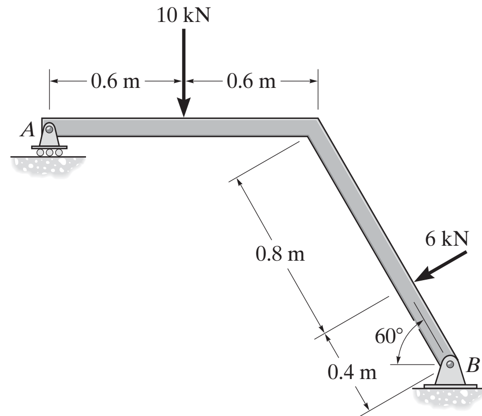
**•5-89.** Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador $A$ y la reacción en el rodillo $B$ requeridas para soportar la armadura. Considere que $F = 600$ N.

**5-90.** Si el rodillo localizado en $B$ puede soportar una carga máxima de 3 kN, determine la máxima magnitud de cada una de las tres fuerzas **F** que puede ser soportada por la armadura.



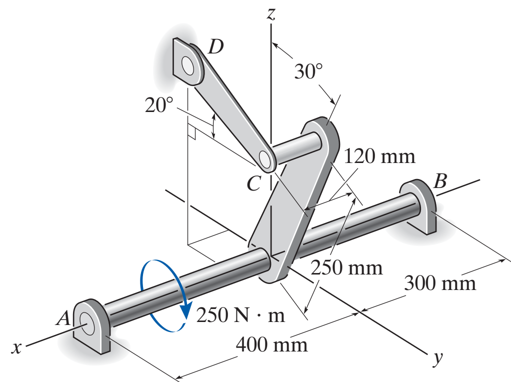

**Probs. 5-89/90**

**5-91.** Determine la reacción normal en el rodillo $A$ y las componentes horizontal y vertical en el pasador $B$, para lograr el equilibrio del elemento.



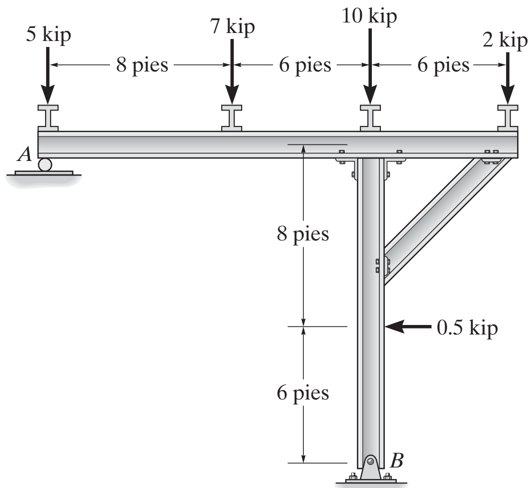

**Prob. 5-91**

***5-92.** La flecha ensamblada está soportada por dos chumaceras lisas $A$ y $B$ y un eslabón corto $DC$. Si se aplica un momento de par a la flecha como se muestra, determine las componentes de fuerza de reacción en las chumaceras y la fuerza presente en el eslabón. El eslabón se encuentra en un plano paralelo al plano $y$-$z$ y las chumaceras están adecuadamente alineadas con la flecha.



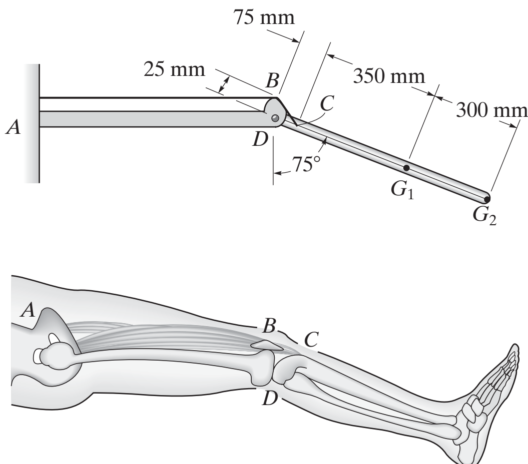

**Prob. 5-92**

•**5-93.** Determine las reacciones en los soportes $A$ y $B$ del bastidor.



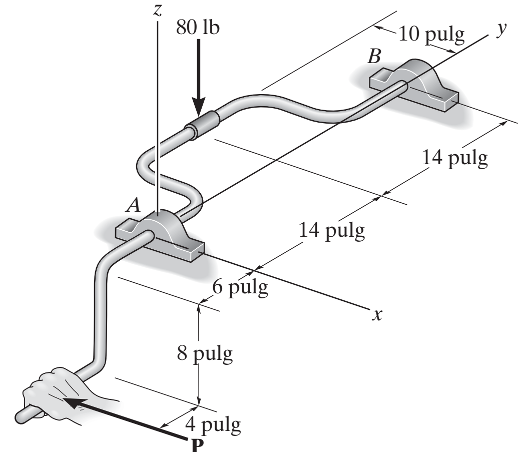

**Prob. 5-93**

**5-94.** En la parte inferior de la figura se muestra un diagrama esquelético de la pierna. Aquí se puede observar que esta parte de la pierna se levanta por la acción del músculo cuádriceps unido a la cadera en $A$ y a la rótula en $B$. Este hueso se desliza libremente sobre el cartílago y la junta de la rodilla. El cuádriceps se extiende posteriormente para unirse a la tibia en $C$. Con el sistema mecánico que se muestra en la parte superior de la figura para modelar la pierna, determine la tensión en el cuádriceps en $C$ y la magnitud de la fuerza resultante en el fémur (pasador), $D$, a fin de mantener la pierna en la posición mostrada. La pierna tiene una masa de 3.2 kg y un centro de masa en $G_1$; el pie tiene una masa de 1.6 kg y un centro de masa en $G_2$.



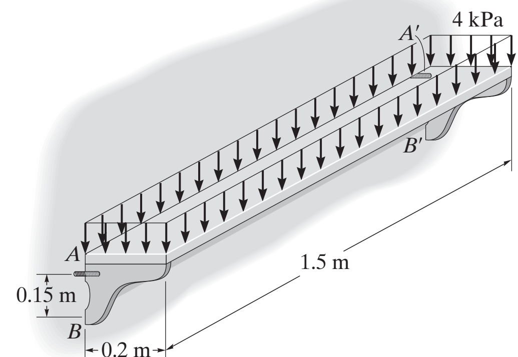

**Prob. 5-94**

**5-95.** Una fuerza vertical de 80 lb actúa sobre el cigüeñal. Determine la fuerza horizontal $P$ de equilibrio que debe aplicarse a la manivela y las componentes $x$, $y$, $z$ de reacción en la chumacera lisa $A$ y en la chumacera de empuje $B$. Estos cojinetes están alineados correctamente y ejercen sólo fuerzas de reacción sobre la flecha.




**Prob. 5-95**

*__5-96.__ La repisa simétrica está sometida a una carga uniforme de 4 kPa. El soporte está proporcionado por un perno (o pasador) localizado en cada extremo $A$ y $A'$ y por las ménsulas simétricas que se apoyan contra la pared lisa en ambos lados $B$ y $B'$. Determine la fuerza resistida por cada perno en la pared y la fuerza normal $B$ necesarias para lograr el equilibrio.




**Prob. 5-96**

5



Para diseñar apropiadamente los elementos, es necesario determinar las fuerzas internas de los elementos de cada puente de armadura.

# Análisis estructural

# 6

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo se determinan las fuerzas en los elementos de una armadura, por medio del método de nodos y del método de secciones.
- Analizar las fuerzas que actúan sobre los elementos de bastidores y máquinas, compuestos por elementos conectados mediante pasadores.

## 6.1 Armaduras simples

Una *armadura* es una estructura compuesta de elementos esbeltos unidos entre sí en sus puntos extremos. Los elementos usados comúnmente en construcción consisten en puntales de madera o barras metálicas. En particular, las armaduras *planas* se sitúan en un solo plano y con frecuencia se usan para soportar techos y puentes. La armadura que se muestra en la figura 6-1*a* es un ejemplo de una armadura típica para soportar techos. En esta figura, la carga del techo se transmite a la armadura *en los nodos* por medio de una serie de *largueros*. Como esta carga actúa en el mismo plano que la armadura, figura 6-1*b*, el análisis de las fuerzas desarrolladas en los elementos de la armadura será bidimensional.

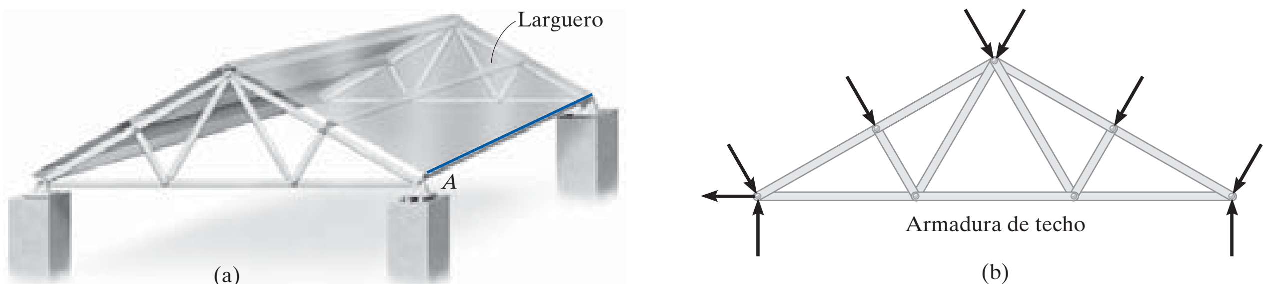



**Fig. 6-1**

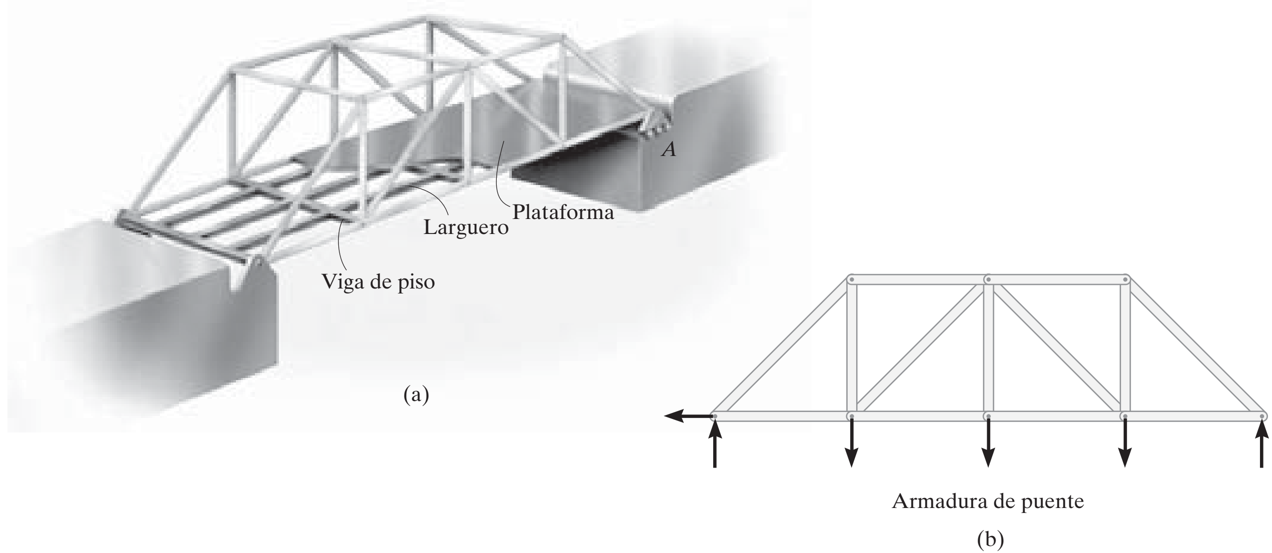



**Fig. 6-2**

6

En el caso de un puente, como el mostrado en la figura 6-2*a*, la carga sobre la cubierta se transmite primero a los *largueros*, luego a las *vigas de piso*, y finalmente a los *nodos* de las dos armaduras laterales de soporte. Igual que en la armadura de techo, la carga en una armadura de puente es coplanar, figura 6-2*b*.

Cuando las armaduras de puente o de techo se extienden sobre grandes distancias, comúnmente se usa un soporte o rodillo para soportar un extremo, por ejemplo, el nodo *A* en las figuras 6-1*a* y 6-2*a*. Este tipo de soporte permite la expansión o la contracción de los elementos debidas a los cambios de temperatura o a la aplicación de cargas.

## Supuestos para el diseño.

Para diseñar los elementos y las conexiones de una armadura, es necesario determinar primero la *fuerza* desarrollada en cada elemento cuando la armadura está sometida a una carga dada. Para esto, haremos dos supuestos importantes:

- ***Todas las cargas se aplican en los nodos.*** En la mayoría de las situaciones, como en armaduras de puentes y de techos, este supuesto se cumple. A menudo se pasa por alto el peso de los elementos, ya que la fuerza soportada por cada elemento suele ser mucho más grande que su peso. Sin embargo, si el peso debe ser incluido en el análisis, por lo general es satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical con la mitad de su magnitud aplicada a cada extremo del elemento.
- ***Los elementos están unidos entre sí mediante pasadores lisos.*** Por lo general, las conexiones de los nodos se forman empernando o soldando los extremos de los elementos a una placa común, llamada *placa de unión*, como se muestra en la figura 6-3*a*, o simplemente pasando un perno o pasador largo a través de cada uno de los elementos, figura 6-3*b*. Podemos suponer que estas conexiones actúan como pasadores siempre que las líneas centrales de los elementos unidos sean *concurrentes*, como en la figura 6-3.

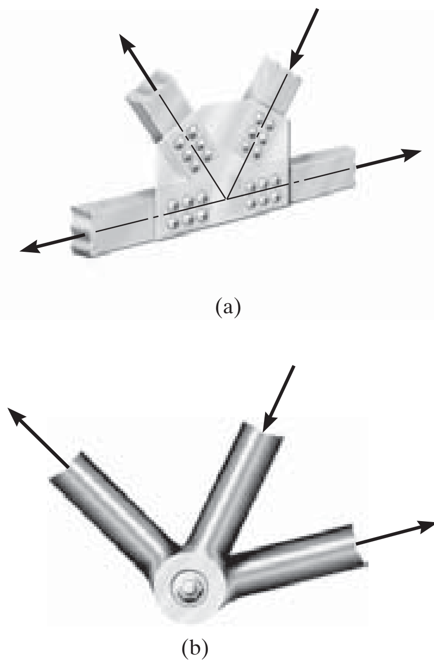



**Fig. 6-3**

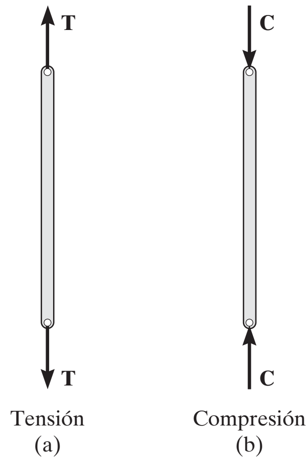



**Fig. 6-4**

Debido a estos dos supuestos, *cada elemento de la armadura actuará como un elemento de dos fuerzas*, y por lo tanto, la fuerza que actúe en cada extremo del elemento debe estar dirigida a lo largo del eje del elemento. Si la fuerza tiende a *alargar* el elemento, es una *fuerza de tensión* (T), figura 6-4*a*; mientras que si tiende a *acortar* el elemento, es una *fuerza de compresión* (C), figura 6-4*b*. En el diseño real de una armadura es importante establecer si la naturaleza de la fuerza es de tensión o de compresión. A menudo, los elementos a compresión deben ser más *gruesos* que los elementos a tensión debido al efecto de pandeo o de columna que ocurre cuando un elemento está en compresión.





En la construcción de estas armaduras Warren, es evidente el uso de placas de unión metálicas.

**Armadura simple.** Si tres elementos se conectan entre sí mediante pasadores en sus extremos, forman una *armadura triangular* que será *rígida*, figura 6-5. Al unir dos elementos más y conectar estos elementos a una nueva junta *D* se forma una armadura más grande, figura 6-6. Este procedimiento puede repetirse todas las veces que se desee para formar una armadura aún más grande. Si una armadura se puede construir expandiendo de este modo la armadura triangular básica, se denomina una *armadura simple*.

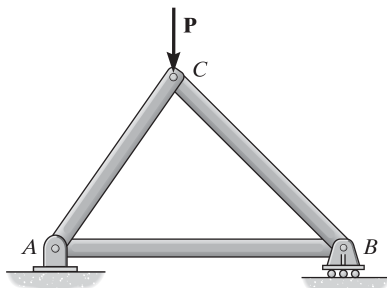



**Fig. 6-5**

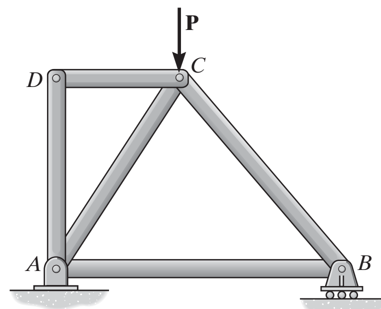



**Fig. 6-6**

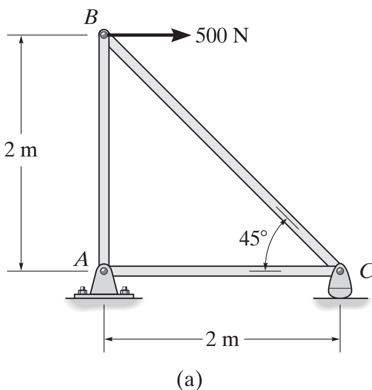
## 6.2 Método de nodos

Para analizar o diseñar una armadura, es necesario determinar la fuerza en cada uno de sus elementos. Una forma de hacer esto consiste en emplear el método de nodos. Este método se basa en el hecho de que toda la armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nodos también está en equilibrio. Por lo tanto, si se traza el diagrama de cuerpo libre de cada nodo, se pueden usar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para obtener las fuerzas de los elementos que actúan sobre cada nodo. Como los elementos de una *armadura plana* son elementos rectos de dos fuerzas que se encuentran en el mismo plano, cada nodo está sometido a un sistema de fuerzas que es *coplanar y concurrente*. En consecuencia, sólo es necesario satisfacer $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para garantizar el equilibrio.

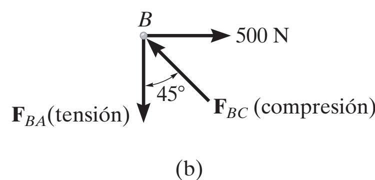
Por ejemplo, considere el pasador situado en el nodo $B$ de la armadura que aparece en la figura 6-7*a*. Sobre el pasador actúan tres fuerzas, a saber, la fuerza de 500 N y las fuerzas ejercidas por los elementos $BA$ y $BC$. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6-7*b*. Aquí, $\mathbf{F}_{BA}$ está "jalando" el pasador, lo que significa que el elemento $BA$ está en *tensión*; mientras que $\mathbf{F}_{BC}$ está "empujando" el pasador, y en consecuencia, el miembro $BC$ está en *compresión*. Estos efectos se demuestran claramente al aislar el nodo con pequeños segmentos del elemento conectado al pasador, figura 6-7*c*. El jalón o el empujón sobre esos pequeños segmentos indican el efecto del elemento que está en compresión o en tensión.

Cuando se usa el método de los nodos, siempre se debe comenzar en un nodo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas, como en la figura 6-7*b*. De esta manera, la aplicación de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ resulta en dos ecuaciones algebraicas de las cuales se pueden despejar las dos incógnitas. Al aplicar esas ecuaciones, el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida puede determinarse con uno de dos posibles métodos.

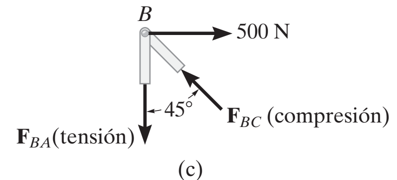




(a)



(b)



(c)

**Fig. 6-7**

- El sentido *correcto* de la dirección de una fuerza desconocida de un elemento puede determinarse, en muchos casos, "por inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ en la figura 6-7*b* debe empujar sobre el pasador (compresión) ya que su componente horizontal, $F_{BC}$ sen 45°, debe equilibrar la fuerza de 500 N ($\Sigma F_x = 0$). De la misma manera, $\mathbf{F}_{BA}$ es una fuerza de tensión ya que equilibra a la componente vertical, $F_{BC}$ cos 45° ($\Sigma F_y = 0$). En casos más complicados, el sentido de la fuerza desconocida de un elemento puede *suponerse*; luego, después de aplicar las ecuaciones de equilibrio, el sentido supuesto puede verificarse a partir de los resultados numéricos. Una respuesta *positiva* indica que el sentido es *correcto*, mientras que una respuesta *negativa* indica que el sentido mostrado en el diagrama de cuerpo libre se debe *invertir*.
- *Suponga siempre* que las *fuerzas desconocidas en los elementos* que actúan en el diagrama de cuerpo libre del nodo están en *tensión*; es decir, las fuerzas "jalan" el pasador. Si se hace así, entonces la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio darán *escalares positivos para elementos en tensión y escalares negativos para elementos en compresión*. Una vez que se encuentre la fuerza desconocida de un elemento, aplique su magnitud y su sentido *correctos* (T o C) en los subsecuentes diagramas de cuerpo libre de los nodos.



Las fuerzas en los elementos de esta armadura sencilla para techo pueden determinarse por el método de nodos.

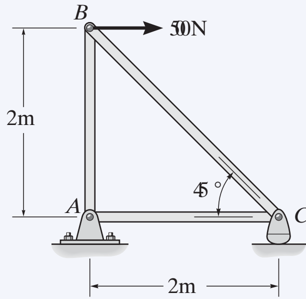
6

## Procedimiento para el análisis

El siguiente procedimiento proporciona un medio para analizar una armadura con el método de nodos.

- Trace el diagrama de cuerpo libre de un nodo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho dos fuerzas desconocidas. (Si este nodo está en uno de los soportes, entonces puede ser necesario calcular las reacciones externas en los soportes de la armadura).
- Use uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida.
- Oriente los ejes $x$ y $y$ de manera que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus componentes $x$ y $y$, y luego aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Despeje las dos fuerzas de elemento desconocidas y verifique su sentido correcto.
- Con los resultados obtenidos, continúe con el análisis de cada uno de los otros nodos. Recuerde que un elemento en *compresión* "empuja" el nodo y un elemento en *tensión* "jala" el nodo. Además, asegúrese de seleccionar un nodo que tenga cuando mucho dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida.

## EJEMPLO 6.1

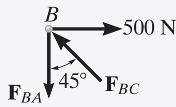


(a)

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada en la figura 6-8*a* e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

### SOLUCIÓN

Como no debemos tener más de dos incógnitas en el nodo y por lo menos contar con una fuerza conocida actuando ahí, comenzaremos el análisis en el nodo *B*.

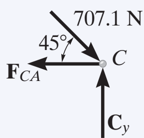


(b)

**Nodo *B*.** El diagrama de cuerpo libre del nodo en *B* se muestra en la figura 6-8*b*. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad 500\text{ N} - F_{BC}\text{ sen }45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 707.1\text{ N (C)}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{BC}\cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 500\text{ N (T)}$ ***Resp.***



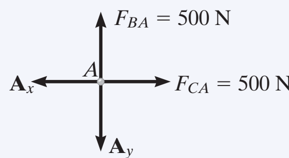
(c)

Como se ha calculado la fuerza en el elemento *BC*, podemos proceder a analizar el nodo *C* para determinar la fuerza en el elemento *CA* y la reacción en el soporte del rodillo.

**Nodo *C*.** A partir del diagrama de cuerpo libre del nodo *C*, figura 6.8*c*, tenemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\ -F_{CA} + 707.1\cos 45^\circ\text{ N} = 0 \quad F_{CA} = 500\text{ N (T)}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad C_y - 707.1\text{ sen }45^\circ\text{ N} = 0 \quad C_y = 500\text{ N}$ ***Resp.***

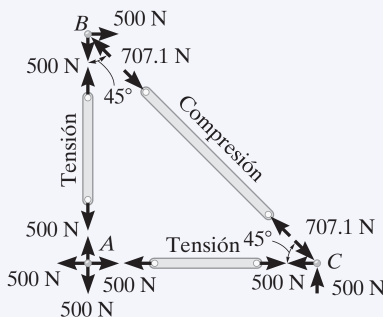


(d)

**Nodo *A*.** Aunque no es necesario, podemos determinar las componentes de las reacciones de soporte en el nodo *A* mediante los resultados de $F_{CA}$ y $F_{BA}$. A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 6-8*d*, tenemos

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad 500\text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 500\text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 500\text{ N} - A_y = 0 \quad A_y = 500\text{ N}$



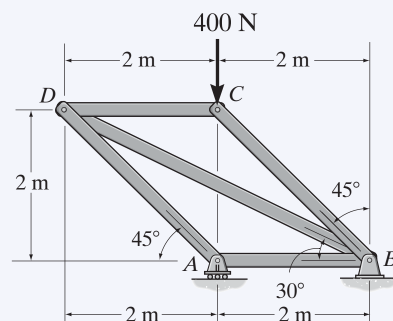
(e)

**Fig. 6-8**

**NOTA:** los resultados del análisis se resumen en la figura 6-8*e*. Observe que el diagrama de cuerpo libre de cada nodo (o pasador) muestra los efectos de todos los elementos conectados y las fuerzas externas aplicadas al nodo, en tanto que el diagrama de cuerpo libre de cada elemento sólo muestra los efectos de los pasadores de los extremos en el elemento.

## EJEMPLO 6.2

Determine la fuerza que actúa en cada uno de los elementos de la armadura que se muestra en la figura 6-9*a*; además, indique si los elementos están en tensión o en compresión.




(a)

### SOLUCIÓN

Como el nodo $C$ tiene una fuerza conocida y sólo dos fuerzas desconocidas que actúan sobre él, es posible comenzar en este punto, después analizar el nodo $D$ y por último el nodo $A$. De esta forma las reacciones de soporte no tendrán que determinarse antes de comenzar el análisis.

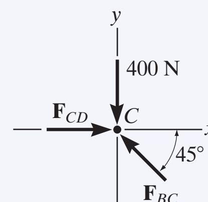
**Nodo *C*.** Por inspección del equilibrio de fuerzas, figura 6-9*b*, se puede observar que ambos elementos $BC$ y $CD$ deben estar en compresión.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{BC} \text{ sen } 45° - 400 \text{ N} = 0$

$F_{BC} = 565.69 \text{ N} = 566 \text{ N (C)}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{CD} - (565.69 \text{ N}) \cos 45° = 0$

$F_{CD} = 400 \text{ N (C)}$ ***Resp.***

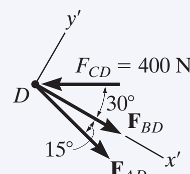



(b)

**Nodo *D*.** Con el resultado $F_{CD} = 400$ N (C), la fuerza en los elementos $BD$ y $AD$ puede encontrarse al analizar el equilibrio del nodo $D$. Supondremos que tanto $\mathbf{F}_{AD}$ como $\mathbf{F}_{BD}$ son fuerzas de tensión, figura 6-9*c*. El sistema coordenado $x'$, $y'$ se establecerá de modo que el eje $x'$ esté dirigido a lo largo de $\mathbf{F}_{BD}$. De esta manera, eliminaremos la necesidad de resolver dos ecuaciones simultáneamente. Ahora $\mathbf{F}_{AD}$ se puede obtener *directamente* al aplicar $\Sigma F_{y'} = 0$.

$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \qquad -F_{AD} \text{ sen } 15° - 400 \text{ sen } 30° = 0$

$F_{AD} = -772.74 \text{ N} = 773 \text{ N (C)}$ ***Resp.***




(c)

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_{AD}$ es una fuerza de compresión. Con este resultado,

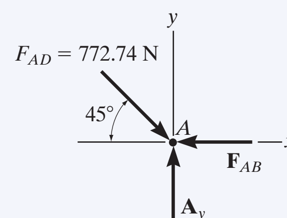
$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad F_{BD} + (-772.74 \cos 15°) - 400 \cos 30° = 0$

$F_{BD} = 1092.82 \text{ N} = 1.09 \text{ kN (T)}$ ***Resp.***

**Nodo *A*.** La fuerza en el elemento $AB$ puede encontrarse al analizar el equilibrio del nodo $A$, figura 6-9*d*. Tenemos

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad (772.74 \text{ N}) \cos 45° - F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 546.41 \text{ N (C)} = 546 \text{ N (C)}$ ***Resp.***




(d)

**Fig. 6-9**

6

## EJEMPLO 6.3

Determine la fuerza en cada elemento de la armadura mostrada en la figura 6-10*a*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

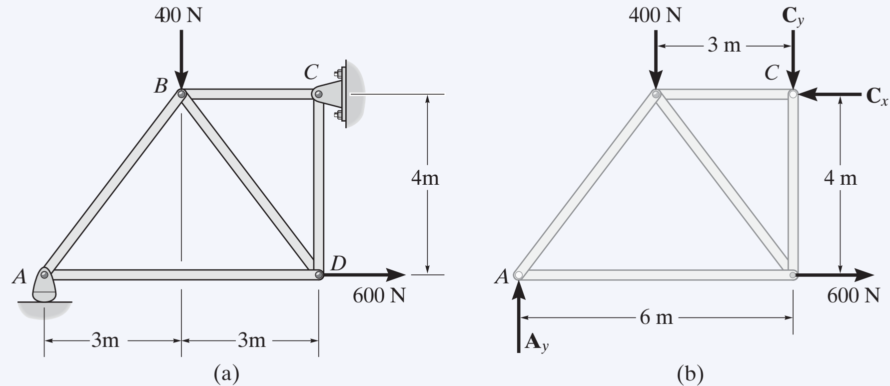



**Fig. 6-10**



### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** No se puede analizar ningún nodo hasta que se hayan determinado las reacciones en los soportes, porque cada nodo tiene más de tres fuerzas desconocidas que actúan sobre él. En la figura 6-10*b* se presenta un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

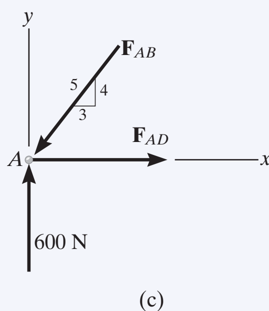
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 600\text{ N} - C_x = 0 \qquad C_x = 600\text{ N}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -A_y(6\text{ m}) + 400\text{ N}(3\text{ m}) + 600\text{ N}(4\text{ m}) = 0$$

$$A_y = 600\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - 400\text{ N} - C_y = 0 \qquad C_y = 200\text{ N}$$

El análisis puede empezar ahora en cualquiera de los nodos *A* o *C*. La elección es arbitraria ya que hay una fuerza conocida y dos fuerzas de elemento desconocidas que actúan sobre el pasador en cada uno de esos nodos.



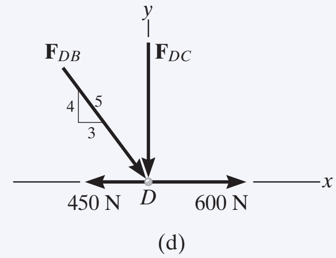

(c)

**Nodo *A*.** (Figura 6-10*c*). Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, se supone que $\mathbf{F}_{AB}$ es una fuerza de compresión y $\mathbf{F}_{AD}$ es de tensión. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 600\text{ N} - \tfrac{4}{5}F_{AB} = 0 \qquad F_{AB} = 750\text{ N} \quad \text{(C)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad F_{AD} - \tfrac{3}{5}(750\text{ N}) = 0 \qquad F_{AD} = 450\text{ N} \quad \text{(T)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Nodo *D*.** (Figura 6-10*d*). Si utilizamos el resultado para $F_{AD}$ y sumamos fuerzas en la dirección horizontal, figura 6-10*d*, tenemos



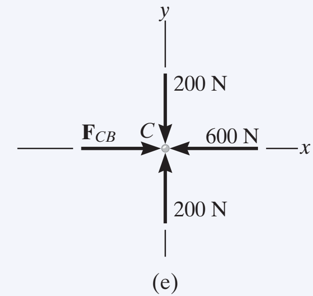
(d)

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -450\text{ N} + \tfrac{3}{5}F_{DB} + 600\text{ N} = 0 \quad F_{DB} = -250\text{ N}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_{DB}$ actúa en *sentido opuesto* al mostrado en la figura 6-10*d*.* Por lo tanto,

$$F_{DB} = 250\text{ N (T)} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Para determinar $\mathbf{F}_{DC}$ podemos corregir el sentido de $\mathbf{F}_{DB}$ en el diagrama de cuerpo libre y luego aplicar $\Sigma F_y = 0$, o aplicar esta ecuación y retener el signo negativo para $F_{DB}$, es decir,



(e)

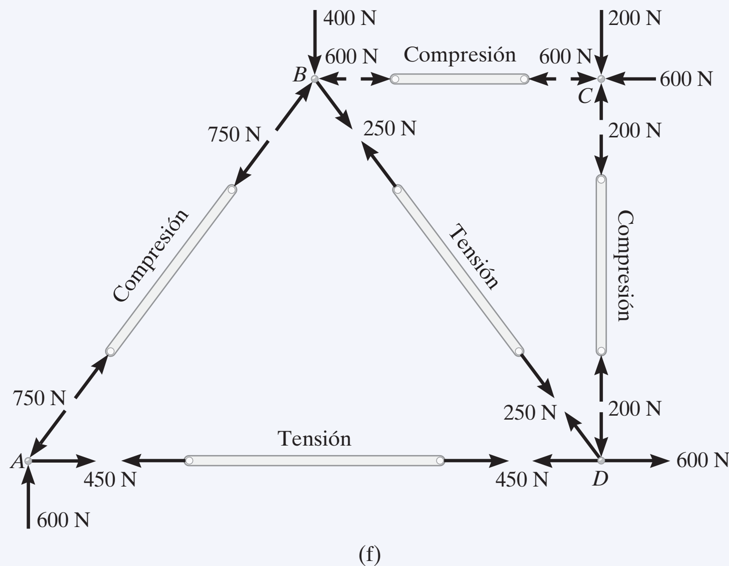
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad -F_{DC} - \tfrac{4}{5}(-250\text{ N}) = 0 \quad F_{DC} = 200\text{ N} \quad (\text{C}) \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Nodo *C*.** (Figura 6-10*e*).

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{CB} - 600\text{ N} = 0 \quad F_{CB} = 600\text{ N} \quad (\text{C}) \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad 200\text{ N} - 200\text{ N} \equiv 0 \quad (\text{comprobación})$$

**NOTA:** en la figura 6-10*f* se presenta el análisis resumido, que muestra el diagrama de cuerpo libre para cada nodo y cada elemento.



(f)

*El sentido correcto podría haber sido determinado por inspección, antes de aplicar $\Sigma F_x = 0$.

## 6.3 Elementos de fuerza cero

El análisis de armaduras por el método de nodos se simplifica de manera considerable si podemos identificar primero aquellos elementos que *no soportan carga*. Esos *elementos de fuerza cero* se usan para incrementar la estabilidad de la armadura durante la construcción y proporcionar soporte adicional si se modifica la carga aplicada.

Por lo general, los elementos de fuerza cero de una armadura se pueden encontrar *por inspección* de cada uno de sus nodos. Por ejemplo, considere la armadura mostrada en la figura 6-11*a*. Si se traza un diagrama de cuerpo libre del pasador situado en el nodo $A$, figura 6-11*b*, se advierte que los elementos $AB$ y $AF$ son elementos de fuerza cero. (No podríamos haber llegado a esta conclusión si hubiésemos considerado los diagramas de cuerpo libre de los nodos $F$ o $B$ simplemente porque hay cinco incógnitas en cada uno de esos nodos). Del mismo modo, considere el diagrama de cuerpo libre del nodo $D$, figura 6-11*c*. Aquí se ve de nuevo que $DC$ y $DE$ son elementos de fuerza cero. A partir de estas observaciones, podemos concluir que *si sólo dos elementos forman una armadura y no se aplica ninguna carga externa o reacción de soporte al nodo, los dos elementos deben ser elementos de fuerza cero*. Por lo tanto, la carga sobre la armadura que aparece en la figura 6-11*a* está soportada sólo por cinco elementos, como se muestra en la figura 6-11*d*.



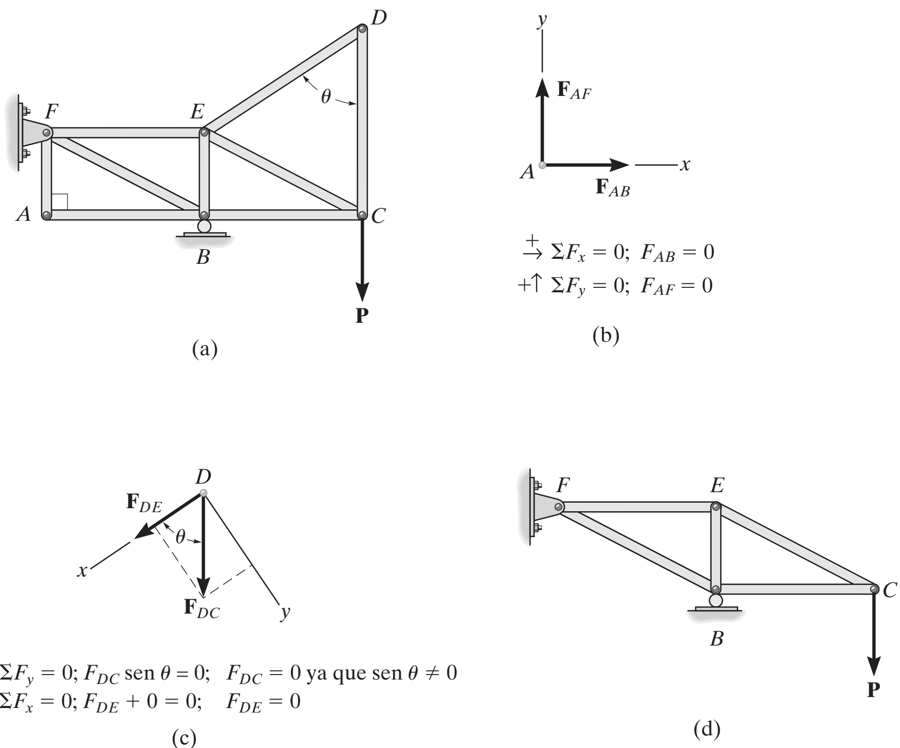
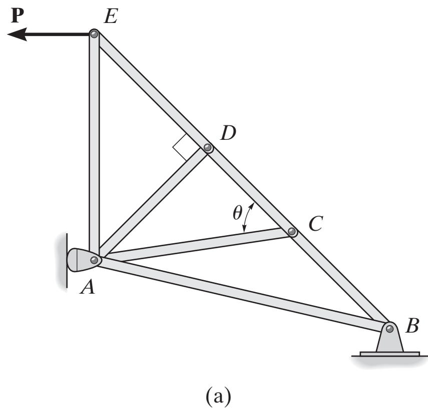
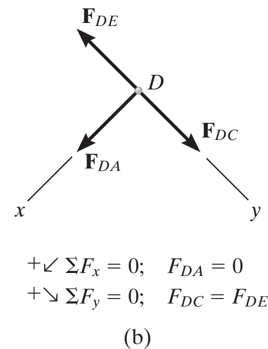



**Fig. 6-11**

Ahora considere la armadura mostrada en la figura 6-12*a*. El diagrama de cuerpo libre del pasador en el nodo $D$ se muestra en la figura 6-12*b*. Al orientar el eje $y$ a lo largo de los elementos $DC$ y $DE$ y el eje $x$ a lo largo del elemento $DA$, se observa que $DA$ es un elemento de fuerza cero. Observe que éste es también el caso del elemento $CA$, figura 6-12*c*. Por lo general, *si tres elementos forman un nodo de armadura en el cual dos de los elementos son colineales, el tercer miembro es un elemento de fuerza cero siempre que no se aplique ninguna fuerza exterior o reacción de soporte al nodo*. Por lo tanto, la armadura mostrada en la figura 6-12*d* es adecuada para soportar la carga **P**.

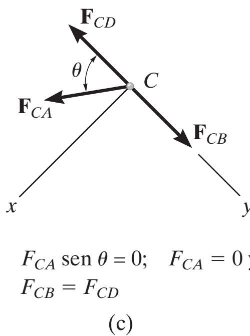


(a)

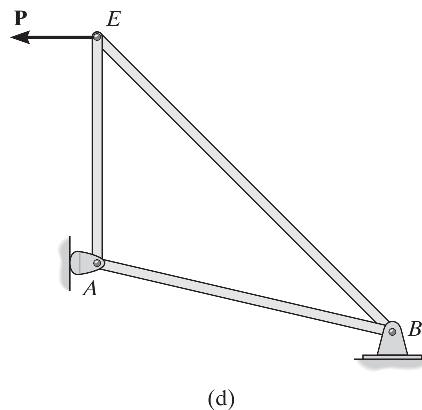


(b)





(c)

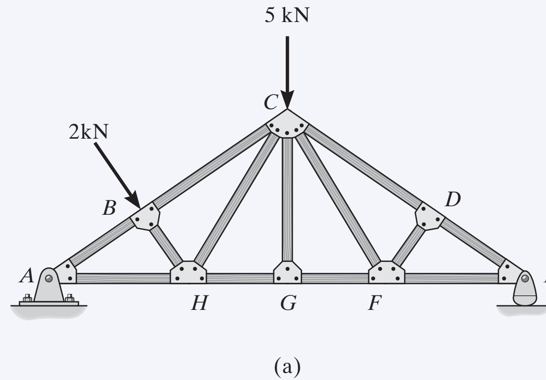


(d)

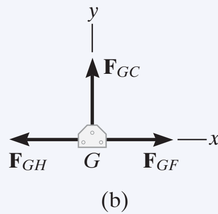
**Fig. 6-12**

# EJEMPLO 6.4

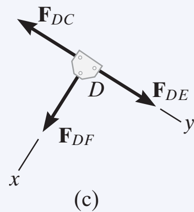
Por el método de nodos, determine todos los elementos de fuerza cero de la *armadura de techo Fink* que se muestra en la figura 6-13*a*. Suponga que todos los nodos están conectados mediante pasadores.



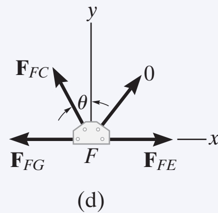
(a)



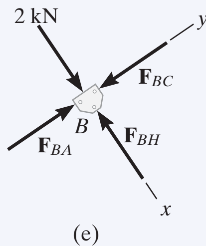
(b)



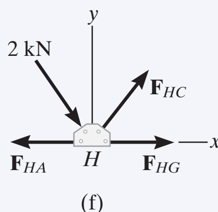
(c)



(d)



(e)



(f)

**Fig. 6-13**

## SOLUCIÓN

Busque geometrías de nodos que tengan tres elementos de los cuales dos sean colineales. Tenemos

**Nodo *G*.** (Figura 6-13*b*).

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{GC} = 0$ ***Resp.***

Observe que no pudimos concluir que *GC* es un elemento de fuerza cero al considerar el nodo *C*, donde se tienen cinco incógnitas. El hecho de que *GC* sea un elemento de fuerza cero significa que la carga de 5 kN en *C* debe estar soportada por los elementos *CB*, *CH*, *CF* y *CD*.

**Nodo *D*.** (Figura 6-13*c*).

$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \qquad F_{DF} = 0$ ***Resp.***

**Nodo *F*.** (Figura 6-13*d*).

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{FC} \cos \theta = 0$ Puesto que $\theta \neq 90°$, $F_{FC} = 0$ ***Resp.***

**NOTA:** si se analiza el nodo *B*, figura 6-13*e*,

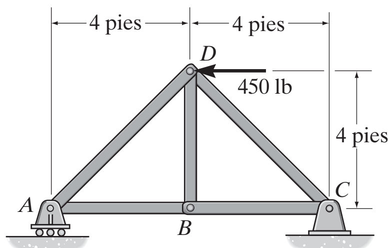
$+\searrow \Sigma F_x = 0; \qquad 2 \text{ kN} - F_{BH} = 0 \quad F_{BH} = 2 \text{ kN} \quad \text{(C)}$

Además, $F_{HC}$ debe satisfacer $\Sigma F_y = 0$, figura 6-13*f*, y por lo tanto, *HC no* es un elemento de fuerza cero.

6

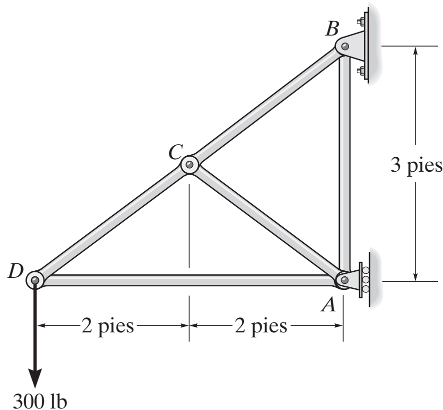
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F6-1.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



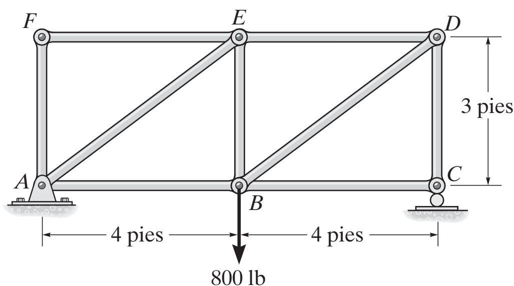

**F6-1**

**F6-2.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



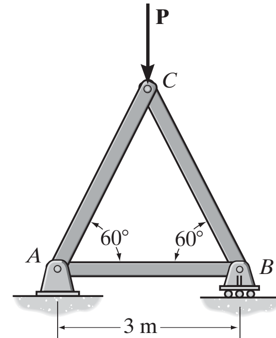

**F6-2**

**F6-3.** Determine la fuerza en los elementos $AE$ y $DC$. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



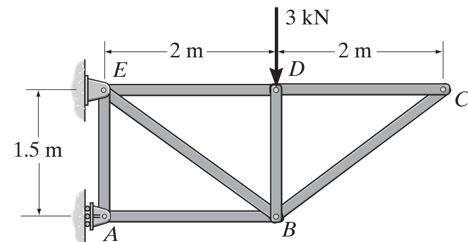

**F6-3**

**F6-4.** Determine la máxima carga $P$ que puede aplicarse a la armadura, de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que supere 2 kN en tensión o 1.5 kN en compresión.



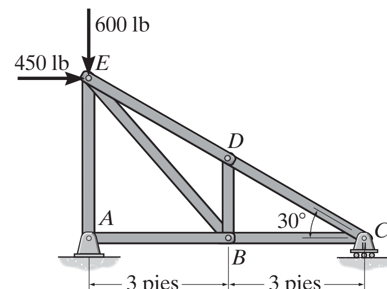

**F6-4**

**F6-5.** Identifique los elementos de fuerza cero en la armadura.




**F6-5**

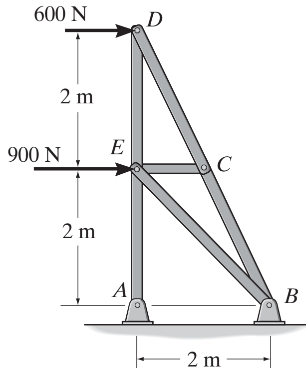
**F6-6.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**F6-6**

## PROBLEMAS

**•6-1.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

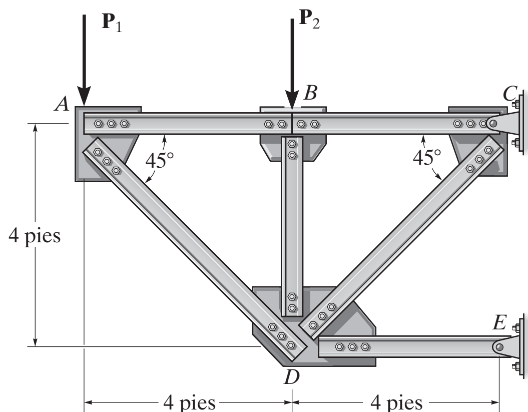



**Prob. 6-1**



**6-2.** La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nodo como un pasador y determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 600$ lb, $P_2 = 400$ lb.

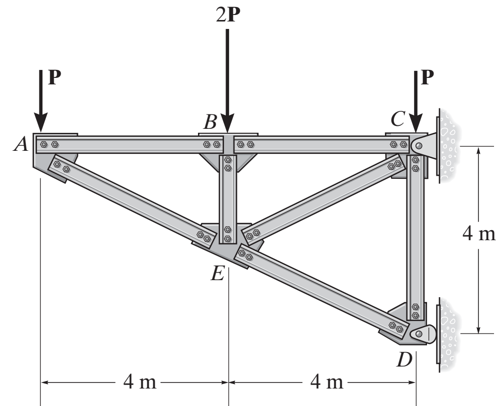
**6-3.** La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Aproxime cada nodo como un pasador y determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800$ lb, $P_2 = 0$.




**Probs. 6-2/3**

***6-4.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que cada nodo es un pasador. Considere $P = 4$ kN.

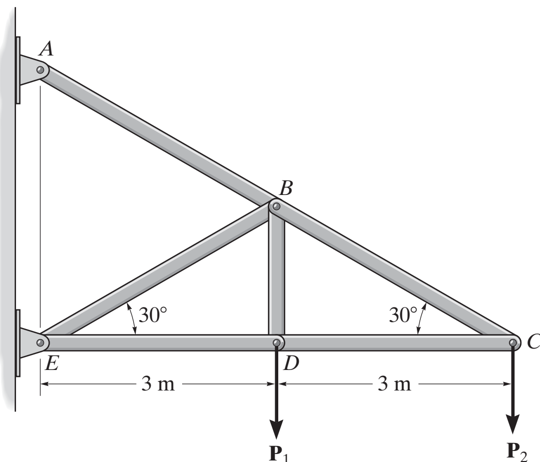
**•6-5.** Suponga que cada miembro de la armadura está hecho de acero con una masa por longitud de 4 kg/m. Establezca $P = 0$, determine la fuerza en cada elemento, e indique si los elementos están en tensión o en compresión. Ignore el peso de las placas de unión y suponga que cada nodo es un pasador. El problema se resuelve al suponer que el peso de cada elemento puede ser representado como una fuerza vertical, la mitad de la cual está aplicada en el extremo de cada elemento.




**Probs. 6-4/5**

**6-6.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 2$ kN y $P_2 = 1.5$ kN.

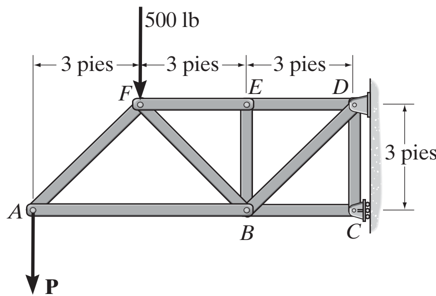
**6-7.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = P_2 = 4$ kN.




**Probs. 6-6/7**

*__6-8.__ Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 800$ lb.

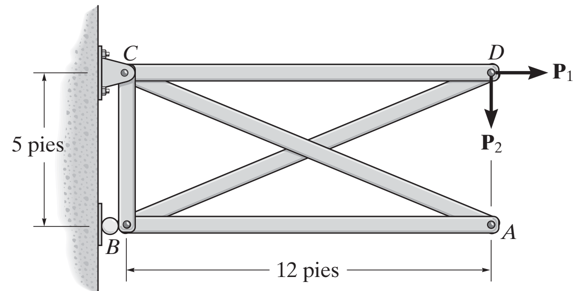
•**6-9.** Elimine la fuerza de 500 lb y entonces determine la máxima fuerza $P$ que puede aplicarse a la armadura de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 800 lb en tensión o 600 lb en compresión.




Probs. 6-8/9

*__6-12.__ Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 240$ lb, $P_2 = 100$ lb.

•**6-13.** Determine la máxima fuerza $P_2$ que puede aplicarse a la armadura de manera que la fuerza en cualquiera de los elementos no exceda 500 lb (T) o 350 lb (C). Considere $P_1 = 0$.

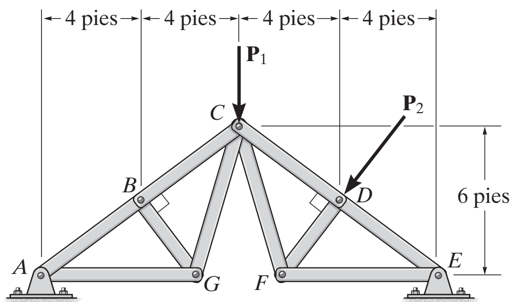



Probs. 6-12/13

6

**6-10.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 800$ lb, $P_2 = 0$.

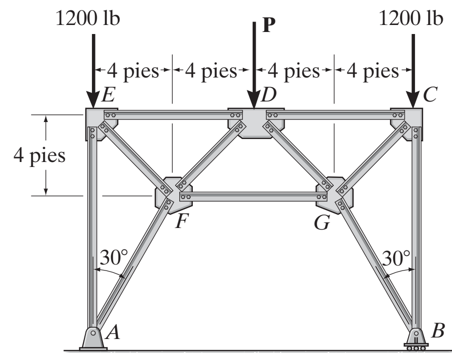
**6-11.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 600$ lb, $P_2 = 400$ lb.




Probs. 6-10/11

**6-14.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 2500$ lb.

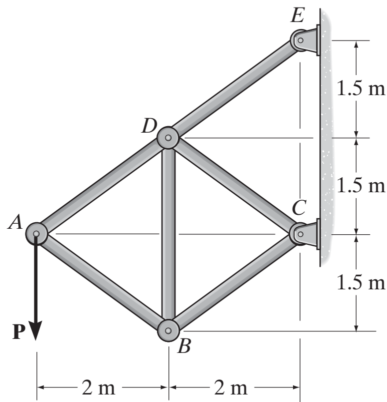
**6-15.** Elimine la fuerza de 1200 lb y determine la máxima fuerza $P$ que puede aplicarse a la armadura de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 2000 lb en tensión o 1500 lb en compresión.




Probs. 6-14/15

*6-16. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 5$ kN.

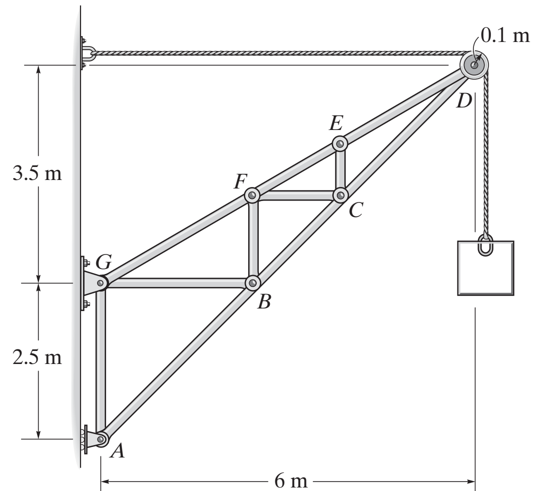
•6-17. Determine la máxima fuerza $P$ que puede aplicarse a la armadura, de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 2.5 kN en tensión o 2 kN en compresión.




**Probs. 6-16/17**

*6-20. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. La carga tiene una masa de 40 kg.

•6-21. Determine la máxima masa $m$ del bloque suspendido de modo que la fuerza en cualquier elemento no exceda 30 kN (T) o 25 kN (C).

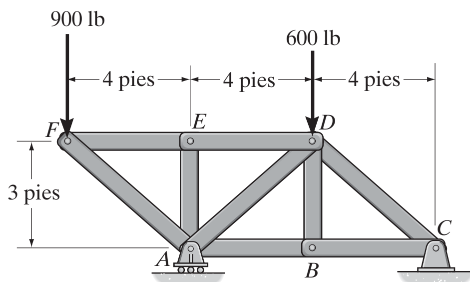



**Probs. 6-20/21**

6

6-18. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

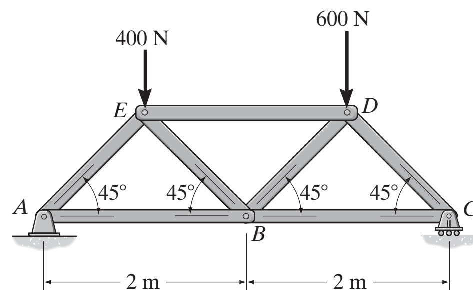
6-19. La armadura se fabrica con elementos que tienen un peso de 10 lb/pie. Retire las fuerzas externas de la armadura y determine la fuerza en cada elemento debido al peso de los elementos. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que la fuerza total que actúa sobre un nodo es la suma de la mitad del peso de cada elemento conectado al nodo.




**Probs. 6-18/19**

6-22. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

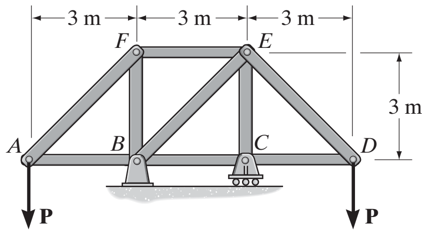
6-23. La armadura se fabrica con elementos que tienen una masa de 5 kg/m. Retire las fuerzas externas de la armadura y determine la fuerza en cada elemento debido al peso de los elementos. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Suponga que la fuerza total que actúa sobre un nodo es la suma de la mitad del peso de cada elemento conectado al nodo.




**Probs. 6-22/23**

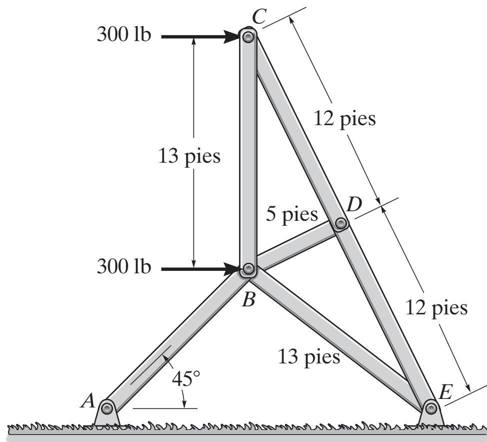
*__6-24.__ Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P = 4$ kN.

•**6-25.** Determine la máxima fuerza $P$ que puede aplicarse a la armadura, de manera que ninguno de los elementos esté sometido a una fuerza que exceda 1.5 kN en tensión o 1 kN en compresión.



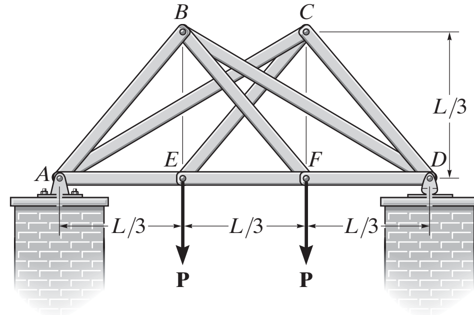

**Probs. 6-24/25**

**6-26.** Un señalamiento está sometido a una carga del viento que ejerce fuerzas horizontales de 300 lb sobre los nodos $B$ y $C$ de una de las armaduras laterales de soporte. Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-26**

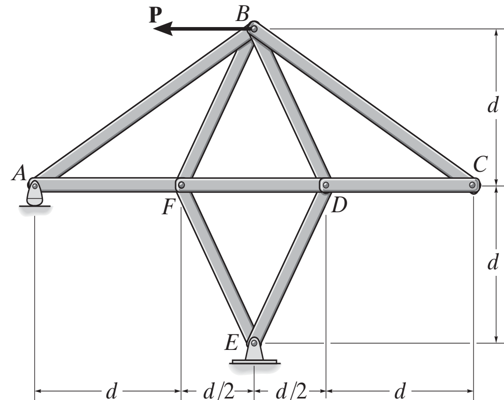
**6-27.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura de doble tijera en términos de la carga $P$ y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-27**

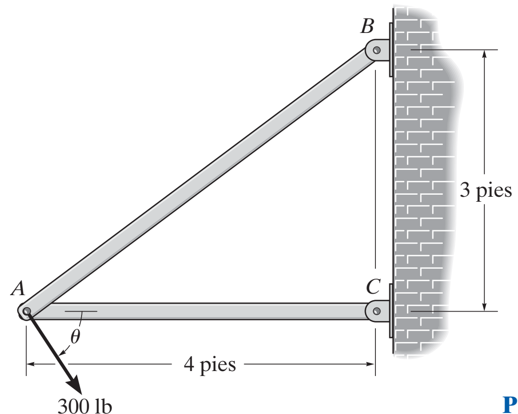
*__6-28.__ Determine la fuerza en cada elemento de la armadura en términos de la carga $P$, e indique si los elementos están en tensión o en compresión.

•**6-29.** Si la fuerza máxima que cualquier elemento puede soportar es de 4 kN en tensión y 3 kN en compresión, determine la fuerza máxima $P$ que puede aplicarse en el punto $B$. Considere $d = 1$ m.




**Probs. 6-28/29**

**6-30.** La armadura de dos elementos está sometida a una fuerza de 300 lb. Determine el rango $\theta$ para la aplicación de la carga de manera que la fuerza en cualquier elemento no exceda 400 lb (T) o 200 lb (C).




**Prob. 6-30**

6

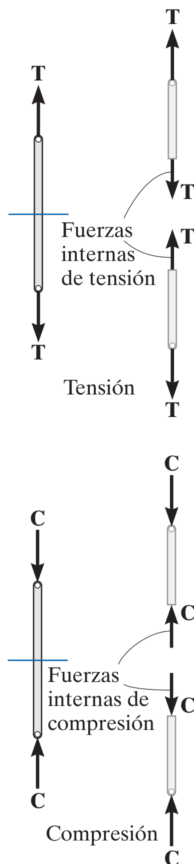



Fig. 6-14

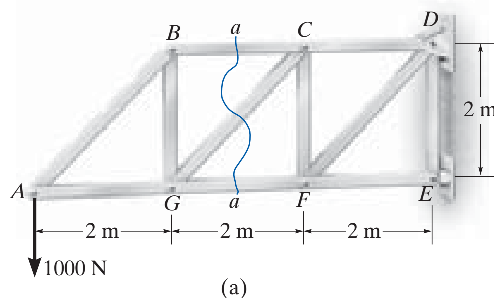


## 6.4 Método de secciones

Cuando necesitamos encontrar la fuerza en sólo unos cuantos elementos de una armadura, ésta puede analizarse mediante el *método de secciones*. Este método se basa en el principio de que si la armadura está en equilibrio, entonces cualquier segmento de la armadura está también en equilibrio. Por ejemplo, considere los dos elementos de armadura mostrados a la izquierda en la figura 6-14. Si se deben determinar las fuerzas dentro de los elementos, entonces puede utilizarse una sección imaginaria, indicada por la línea azul, para cortar cada elemento en dos partes y en consecuencia "exponer" cada fuerza interna como "externa" como se indica en los diagramas de cuerpo libre de la derecha. Se puede observar con claridad que para que haya equilibrio el elemento que está en tensión (T) está sujeto a un "jalón", mientras que el elemento en compresión (C) está sometido a un "empujón".

El método de secciones puede usarse también para "cortar" o seccionar los elementos de toda una armadura. Si la sección pasa por la armadura y se traza el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de sus dos partes, entonces podemos aplicar las ecuaciones de equilibrio a esa parte para determinar las fuerzas del elemento en la "sección cortada". Como sólo se pueden aplicar *tres* ecuaciones independientes de equilibrio ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$) al diagrama de cuerpo libre de cualquier segmento, debemos tratar de seleccionar una sección que, en general, pase por no más de *tres* elementos en que las fuerzas sean desconocidas. Por ejemplo, considere la armadura que se muestra en la figura 6-15*a*. Si se deben determinar las fuerzas en los elementos *BC*, *GC* y *GF*, la sección *aa* podría ser apropiada. Los diagramas de cuerpo libre de las dos partes se muestran en las figuras 6-15*b* y 6-15*c*. Observe que la línea de acción de cada fuerza del elemento se especifica a partir de la *geometría* de la armadura, ya que la fuerza en un elemento pasa a lo largo de su eje. Además, las fuerzas del elemento que actúan sobre una parte de la armadura son iguales pero opuestas a las que actúan sobre la otra parte —tercera ley de Newton—. Se supone que los elementos *BC* y *GC* están en *tensión* puesto que se encuentran sometidos a un "jalón", mientras que *GF* está en *compresión* porque se encuentra sometido a un "empujón".

Las tres fuerzas de elemento desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$, $\mathbf{F}_{GC}$ y $\mathbf{F}_{GF}$ pueden obtenerse al aplicar las tres ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de la figura 6-15*b*. Sin embargo, si se considera el diagrama de cuerpo libre de la figura 6-15*c*, se tendrán que conocer las tres reacciones de soporte $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ y $\mathbf{E}_x$, porque sólo hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles. (Por supuesto, esto se hace de la manera usual si se considera un diagrama de cuerpo libre de *toda la armadura*).




(a)

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio debemos considerar con gran cuidado las maneras de escribir las ecuaciones de modo que den una *solución directa* para cada una de las incógnitas, en vez de tener que resolver ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, con el segmento de armadura de la figura 6-15*b* y la suma de momentos con respecto a *C*, se obtendría una solución directa para $\mathbf{F}_{GF}$ ya que $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{GC}$ no producen ningún momento con respecto a *C*. De la misma manera, $\mathbf{F}_{BC}$ puede obtenerse directamente a partir de una suma de momentos con respecto a *G*. Por último, $\mathbf{F}_{GC}$ puede encontrarse directamente a partir de una suma de fuerzas en la dirección vertical ya que $\mathbf{F}_{GF}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ no tienen componentes verticales. Esta capacidad de *determinar directamente* la fuerza en un elemento particular de una armadura es una de las ventajas principales del método de secciones.*

Al igual que en el método de nodos, hay dos maneras en que se puede determinar el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida:

- En muchos casos, el sentido correcto de una fuerza de elemento desconocida, puede determinarse "por inspección". Por ejemplo, $\mathbf{F}_{BC}$ es una fuerza de tensión tal como se representa en la figura 6-15*b*, ya que el equilibrio por momentos con respecto a *G* requiere que $\mathbf{F}_{BC}$ genere un momento opuesto al de la fuerza de 1000 N. Además, $\mathbf{F}_{GC}$ es una fuerza de tensión puesto que su componente vertical debe equilibrar la fuerza de 1000 N que actúa hacia abajo. En casos más complicados, el sentido de una fuerza de elemento desconocida puede *suponerse*. Si la solución resulta un escalar *negativo*, esto indica que el sentido de la fuerza es *opuesto* al del diagrama de cuerpo libre.
- *Siempre suponga* que las fuerzas desconocidas en elementos de la sección cortada están *en tensión*, es decir, "jalando" al elemento. Al hacer esto, la solución numérica de las ecuaciones de equilibrio dará *escalares positivos para elementos en tensión y escalares negativos para elementos en compresión*.

*Observe que si se usara el método de nodos para determinar, digamos, la fuerza en el elemento *GC*, sería necesario analizar los nodos *A*, *B* y *G* en secuencia.



Las fuerzas en algunos elementos seleccionados de esta armadura Pratt pueden determinarse por el método de secciones.

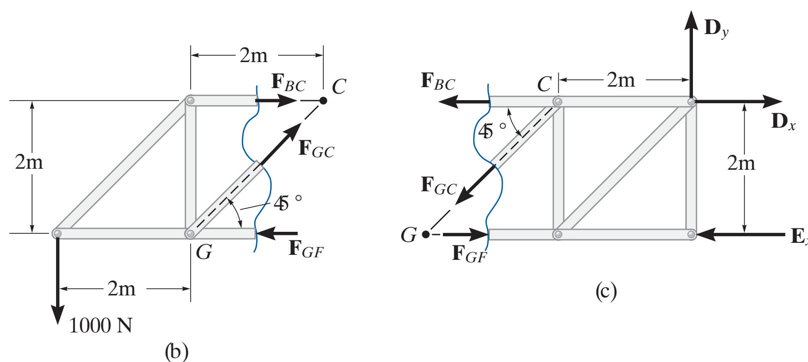



**Fig. 6-15**



En la construcción de grandes grúas suelen usarse armaduras sencillas a fin de reducir el peso de la pluma y la torre.



## Procedimiento para el análisis

Las fuerzas en los elementos de una armadura pueden determinarse mediante el método de secciones por el siguiente procedimiento.

### Diagrama de cuerpo libre.

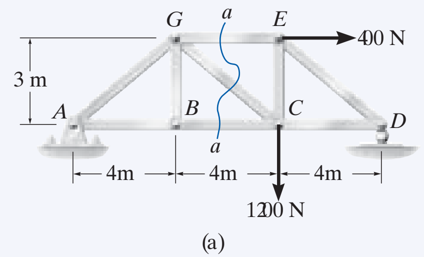
- Tome una decisión acerca de cómo "cortar" o seccionar la armadura a través de los elementos cuyas fuerzas deben determinarse.
- Antes de aislar la sección apropiada, puede requerirse determinar primero las reacciones externas de la armadura. Una vez hecho esto, entonces estarán disponibles las tres ecuaciones de equilibrio para encontrar las fuerzas de los elementos en la sección.
- Trace el diagrama de cuerpo libre del segmento de la armadura seccionada sobre la que actúe el menor número de fuerzas.
- Use uno de los dos métodos descritos antes para establecer el sentido de las fuerzas de elemento desconocidas.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Los momentos deben sumarse con respecto a un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, de manera que la tercera fuerza desconocida se determine directamente a partir de la ecuación de momento.
- Si dos de las fuerzas desconocidas son *paralelas*, las otras fuerzas pueden sumarse en forma *perpendicular* a la dirección de esas incógnitas para determinar *directamente* la tercera fuerza desconocida.

## EJEMPLO 6.5

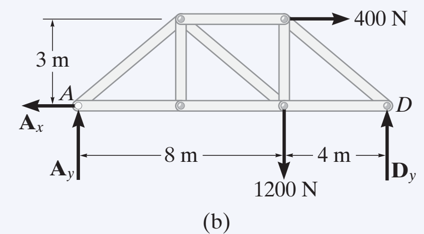
Determine la fuerza en los elementos $GE$, $GC$ y $BC$ de la armadura mostrada en la figura 6-16*a*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



(a)

### SOLUCIÓN

La sección *aa* que se muestra en la figura 6-16*a* ha sido seleccionada porque corta a través de los *tres* elementos cuyas fuerzas deben determinarse. Sin embargo, para usar el método de secciones, es necesario determinar *primero* las reacciones externas en $A$ o en $D$. ¿Por qué? En la figura 6-16*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos



(b)

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 400\text{ N} - A_x = 0 \qquad A_x = 400\text{ N}$$

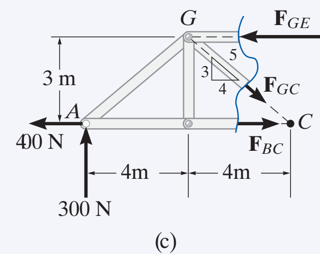
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad -1200\text{ N}(8\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + D_y(12\text{ m}) = 0$$

$$D_y = 900\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - 1200\text{ N} + 900\text{ N} = 0 \qquad A_y = 300\text{ N}$$

**Diagrama de cuerpo libre.** Para el análisis, se usará el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda de la armadura seccionada, ya que implica el menor número de fuerzas, figura 6-16*c*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al sumar momentos con respecto al punto $G$ se eliminan $\mathbf{F}_{GE}$ y $\mathbf{F}_{GC}$ y se obtiene una solución directa para $F_{BC}$.



(c)

**Fig. 6-16**

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \qquad -300\text{ N}(4\text{ m}) - 400\text{ N}(3\text{ m}) + F_{BC}(3\text{ m}) = 0$$

$$F_{BC} = 800\text{ N} \quad (\text{T}) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

De la misma manera, al sumar momentos con respecto al punto $C$ obtenemos una solución directa para $F_{GE}$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -300\text{ N}(8\text{ m}) + F_{GE}(3\text{ m}) = 0$$

$$F_{GE} = 800\text{ N} \quad (\text{C}) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{GE}$ no tienen componentes verticales, al sumar fuerzas en la dirección $y$ obtenemos directamente $F_{GC}$, es decir,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 300\text{ N} - \tfrac{3}{5}F_{GC} = 0$$

$$F_{GC} = 500\text{ N} \quad (\text{T}) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** aquí es posible determinar, por inspección, la dirección apropiada para cada fuerza de elemento desconocida. Por ejemplo, $\Sigma M_C = 0$ requiere que $\mathbf{F}_{GE}$ sea *compresiva* porque debe equilibrar el momento de la fuerza de 300 N con respecto a $C$.

## EJEMPLO 6.6

Determine la fuerza presente en el elemento $CF$ de la armadura mostrada en la figura 6-17$a$. Indique si el elemento está en tensión o en compresión. Suponga que cada elemento está conectado mediante pasadores.

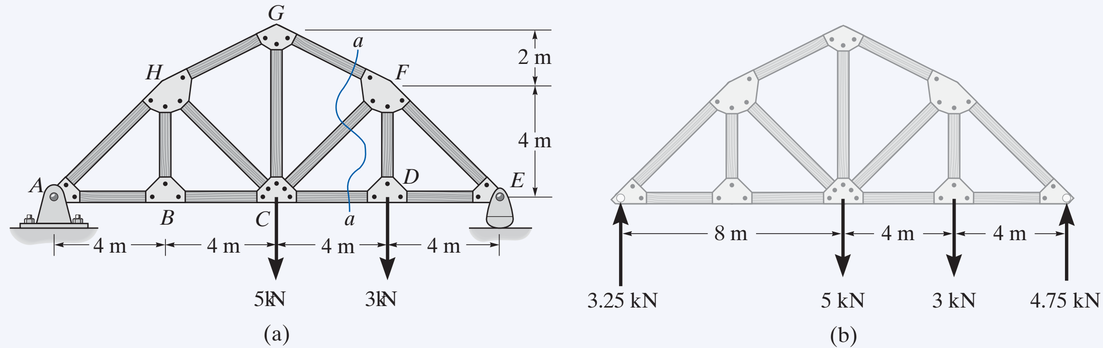
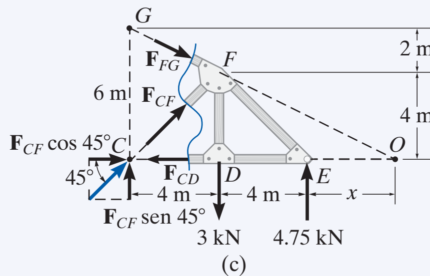



**Fig. 6-17**

6

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Se usará la sección $aa$ que se muestra en la figura 6-17$a$ ya que es la que "expondrá" la fuerza interna en el elemento $CF$ como "externa" en el diagrama de cuerpo libre de la porción derecha o izquierda de la armadura. Sin embargo, primero es necesario determinar las reacciones externas en el lado izquierdo o en el derecho. Verifique los resultados que se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6-17$b$.




En la figura 6-17$c$ se muestra el diagrama de cuerpo libre de la porción derecha de la armadura, que es la más fácil de analizar. Se tienen tres incógnitas, $F_{FG}$, $F_{CF}$ y $F_{CD}$.

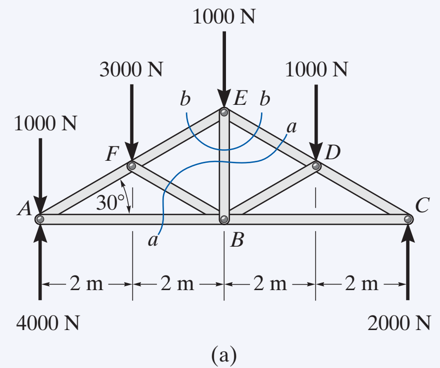
**Ecuaciones de equilibrio.** Aplicaremos la ecuación de momento con respecto al punto $O$ a fin de eliminar las dos incógnitas $F_{FG}$ y $F_{CD}$. La posición del punto $O$ medida desde $E$ puede determinarse por triángulos semejantes, es decir, $4/(4 + x) = 6/(8 + x)$, $x = 4$ m. O, dicho de otra manera, la pendiente del elemento $GF$ tiene una caída de 2 m en una distancia horizontal de 4 m. Como $FD$ es de 4 m, figura 6-17$c$, entonces la distancia desde $D$ hasta $O$ debe ser de 8 m.

Una manera fácil de determinar el momento de $\mathbf{F}_{CF}$ con respecto al punto $O$ es usar el principio de transmisibilidad y trasladar $\mathbf{F}_{CF}$ al punto $C$, y luego descomponer $\mathbf{F}_{CF}$ en sus dos componentes rectangulares. Tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0;$$
$$-F_{CF} \text{ sen } 45°(12 \text{ m}) + (3 \text{ kN})(8 \text{ m}) - (4.75 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$
$$F_{CF} = 0.589 \text{ kN} \quad \text{(C)}$$ ***Resp.***

# EJEMPLO 6.7

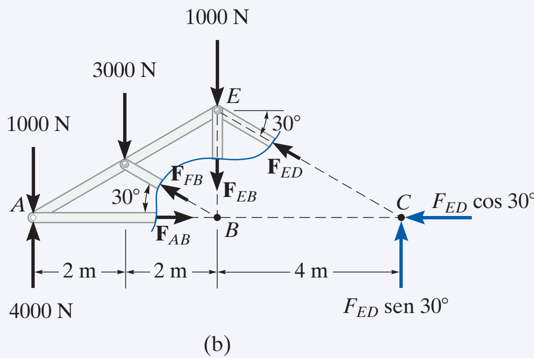
Determine la fuerza en el elemento $EB$ de la armadura de techo mostrada en la figura 6-18$a$. Indique si el elemento está en tensión o en compresión.



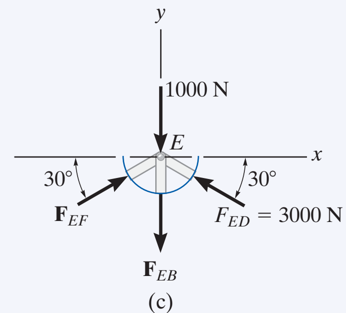
(a)

## SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** Por el método de secciones, cualquier sección vertical imaginaria que corte $EB$, figura 6-18$a$, tendrá que cortar también otros tres elementos cuyas fuerzas son desconocidas. Por ejemplo, la sección $aa$ corta $ED$, $EB$, $FB$ y $AB$. Si se considera un diagrama de cuerpo libre del lado izquierdo de esta sección, figura 6-18$b$, es posible obtener $\mathbf{F}_{ED}$ con la suma de momentos con respecto a $B$ para eliminar las otras tres incógnitas; sin embargo, no se puede determinar $\mathbf{F}_{EB}$ a partir de las dos ecuaciones de equilibrio restantes. Una manera posible de obtener $\mathbf{F}_{ED}$ es determinar primero $\mathbf{F}_{ED}$ a partir de la sección $aa$, y luego usar este resultado en la sección $bb$, figura 6-18$a$, la cual se muestra en la figura 6-18$c$. Aquí el sistema de fuerzas es concurrente y nuestro diagrama de cuerpo libre seccionado es el mismo que el diagrama de cuerpo libre para el nodo ubicado en $E$.



(b)



(c)

**Fig. 6-18**

**Ecuaciones de equilibrio.** Para determinar el momento de $\mathbf{F}_{ED}$ con respecto al punto $B$, figura 6-18$b$, usaremos el principio de transmisibilidad y extenderemos la fuerza hasta el punto $C$ para después descomponerla en sus componentes rectangulares como se muestra. Por lo tanto,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 1000\text{ N}(4\text{ m}) + 3000\text{ N}(2\text{ m}) - 4000\text{ N}(4\text{ m}) + F_{ED}\text{ sen }30^\circ(4\text{ m}) = 0$$

$$F_{ED} = 3000\text{ N} \quad \text{(C)}$$

Al considerar ahora el diagrama de cuerpo libre de la sección $bb$, figura 6-18$c$, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad F_{EF}\cos 30^\circ - 3000\cos 30^\circ\text{ N} = 0$$

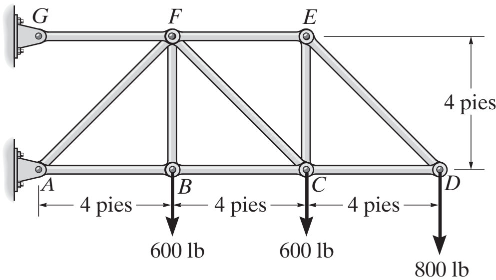
$$F_{EF} = 3000\text{ N} \quad \text{(C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2(3000\text{ sen }30^\circ\text{ N}) - 1000\text{ N} - F_{EB} = 0$$

$$F_{EB} = 2000\text{ N} \quad \text{(T)}$$ ***Resp.***

## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

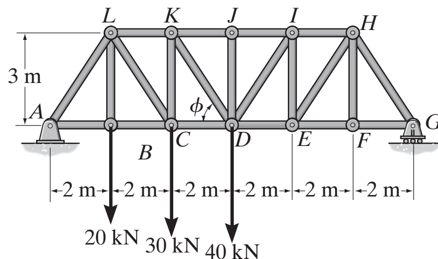
**F6-7.** Determine la fuerza en los elementos *BC*, *CF* y *FE*. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**F6-7**

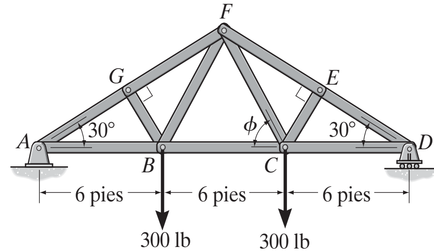
**F6-8.** Determine la fuerza en los elementos *LK*, *KC* y *CD* de la armadura Pratt. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

**F6-9.** Determine la fuerza en los elementos *KJ*, *KD* y *CD* de la armadura Pratt. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



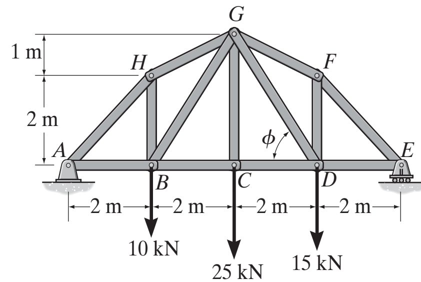

**F6-8/9**

**F6-10.** Determine la fuerza en los elementos *EF*, *CF* y *BC* de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



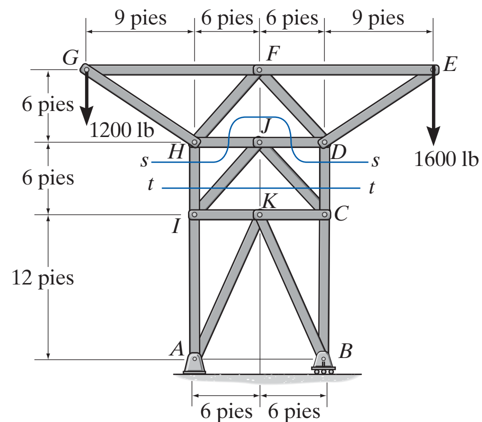

**F6-10**

**F6-11.** Determine la fuerza en los elementos *GF*, *GD* y *CD* de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**F6-11**

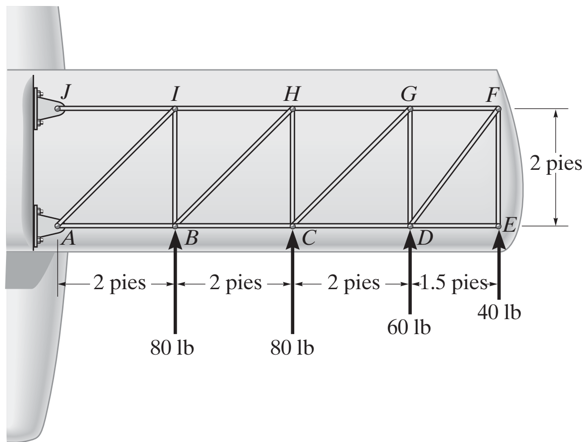
**F6-12.** Determine la fuerza en los elementos *DC*, *HI* y *JI* de la armadura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**F6-12**

## PROBLEMAS

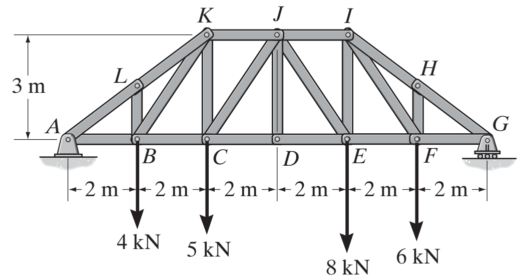
**6-31.** La armadura de arrastre interna para el ala de un avión ligero está sometida a las fuerzas que se muestran. Determine la fuerza en los elementos *BC*, *BH* y *HC*, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-31**

**6-34.** Determine la fuerza en los elementos *JK*, *CJ* y *CD* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

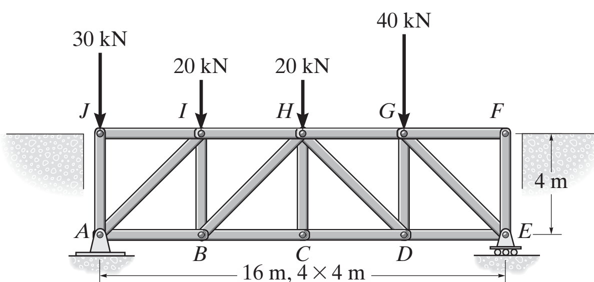
**6-35.** Determine la fuerza en los elementos *HI*, *FI* y *EF* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-34/35**

*__6-32.__ La *armadura Howe para puente* está sometida a las cargas que se muestran. Determine la fuerza en los elementos *HD*, *CD* y *GD*, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

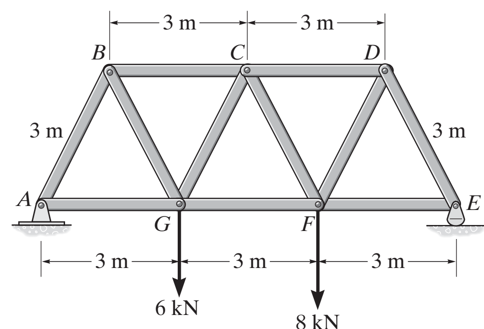
•**6-33.** La *armadura Howe para puente* está sometida a las cargas que se muestran. Determine la fuerza en los elementos *HI*, *HB* y *BC*, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-32/33**

*__6-36.__ Determine la fuerza en los elementos *BC*, *CG* y *GF* de la *armadura Warren*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.

•**6-37.** Determine la fuerza en los elemento *CD*, *CF* y *FG* de la *armadura Warren*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-36/37**

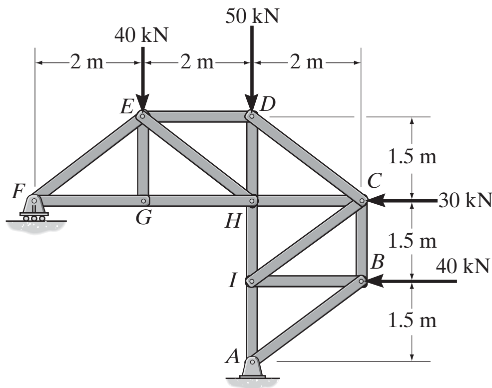
6

**6-38.** Determine la fuerza en los elementos *DC*, *HC* y *HI* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

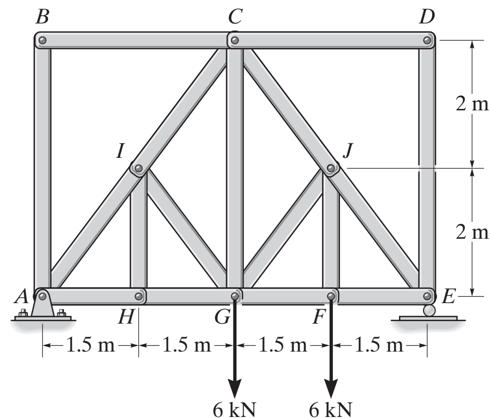
**6-39.** Determine la fuerza en los elemento *ED*, *EH* y *GH* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

**6-42.** Determine la fuerza en los elementos *IC* y *CG* de la armadura, y establezca si estos elementos están en tensión o en compresión. Además, indique todos los elementos de fuerza cero.

**6-43.** Determine la fuerza en los elementos *JE* y *GF* de la armadura, y establezca si estos elementos están en tensión o en compresión. Además, indique todos los elementos de fuerza cero.




Probs. 6-38/39




Probs. 6-42/43

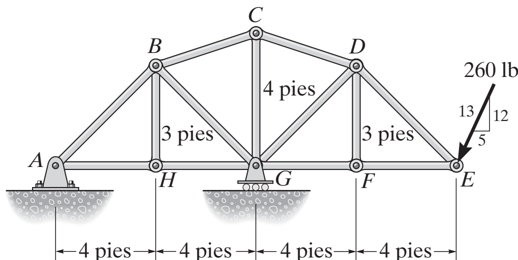
6

*__6-40.__ Determine la fuerza en los elementos *GF*, *GD* y *CD* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

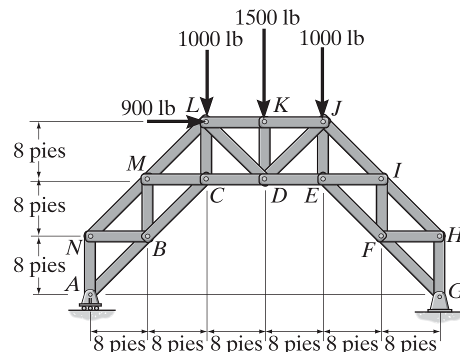
•**6-41.** Determine la fuerza en los elemento *BG*, *BC* y *HG* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

*__6-44.__ Determine la fuerza en los elementos *JI*, *EF*, *EI* y *JE* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

•**6-45.** Determine la fuerza en los elementos *CD*, *LD* y *KL* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



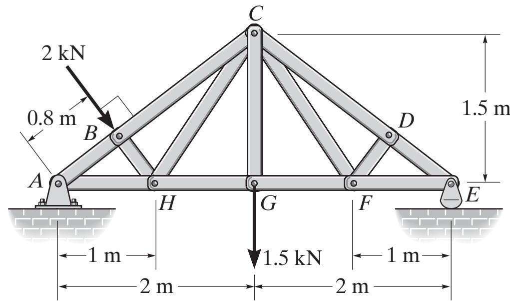

Probs. 6-40/41




Probs. 6-44/45

**6-46.** Determine la fuerza desarrollada en los elementos *BC* y *CH* de la armadura para techo, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

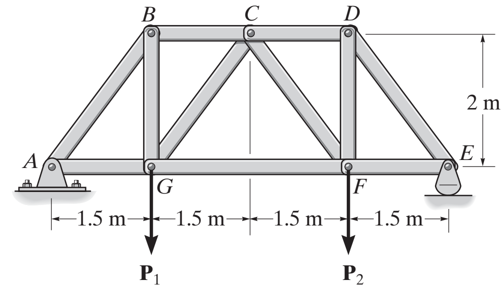
**6-47.** Determine la fuerza en los elementos *CD* y *GF* de la armadura, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Además, indique todos los elementos de fuerza cero.




**Probs. 6-46/47**

**6-50.** Determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 20$ kN, $P_2 = 10$ kN.

**6-51.** Determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $P_1 = 40$ kN, $P_2 = 20$ kN.

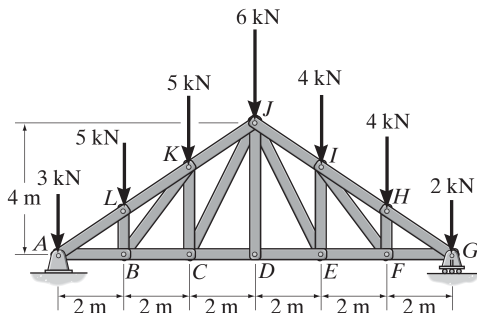



**Probs. 6-50/51**

6

*__6-48.__ Determine la fuerza en los elementos *IJ*, *EJ* y *CD* de la armadura *Howe*, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

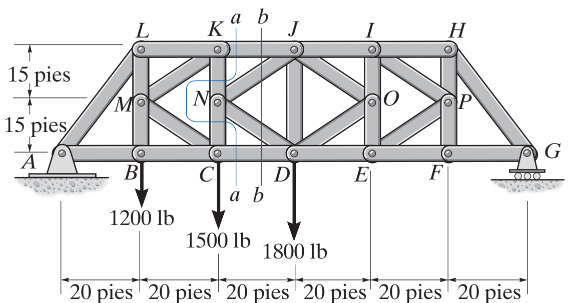
•**6-49.** Determine la fuerza en los elementos *KJ*, *KC* y *BC* de la armadura *Howe*, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-48/49**

*__6-52.__ Determine la fuerza en los elementos *KJ*, *NJ*, *ND* y *CD* de la *armadura K*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión. *Sugerencia:* use las secciones *aa* y *bb*.

•**6-53.** Determine la fuerza en los elementos *JI* y *DE* de la *armadura K*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-52/53**

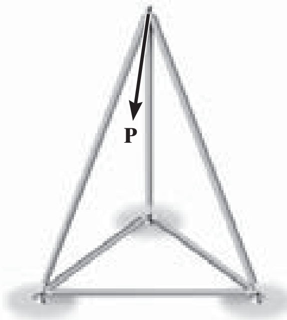



Fig. 6-19

## *6.5 Armaduras espaciales

Una *armadura espacial* consiste en elementos unidos en sus extremos para formar una estructura estable tridimensional. La forma más simple de una armadura espacial es un *tetraedro*, formado al conectar seis elementos entre sí, como se muestra en la figura 6-19. Cualquier elemento adicional agregado a este elemento básico sería redundante en el soporte de la fuerza **P**. Una *armadura espacial simple* puede construirse a partir de este tetraedro básico agregando tres elementos adicionales y un nodo, y continuar de esta manera hasta formar un sistema de tetraedros multiconectados.

**Supuestos para el diseño.** Los elementos de una armadura espacial se pueden tratar como elementos de dos fuerzas siempre que la carga externa esté aplicada en los nodos y éstos consistan en conexiones de rótula esférica. Estos supuestos se justifican cuando las conexiones, soldadas o empernadas, de los elementos unidos se intersecan en un punto común y el peso de los elementos puede ser ignorado. En casos donde debe incluirse el peso de un elemento en el análisis, por lo general resulta satisfactorio aplicarlo como una fuerza vertical, la mitad de su magnitud aplicada en cada extremo del elemento.



Armadura espacial típica para soporte de techo. Observe el uso de rótulas esféricas en las conexiones.

6

### Procedimiento para el análisis

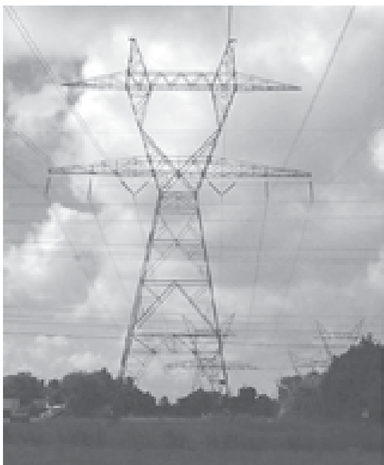
Cuando se desea determinar las fuerzas desarrolladas en los elementos de una armadura espacial simple se puede usar el método de nodos o el método de secciones.

#### Método de nodos.

Si se deben determinar las fuerzas en *todos* los elementos de la armadura, el método de nodos es el más adecuado para realizar el análisis. Aquí es necesario aplicar las tres ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$ a las fuerzas que actúan en cada nodo. Recuerde que la solución de muchas ecuaciones simultáneas puede evitarse si el análisis de fuerzas empieza en un nodo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando mucho tres fuerzas desconocidas. Además, Si la geometría tridimensional del sistema de fuerzas existente en el nodo es difícil de visualizar, se recomienda utilizar un análisis vectorial cartesiano para encontrar la solución.

#### Método de secciones.

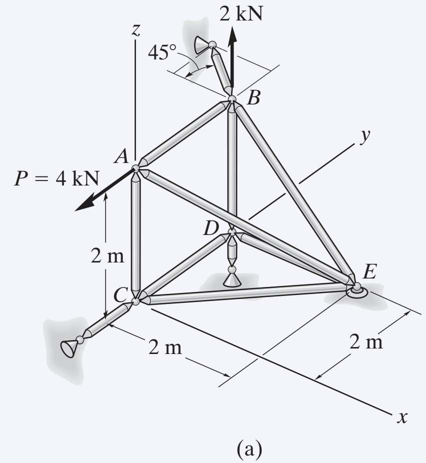
Si se deben determinar sólo unas *pocas* fuerzas de elemento, se puede usar el método de secciones. Cuando se pasa una sección imaginaria por una armadura y ésta queda separada en dos partes, el sistema de fuerzas que actúa sobre una de las partes debe satisfacer las *seis* ecuaciones de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ (ecuaciones 5-6). Por medio de una selección apropiada de la sección y los ejes para sumar fuerzas y momentos, muchas de las fuerzas de elemento desconocidas en una armadura espacial se pueden calcular *directamente*, mediante una sola ecuación de equilibrio.



Por razones económicas, las grandes torres de transmisión eléctrica suelen construirse con armaduras espaciales.

## EJEMPLO 6.8

Determine las fuerzas que actúan en los elementos de la armadura espacial que se muestra en la figura 6-20*a*. Indique si los elementos están en tensión o en compresión.



(a)

### SOLUCIÓN

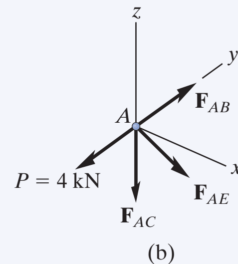
Como hay una fuerza conocida y tres fuerzas desconocidas que actúan en el nodo $A$, el análisis de fuerzas de esta armadura comenzará en este nodo.

**Nodo *A*.** (Figura 6-20*b*). Si expresamos cada fuerza que actúa en el diagrama de cuerpo libre del nodo $A$ como un vector cartesiano, tenemos

$$\mathbf{P} = \{-4\mathbf{j}\} \text{ kN}, \qquad \mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_{AC} = -F_{AC}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_{AE} = F_{AE}\left(\frac{\mathbf{r}_{AE}}{r_{AE}}\right) = F_{AE}(0.577\mathbf{i} + 0.577\mathbf{j} - 0.577\mathbf{k})$$

Por equilibrio,



(b)

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{P} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AE} = \mathbf{0}$$

$$-4\mathbf{j} + F_{AB}\mathbf{j} - F_{AC}\mathbf{k} + 0.577F_{AE}\mathbf{i} + 0.577F_{AE}\mathbf{j} - 0.577F_{AE}\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0; \qquad 0.577F_{AE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -4 + F_{AB} + 0.577F_{AE} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad -F_{AC} - 0.577F_{AE} = 0$$

$$F_{AC} = F_{AE} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_{AB} = 4 \text{ kN} \quad (\text{T}) \qquad \textit{Resp.}$$

Como $F_{AB}$ es conocida, a continuación se puede analizar el nodo $B$.

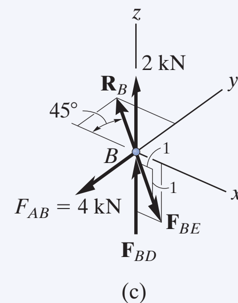
**Nodo *B*.** (Figura 6-20*c*).

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -R_B \cos 45° + 0.707F_{BE} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -4 + R_B \text{ sen } 45° = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad 2 + F_{BD} - 0.707F_{BE} = 0$$

$$R_B = F_{BE} = 5.66 \text{ kN} \quad (\text{T}), \qquad F_{BD} = 2 \text{ kN} \quad (\text{C}) \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

**Fig. 6-20**

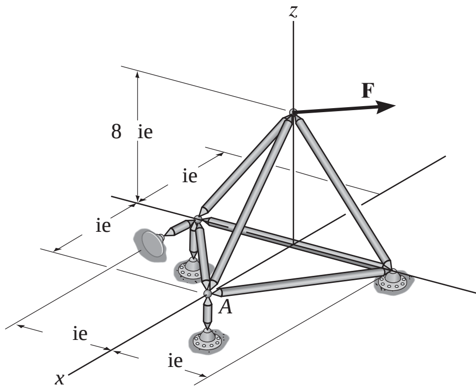
Las ecuaciones *escalares* de equilibrio también pueden aplicarse directamente a sistemas de fuerzas que actúan en los diagramas de cuerpo libre de los nodos $D$ y $C$, ya que las componentes de fuerzas se determinan con facilidad. Demuestre que

$$F_{DE} = F_{DC} = F_{CE} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

## PROBLEMAS

**6-54.** La armadura espacial soporta una fuerza **F** = {−500**i** + 600**j** + 400**k**} lb. Determine la fuerza en cada elemento y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

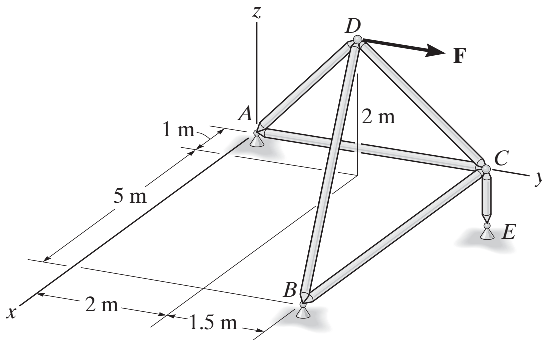
**6-55.** La armadura espacial soporta una fuerza **F** = {600**i** + 450**j** − 750**k**} lb. Determine la fuerza en cada elemento y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-54/55**

*__6-56.__ Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por rótulas esféricas en *A*, *B* y *E*. Considere **F** = {800**j**} N. *Sugerencia:* la reacción en el soporte *E* actúa a lo largo del elemento *EC*. ¿Por qué?

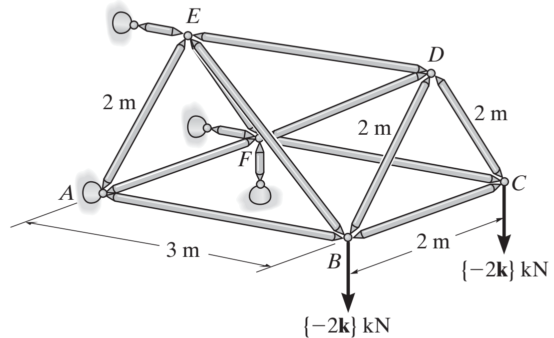
•**6-57.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por rótulas esféricas en *A*, *B* y *E*. Considere **F** = {−200**i** + 400**j**} N. *Sugerencia:* la reacción en el soporte *E* actúa a lo largo del elemento *EC*. ¿Por qué?




**Probs. 6-56/57**

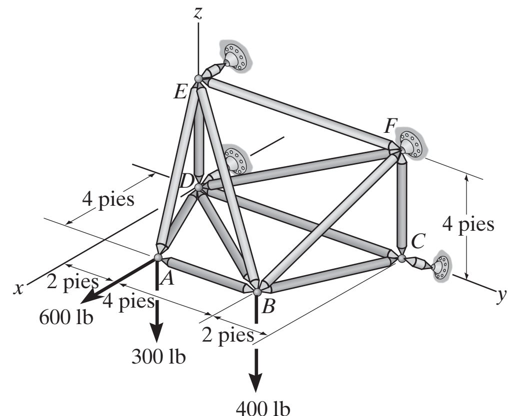
**6-58.** Determine la fuerza en los elementos *BE*, *DF* y *BC* de la armadura espacial, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

**6-59.** Determine la fuerza en los elementos *AB*, *CD*, *ED* y *CF* de la armadura espacial, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



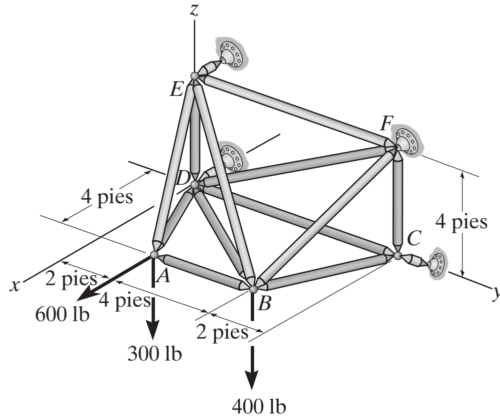

**Probs. 6-58/59**

*__6-60.__ Determine la fuerza en los elementos *AB*, *AE*, *BC*, *BF*, *BD* y *BE* de la armadura espacial, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-60**

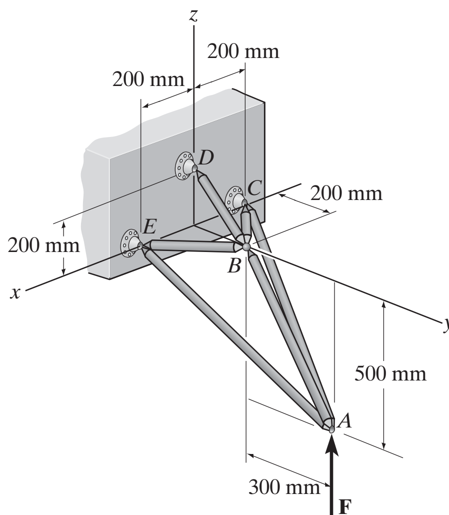
**•6-61.** Determine la fuerza en los elementos *EF*, *DF*, *CF* y *CD* de la armadura espacial, y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-61**

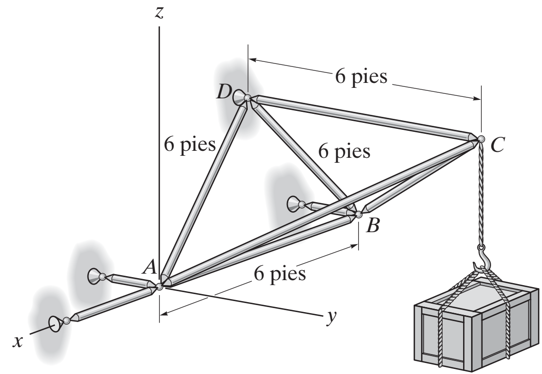
**6-62.** Si la armadura soporta una fuerza de $F = 200$ N, determine la fuerza en cada elemento y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

**6-63.** Si cada elemento de la armadura espacial puede soportar una fuerza máxima de 600 N en compresión y 800 N en tensión, determine la fuerza máxima *F* que puede soportar la armadura.




**Probs. 6-62/63**

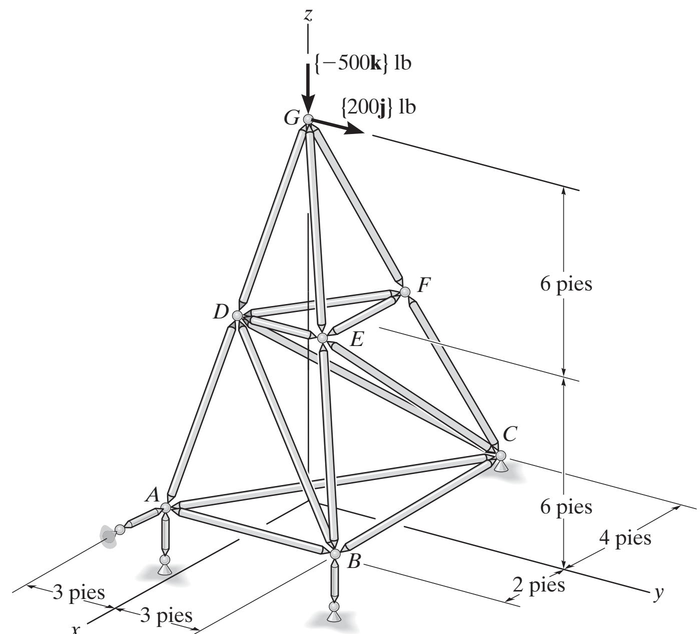
*__6-64.__ Determine la fuerza desarrollada en cada elemento de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. La caja tiene un peso de 150 lb.




**Prob. 6-64**

**•6-65.** Determine la fuerza en los elementos *FE* y *ED* de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. La armadura está soportada por una unión de rótula esférica en *C* y eslabones cortos en *A* y *B*.

**6-66.** Determine la fuerza en los elementos *GD*, *GE* y *FD* de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Probs. 6-65/66**

6

## 6.6 Bastidores y máquinas

Los bastidores y las máquinas son dos tipos comunes de estructuras que a menudo están compuestas por *elementos de varias fuerzas* conectados mediante pasadores, es decir, elementos que están sometidos a más de dos fuerzas. Los *bastidores* se usan para soportar cargas, mientras que las *máquinas* contienen partes móviles y están diseñadas para transmitir y modificar el efecto de las fuerzas. Siempre que un bastidor o una máquina no contengan más soportes o elementos que los necesarios para evitar el colapso, las fuerzas que actúan en las uniones y soportes pueden determinarse si se aplican las ecuaciones de equilibrio a cada uno de sus elementos. Una vez obtenidas las fuerzas en las uniones, es posible *diseñar* el tamaño de los elementos, conexiones y soportes al aplicar la teoría de la mecánica de materiales y un código de diseño de ingeniería adecuado.



Esta enorme grúa es un ejemplo típico de un bastidor.

**Diagramas de cuerpo libre.** Para determinar las fuerzas que actúan en las uniones y soportes de un bastidor o de una máquina, la estructura debe desensamblarse y se deben trazar los diagramas de cuerpo libre de sus partes. Es *necesario* cumplir con los siguientes puntos importantes:

6

- Aísle cada parte con la *delineación de su contorno*. Después muestre todas las fuerzas y/o los momentos de par que actúan sobre la parte. Asegúrese de *marcar* o *identificar* cada fuerza y momento de par conocido o desconocido con referencia a un sistema coordenado $x$, $y$ establecido. También indique cualesquier dimensiones empleadas para tomar momentos. Las ecuaciones de equilibrio suelen ser más fáciles de aplicar si las fuerzas están representadas por sus componentes rectangulares. Como es usual, se puede suponer el sentido de una fuerza o de un momento de par desconocido.
- Identifique todos los elementos de dos fuerzas existentes en la estructura y represente sus diagramas de cuerpo libre con dos fuerzas iguales colineales pero opuestas en sus puntos de aplicación. (Vea la sección 5.4). Si reconocemos los elementos de dos fuerzas, podemos evitar la resolución de un número innecesario de ecuaciones de equilibrio.
- Las fuerzas comunes a dos elementos cualesquiera en *contacto* actúan con magnitudes iguales pero con sentidos opuestos sobre los elementos respectivos. Si los dos elementos se tratan como un *"sistema" de elementos conectados*, entonces esas fuerzas son *"internas"* y *no se muestran* en el *diagrama de cuerpo libre del sistema*; sin embargo, si se traza el diagrama de cuerpo libre de *cada elemento*, las fuerzas son *"externas"* y *deben* mostrarse en cada uno de los diagramas de cuerpo libre.

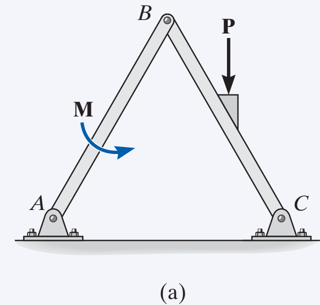


Algunas herramientas comunes, como estas pinzas, actúan como máquinas simples. Aquí, la fuerza aplicada sobre los mangos crea una fuerza más grande en las quijadas.

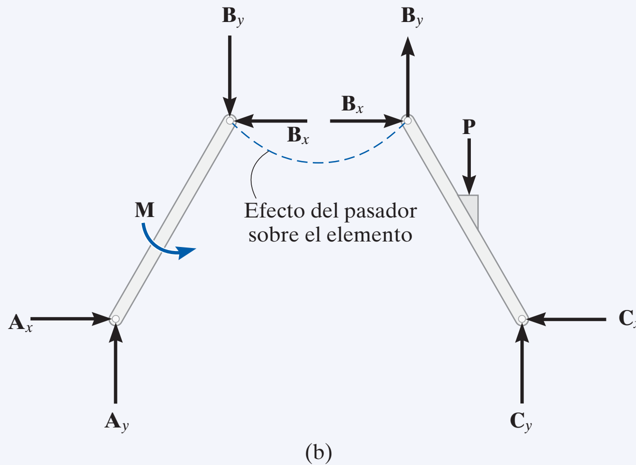
Los siguientes ejemplos ilustran gráficamente la manera de trazar los diagramas de cuerpo libre de un bastidor o de una máquina desmembrados. En todos los casos se ignora el peso de los elementos.

# EJEMPLO 6.9

Para el bastidor de la figura 6-21*a*, trace el diagrama de cuerpo libre de (*a*) cada elemento, (*b*) el pasador situado en *B*, y (*c*) los dos elementos conectados entre sí.

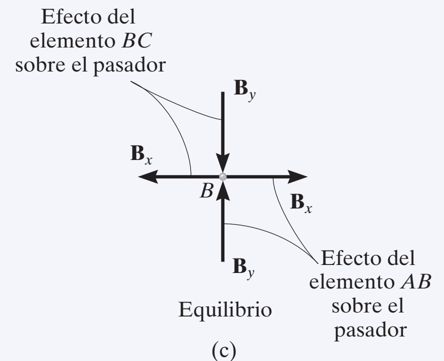


(a)



(b)

## SOLUCIÓN

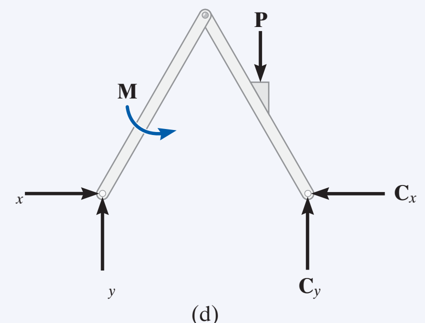


(c)

**Parte (a).** Por inspección, los elementos *BA* y *BC* *no* son elementos de dos fuerzas. En vez de eso, como se muestra en los diagramas de cuerpo libre, figura 6-21*b*, el elemento *BC* está sometido a una fuerza desde los pasadores en *B* y *C* y a la fuerza externa **P**. De la misma manera, *AB* está sometido a las fuerzas resultantes desde los pasadores en *A* y *B* y al momento de par externo **M**. Las fuerzas de pasador están representadas por sus componentes *x* y *y*.

**Parte (b).** El pasador en *B* está sometido a sólo *dos fuerzas*, es decir, a la fuerza del elemento *BC* y a la del elemento *AB*. Por *equilibrio*, estas fuerzas o sus respectivas componentes deben ser iguales pero opuestas, figura 6-21*c*. Observe atentamente cómo se aplica la tercera ley de Newton entre el pasador y sus elementos conectados, es decir, el efecto del pasador sobre los dos elementos, figura 6-21*b*, y el efecto igual pero opuesto de los dos elementos sobre el pasador, figura 6-21*c*.

**Parte (c).** El diagrama de cuerpo libre de los dos elementos conectados entre sí, pero retirados de los pasadores de soporte en *A* y *C*, se muestra en la figura 6-21*d*. Las componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$ *no se muestran* en este diagrama ya que son fuerzas *internas* (figura 6-21*b*), y por lo tanto se cancelan. Además, para ser consistentes cuando apliquemos las ecuaciones de equilibrio, las componentes desconocidas de fuerza en *A* y *C* deben actuar en el *mismo sentido* que las de la figura 6-21*b*.



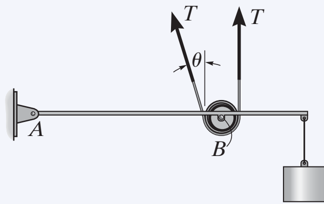
(d)

**Fig. 6-21**

6

## EJEMPLO 6.10

En la banda transportadora se mantiene una tensión constante con el dispositivo que se muestra en la figura 6-22*a*. Trace los diagramas de cuerpo libre del bastidor y del cilindro que rodea la banda. El bloque suspendido tiene un peso de $W$.

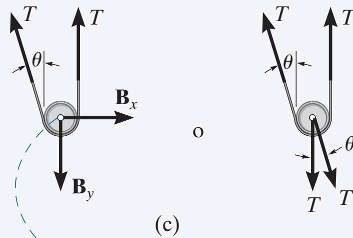



(b)

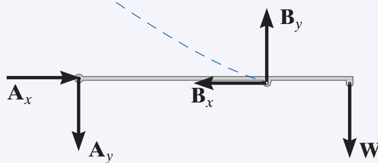


(a)

**Fig. 6-22**




(c)



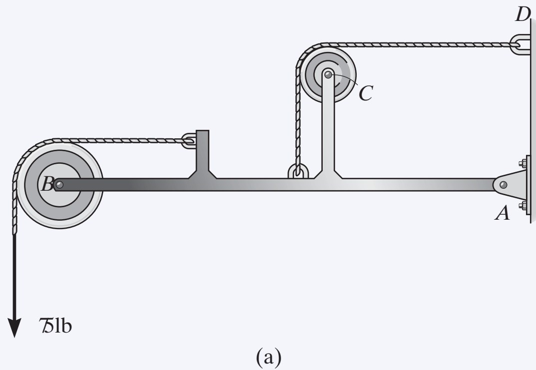

(d)

### SOLUCIÓN

El modelo idealizado del dispositivo se muestra en la figura 6-22*b*. Aquí se supone que el ángulo $\theta$ es conocido. A partir de este modelo, los diagramas de cuerpo libre del bastidor y del cilindro se muestran en las figuras 6-22*c* y 6-22*d*, respectivamente. Observe que la fuerza que ejerce el pasador situado en $B$ sobre el cilindro puede representarse por cualquiera de sus componentes horizontal y vertical $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$, las cuales pueden determinarse mediante las ecuaciones de equilibrio de fuerzas aplicadas al cilindro, o por las dos componentes $T$, que proporcionan momentos de par iguales pero opuestos sobre el cilindro e impiden así que gire. Además observe que una vez determinadas las reacciones del pasador en $A$, la mitad de sus valores actúan a cada lado del bastidor ya que se tienen conexiones de pasador en cada lado, figura 6-22*a*.

## EJEMPLO 6.11

Para el bastidor que se muestra en la figura 6-23*a*, trace los diagramas de cuerpo libre de (*a*) todo el bastidor, incluyendo poleas y cuerdas, (*b*) el bastidor sin poleas ni cuerdas y (*c*) cada una de las poleas.



(a)

### SOLUCIÓN

**Parte (a).** Cuando se considera todo el bastidor, incluidas las poleas y las cuerdas, las interacciones en los puntos donde poleas y cuerdas están conectadas al bastidor se vuelven pares de fuerzas *internas* que se cancelan entre sí, y por tanto no se muestran sobre el diagrama de cuerpo libre, figura 6-23*b*.

**Parte (b).** Cuando se retiren las cuerdas y las poleas, deben mostrarse sus efectos *sobre el bastidor*, figura 6-23*c*.

**Parte (c).** Las componentes de fuerza $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{C}_y$ de los pasadores sobre las poleas, figura 6-23*d*, son iguales pero opuestas a las componentes de fuerza ejercidas por los pasadores sobre el bastidor, figura 6-23*c*. ¿Por qué?

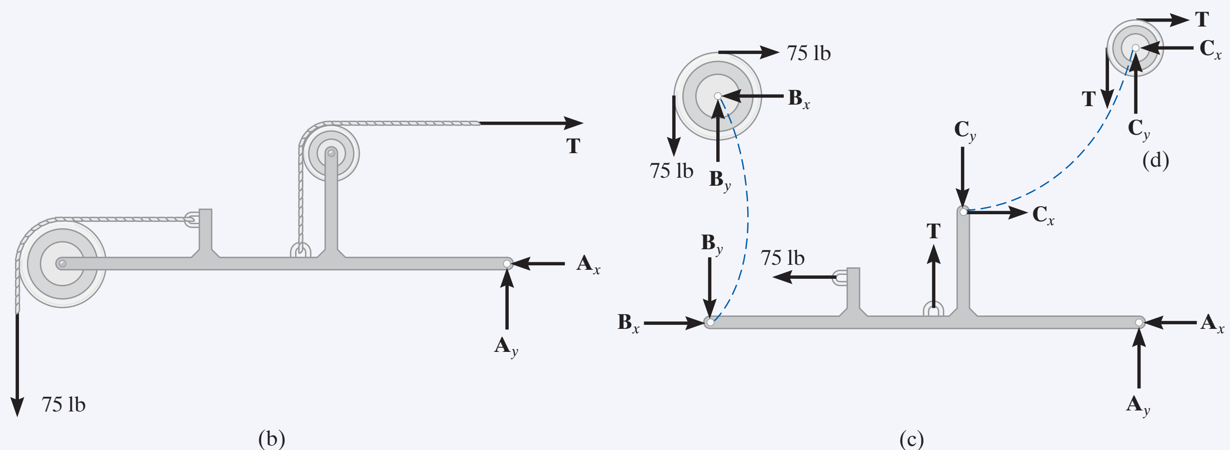



**Fig. 6-23**

6

## EJEMPLO 6.12



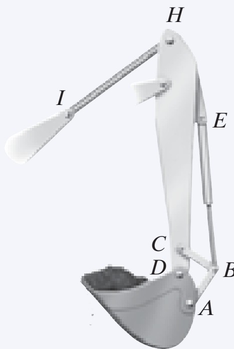
(a)

**Fig. 6-24**

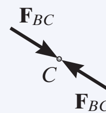
Trace los diagramas de cuerpo libre del cucharón y del pescante vertical de la retroexcavadora que se muestra en la fotografía, figura 6-24*a*. El cucharón y su contenido tienen un peso *W*. Ignore el peso de los elementos.

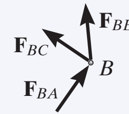
### SOLUCIÓN

En la figura 6-24*b* se muestra el modelo idealizado del ensamble. Por inspección, los elementos *AB*, *BC*, *BE* y *HI* son todos elementos de dos fuerzas, ya que están conectados por pasadores en sus puntos extremos y ninguna otra fuerza actúa sobre ellos. Los diagramas de cuerpo libre del cucharón y del pescante se muestran en la figura 6-24*c*. Observe que el pasador *C* está sometido a sólo dos fuerzas, mientras que el pasador en *B* está sometido a tres fuerzas, figura 6-24*d*. Estas tres fuerzas están relacionadas por las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas aplicadas a cada pasador. En la figura 6-24*e* se muestra el diagrama de cuerpo libre de todo el ensamble.

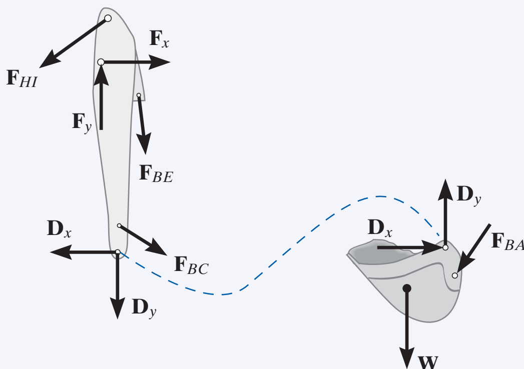



(b)

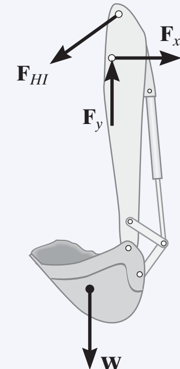



(d)




(c)




(e)

# EJEMPLO 6.13

Trace el diagrama de cuerpo libre de cada parte del mecanismo de pistón liso y eslabón que se utiliza para aplastar latas recicladas, el cual se muestra en la figura 6-25*a*.

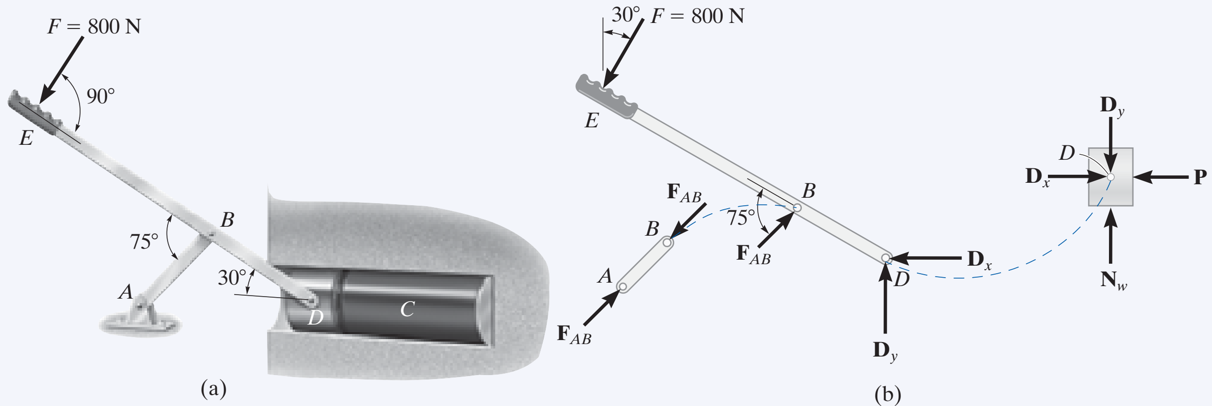
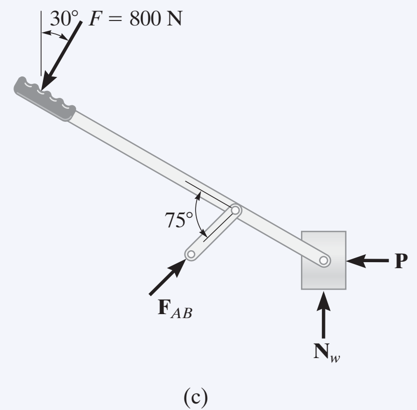



**Fig. 6-25**

## SOLUCIÓN

Por inspección, el elemento $AB$ es un elemento de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre de las partes se muestran en la figura 6-25*b*. Como los pasadores en $B$ y $D$ *conectan sólo dos partes entre sí*, las fuerzas se muestran como iguales pero opuestas en los diagramas de cuerpo libre separados de sus elementos conectados. En particular, sobre el pistón actúan cuatro componentes de fuerza: $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$ representan el efecto del pasador (o palanca $EBD$), $\mathbf{N}_w$ es la *fuerza resultante* del soporte y $\mathbf{P}$ es la fuerza resultante de compresión causada por la lata $C$.

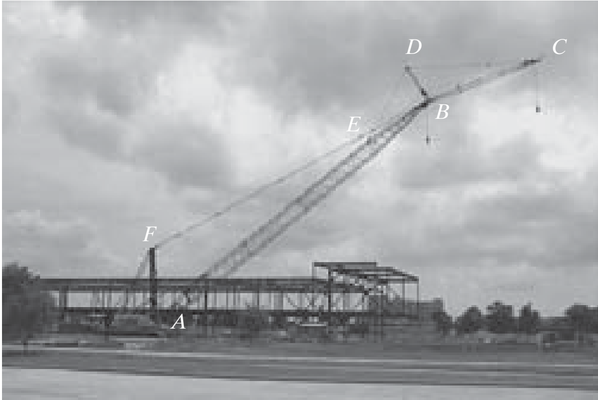
**NOTA:** en la figura 6-25*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre de todo el ensamble. Aquí las fuerzas entre las componentes son internas y no se muestran en el diagrama de cuerpo libre.




*Antes de seguir adelante, se recomienda cubrir las soluciones de los ejemplos previos y tratar de trazar los diagramas de cuerpo libre requeridos. Cuando lo haga, asegúrese de que el trabajo sea ordenado, y que todas las fuerzas y momentos de par estén marcados apropiadamente. Al terminar establezca un desafío para resolver los siguientes cuatro problemas.*

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**P6-1.** Trace los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los segmentos *AB*, *BC* y *BD* de la pluma de la grúa. Sólo son significativos los pesos de *AB* y *BC*. Suponga que *A* y *B* son pasadores.



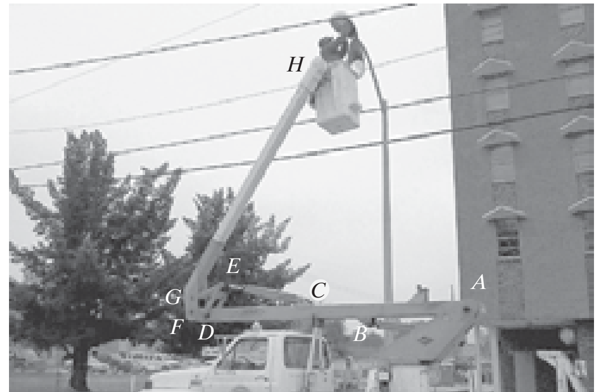

**P6-1**

**P6-2.** Trace los diagramas de cuerpo libre del pescante *ABCD* y del brazo *EDFGH* de la retroexcavadora. Los pesos de estos dos elementos son significativos. Ignore los pesos de todos los demás elementos y suponga que todos los puntos de conexión indicados son pasadores.



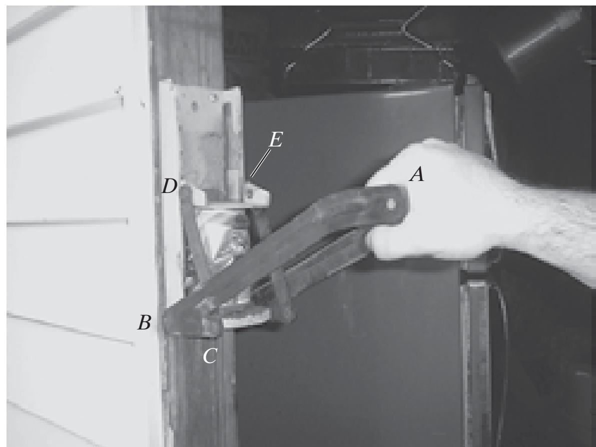

**P6-2**

**P6-3.** Trace los diagramas de cuerpo libre del pescante *ABCDF* y del brazo *FGH* del receptáculo levadizo. Desprecie los pesos de los elementos. El receptáculo pesa *W*. Los elementos de dos fuerzas son *BI*, *CE*, *DE* y *GE*. Suponga que todos los puntos de conexión indicados son pasadores.




**P6-3**

**P6-4.** Para operar el aplastador de latas es necesario empujar hacia abajo el brazo de palanca *ABC*, el cual gira alrededor del pasador fijo en *B*. Esto mueve los eslabones laterales *CD* hacia abajo, lo que ocasiona que la placa guía *E* también se mueva hacia abajo, y por lo tanto aplaste la lata. Trace los diagramas de cuerpo libre de la palanca, el eslabón lateral y la placa guía. Establezca algunas cifras razonables y haga un análisis de equilibrio para mostrar cuánto se magnifica una fuerza vertical aplicada en el mango al transmitirla a la lata. Suponga que todos los puntos de conexión son pasadores y que las guías para la placa son lisas.




**P6-4**

6

## Procedimiento para el análisis

Las reacciones en las uniones de bastidores o máquinas (estructuras) compuestos de elementos de varias fuerzas pueden determinarse por el siguiente procedimiento.

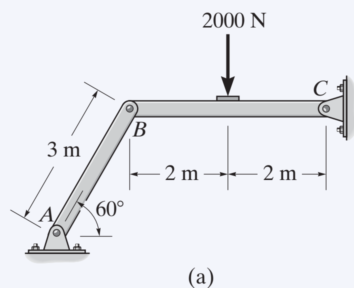
### Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor o toda la máquina, de una porción de éste o ésta, o de cada uno de sus elementos. La selección debe hacerse para que conduzca a la solución más directa del problema.
- Cuando se traza el diagrama de cuerpo libre de un grupo de elementos de una estructura, las fuerzas entre las partes conectadas de este grupo son fuerzas internas y no se muestran en el diagrama de cuerpo libre del grupo.
- Las fuerzas comunes a dos miembros que están en contacto actúan con igual magnitud pero con sentido opuesto en los respectivos diagramas de cuerpo libre de los elementos.
- Los elementos de dos fuerzas, sin importar su forma, tienen fuerzas iguales pero opuestas que actúan colinealmente en los extremos del elemento.
- En muchos casos es posible decir por inspección el sentido apropiado de las fuerzas desconocidas que actúan sobre un elemento; sin embargo, si esto parece difícil de lograr, el sentido se puede suponer.
- Recuerde que un momento de par es un vector libre y puede actuar en cualquier punto en el diagrama de cuerpo libre. Además, una fuerza es un vector deslizante y puede actuar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Cuente el número de incógnitas y compárelo con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles. En dos dimensiones, hay tres ecuaciones de equilibrio que pueden escribirse para cada elemento.
- Sume momentos con respecto a un punto que se encuentre en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como sea posible.
- Si se encuentra que la solución de la magnitud de una fuerza o momento de par es negativa, esto significa que el sentido de la fuerza es inverso del que se muestra en los diagramas de cuerpo libre.

## EJEMPLO 6.14




(a)

Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el pasador ubicado en $C$ ejerce sobre el elemento $BC$ del bastidor de la figura 6-26*a*.

### SOLUCIÓN I

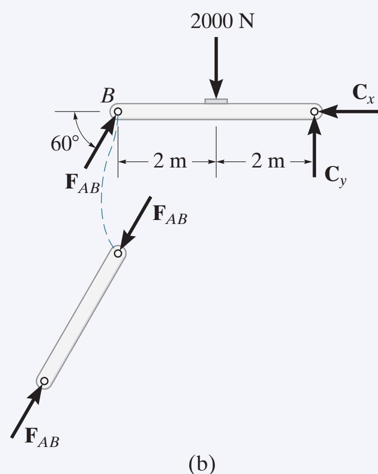
**Diagramas de cuerpo libre.** Por inspección puede verse que $AB$ es un elemento de dos fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6-26*b*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las *tres incógnitas* pueden determinarse aplicando las tres ecuaciones de equilibrio al elemento $CB$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;\ 2000\text{ N}(2\text{ m}) - (F_{AB}\text{ sen }60°)(4\text{ m}) = 0\quad F_{AB} = 1154.7\text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\ 1154.7\cos 60°\text{ N} - C_x = 0\qquad C_x = 577\text{ N}\qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 1154.7\text{ sen }60°\text{ N} - 2000\text{ N} + C_y = 0\quad C_y = 1000\text{ N}\qquad \textit{Resp.}$$




(b)

### SOLUCIÓN II

**Diagramas de cuerpo libre.** Si no se reconoce que $AB$ es un elemento de dos fuerzas, entonces la resolución de este problema implica más trabajo. Los diagramas de cuerpo libre se muestran en la figura 6-26*c*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las *seis incógnitas* se determinan al aplicar las tres ecuaciones de equilibrio a cada uno de los elementos.

*Elemento AB*

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad B_x(3\text{ sen }60°\text{ m}) - B_y(3\cos 60°\text{ m}) = 0 \qquad (1)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - B_x = 0 \qquad (2)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - B_y = 0 \qquad (3)$$

*Elemento BC*

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;\quad 2000\text{ N}(2\text{ m}) - B_y(4\text{ m}) = 0 \qquad (4)$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad B_x - C_x = 0 \qquad (5)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad B_y - 2000\text{ N} + C_y = 0 \qquad (6)$$

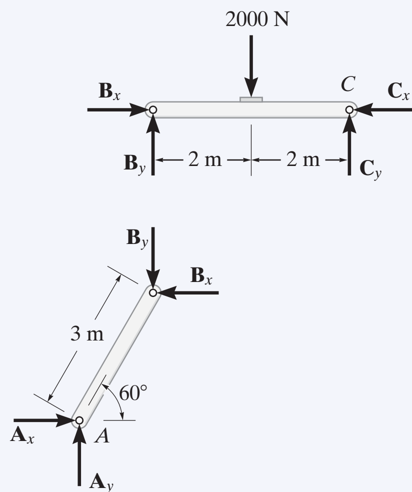
Los resultados para $C_x$ y $C_y$ pueden determinarse al resolver estas ecuaciones en la secuencia siguiente: 4, 1, 5, y luego 6. Los resultados son

$$B_y = 1000\text{ N}$$

$$B_x = 577\text{ N}$$

$$C_x = 577\text{ N}\qquad \textit{Resp.}$$

$$C_y = 1000\text{ N}\qquad \textit{Resp.}$$




(c)

**Fig. 6-26**

Por comparación, la solución I es la más sencilla puesto que el requisito de que en la figura 6-26*b* $F_{AB}$ sea igual, opuesta y colineal en los extremos del elemento $AB$, automáticamente satisface las ecuaciones 1, 2 y 3 anteriores, y por lo tanto elimina la necesidad de escribir esas ecuaciones. *En consecuencia, ahorre algún tiempo y esfuerzo al identificar siempre los elementos de dos fuerzas antes de comenzar el análisis.*

## EJEMPLO 6.15

La viga compuesta que se muestra en la figura 6-27*a* está conectada mediante un pasador en *B*. Determine las componentes de la reacción en sus soportes. Pase por alto su peso y espesor.

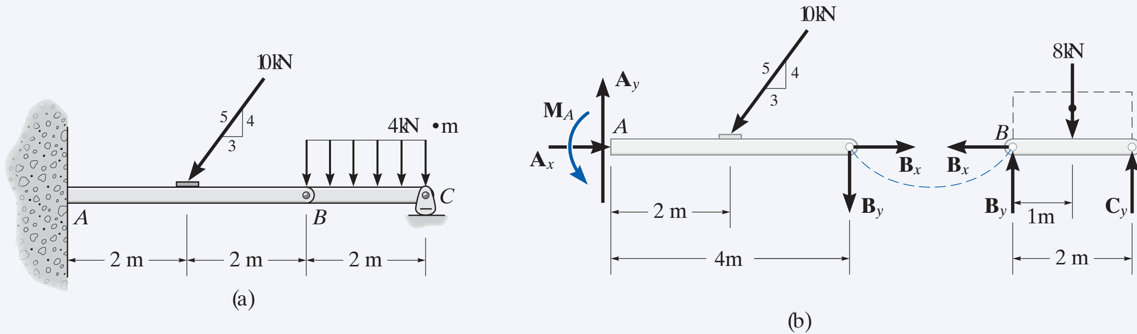



**Fig. 6-27**

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** Por inspección, si consideramos un diagrama de cuerpo libre de *toda la viga ABC*, habrá tres reacciones desconocidas en *A* y una en *C*. Esas cuatro incógnitas no pueden obtenerse con las tres ecuaciones de equilibrio, por lo que será necesario desmembrar la viga en sus dos segmentos, como se muestra en la figura 6-27*b*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las seis incógnitas se determinan de la siguiente manera:

*Segmento BC*

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad B_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \qquad -8\text{ kN}(1\text{ m}) + C_y(2\text{ m}) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad B_y - 8\text{ kN} + C_y = 0$$

*Segmento AB*

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - (10\text{ kN})\left(\tfrac{3}{5}\right) + B_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad M_A - (10\text{ kN})\left(\tfrac{4}{5}\right)(2\text{ m}) - B_y(4\text{ m}) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad A_y - (10\text{ kN})\left(\tfrac{4}{5}\right) - B_y = 0$$

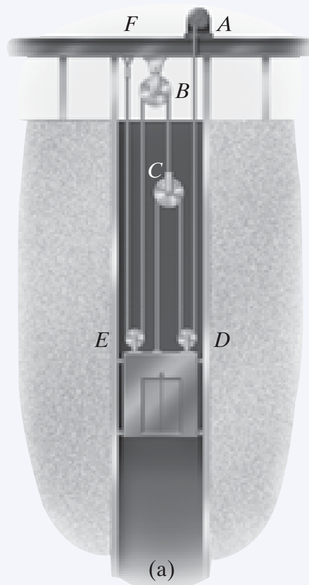
Al resolver sucesivamente cada una de estas ecuaciones, con resultados calculados anteriormente, obtenemos

$A_x = 6\text{ kN}$ $\quad A_y = 12\text{ kN}$ $\quad M_A = 32\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

$B_x = 0$ $\quad B_y = 4\text{ kN}$

$C_y = 4\text{ kN}$ ***Resp.***

## EJEMPLO 6.16




El carro elevador de 500 kg de la figura 6-28*a* se eleva mediante el motor *A* por el sistema de poleas que se muestra. Si el carro viaja con una velocidad constante, determine la fuerza desarrollada en los dos cables. Ignore la masa del cable y las poleas.

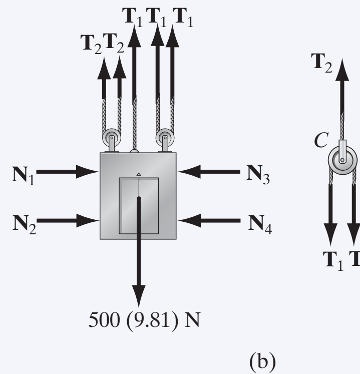



**Fig. 6-28**



### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Podemos resolver este problema mediante los diagramas de cuerpo libre del carro elevador y la polea *C*, figura 6-28*b*. Las fuerzas de tensión desarrolladas en los cables se denotan como $T_1$ y $T_2$.

**Ecuaciones de equilibrio.** Para la polea *C*,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_2 - 2T_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad T_2 = 2T_1 \qquad (1)$$

Para el carro elevador,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 3T_1 + 2T_2 - 500(9.81)\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Al sustituir la ecuación (1) en la ecuación (2) se obtiene

$$3T_1 + 2(2T_1) - 500(9.81)\text{ N} = 0$$

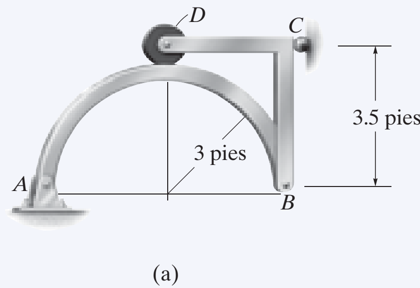
$$T_1 = 700.71\text{ N} = 701\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (1),

$$T_2 = 2(700.71)\text{ N} = 1401\text{ N} = 1.40\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 6.17

El disco liso mostrado en la figura 6-29*a* está articulado en *D* y tiene un peso de 20 lb. Ignore los pesos de los otros elementos, determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores *B* y *D*.




(a)

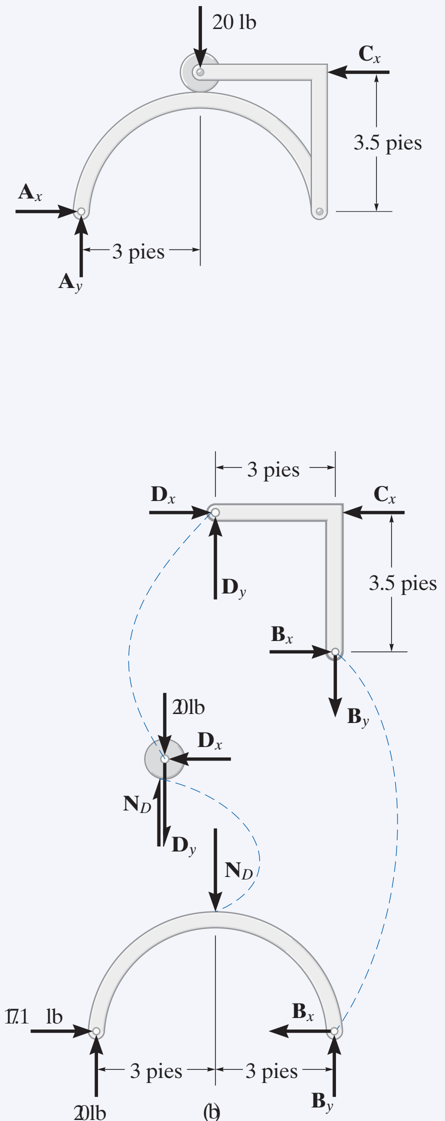



**Fig. 6-29**

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** En la figura 6-29*b* se muestran los diagramas de cuerpo libre de todo el bastidor y cada uno de sus elementos.

**Ecuaciones de equilibrio.** Por supuesto, las ocho incógnitas pueden obtenerse si se aplican las ocho ecuaciones de equilibrio a cada elemento, tres al elemento *AB*, tres al elemento *BCD*, y dos al disco. (El equilibrio por momento se satisface de manera automática para el disco). Sin embargo, si se hace esto, todos los resultados pueden obtenerse sólo a partir de una solución simultánea de algunas de las ecuaciones. (Inténtelo y encuéntrelos). Para evitar esta situación, es mejor determinar primero las tres reacciones en los soportes sobre el bastidor *completo*; luego, con esos resultados, pueden aplicarse las cinco ecuaciones de equilibrio restantes a otras dos partes para despejar sucesivamente las demás incógnitas.

*Bastidor completo*

$$\zeta+\Sigma M_A = 0; \quad -20 \text{ lb } (3 \text{ pies}) + C_x(3.5 \text{ pies}) = 0 \qquad C_x = 17.1 \text{ lb}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 17.1 \text{ lb} = 0 \qquad A_x = 17.1 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 20 \text{ lb} = 0 \qquad A_y = 20 \text{ lb}$$

*Elemento AB*

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 17.1 \text{ lb} - B_x = 0 \quad B_x = 17.1 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\zeta+\Sigma M_B = 0; \; -20 \text{ lb } (6 \text{ pies}) + N_D(3 \text{ pies}) = 0 \quad N_D = 40 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 20 \text{ lb} - 40 \text{ lb} + B_y = 0 \quad B_y = 20 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

*Disco*

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad D_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 40 \text{ lb} - 20 \text{ lb} - D_y = 0 \quad D_y = 20 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

6

## EJEMPLO 6.18

Determine la tensión en los cables y la fuerza **P** requerida para soportar la fuerza de 600 N al usar el sistema de poleas sin fricción que se muestra en la figura 6-30*a*.

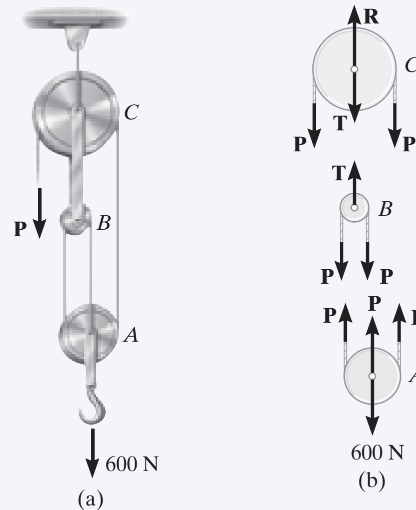



**Fig. 6-30**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 6-30*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de cada polea *incluido* su pasador y una porción del cable en contacto. Como el cable es *continuo* tiene una *tensión constante* $P$ que actúa en toda su longitud. El eslabón de conexión entre las poleas $B$ y $C$ es un elemento de dos fuerzas, y por tanto, tiene una tensión $T$ desconocida que actúa sobre él. Observe que el *principio de acción igual, pero de reacción opuesta* debe cumplirse cuidadosamente para las fuerzas **P** y **T** cuando se trazan los diagramas de cuerpo libre *por separado*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Las tres incógnitas se obtienen de la manera siguiente:

*Polea A*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 3P - 600\text{ N} = 0 \qquad P = 200\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

*Polea B*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T - 2P = 0 \qquad T = 400\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

*Polea C*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad R - 2P - T = 0 \qquad R = 800\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 6.19

Los dos tablones de la figura 6-31*a* están conectados entre sí mediante el cable $BC$ y un espaciador liso $DE$. Determine las reacciones en los soportes lisos $A$ y $F$; además, encuentre la fuerza desarrollada en el cable y en el espaciador.

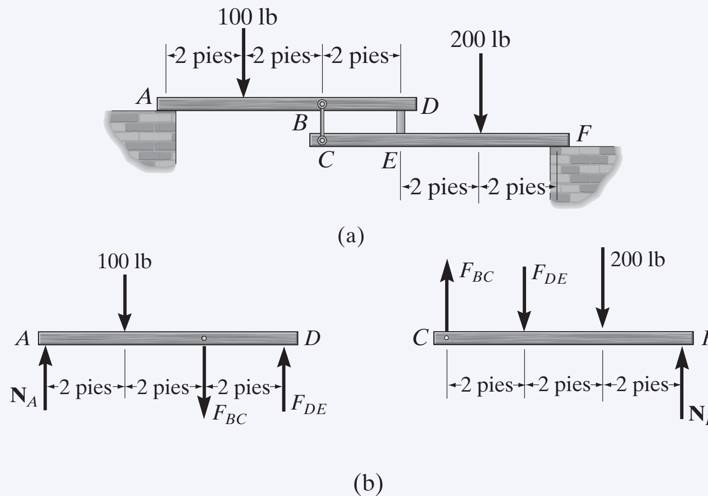



**Fig. 6-31**

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** En la figura 6-31*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de cada tablón. Es importante aplicar la tercera ley de Newton a las fuerzas de interacción como se muestra.

**Ecuaciones de equilibrio.** Para el tablón $AD$,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad F_{DE}(6 \text{ pies}) - F_{BC}(4 \text{ pies}) - 100 \text{ lb } (2 \text{ pies}) = 0$$

Para el tablón $CF$,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_F = 0; \quad F_{DE}(4 \text{ pies}) - F_{BC}(6 \text{ pies}) + 200 \text{ lb } (2 \text{ pies}) = 0$$

Al resolver simultáneamente,

$$F_{DE} = 140 \text{ lb} \quad F_{BC} = 160 \text{ lb}$$ ***Resp.***

Con estos resultados para el tablón $AD$,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A + 140 \text{ lb} - 160 \text{ lb} - 100 \text{ lb} = 0$$

$$N_A = 120 \text{ lb}$$ ***Resp.***

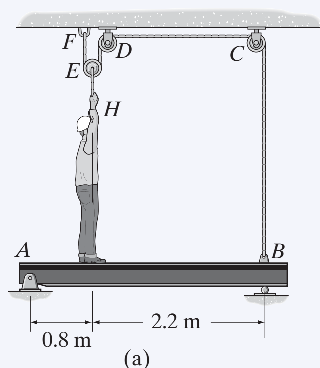
Y para el tablón $CF$,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_F + 160 \text{ lb} - 140 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0$$

$$N_F = 180 \text{ lb}$$ ***Resp.***

6

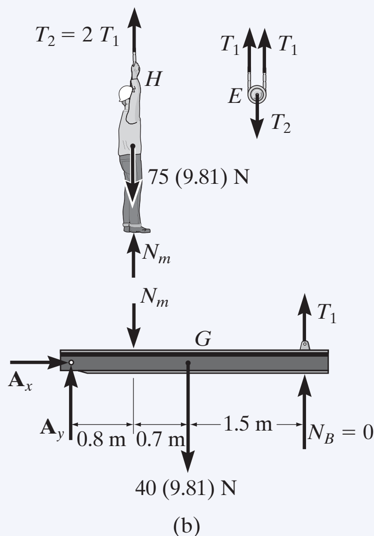
## EJEMPLO 6.20




El hombre de 75 kg que se muestra en la figura 6-32*a* intenta levantar una viga uniforme desde el soporte de rodillo en *B*. Determine la tensión desarrollada en el cable unido a *B* y la reacción normal del hombre sobre la viga cuando esto está a punto de ocurrir.

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** La fuerza de tensión en el cable se denotará con $T_1$. En la figura 6-32*b* se muestran los diagramas de cuerpo libre de la polea *E*, el hombre y la viga. La viga no tiene contacto con el rodillo *B*, por lo que $N_B = 0$. Al trazar cada uno de estos diagramas, es muy importante aplicar la tercera ley de Newton.




**Ecuaciones de equilibrio.** Mediante el diagrama de cuerpo libre de la polea *E*,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2T_1 - T_2 = 0 \quad \text{o} \quad T_2 = 2T_1 \qquad (1)$$

Con referencia al diagrama de cuerpo libre y con este resultado,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_m + 2T_1 - 75(9.81)\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Con la suma de momentos con respecto al punto *A* sobre la viga,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \; T_1(3\text{ m}) - N_m(0.8\text{ m}) - [40(9.81)\text{ N}](1.5\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones 2 y 3 para $T_1$ y $N_m$, y después con la ecuación (1) para $T_2$, obtenemos

$$T_1 = 256\text{ N} \qquad N_m = 224\text{ N} \qquad T_2 = 512\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

### SOLUCIÓN II

Puede obtenerse una solución directa para $T_1$ si se consideran la viga, el hombre y la polea *E* como un *solo sistema*. En la figura 6-32*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre. Así,

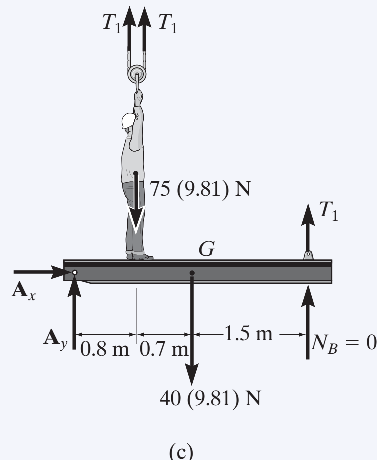



**Fig. 6-32**

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \; 2T_1(0.8\text{ m}) - [75(9.81)\text{ N}](0.8\text{ m})$$
$$- [40(9.81)\text{ N}](1.5\text{ m}) + T_1(3\text{ m}) = 0$$
$$T_1 = 256\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Con este resultado pueden usarse las ecuaciones 1 y 2 para encontrar $N_m$ y $T_2$.

## EJEMPLO 6.21

El bastidor de la figura 6-33*a* soporta el cilindro de 50 kg. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en *A* y la fuerza en *C*.

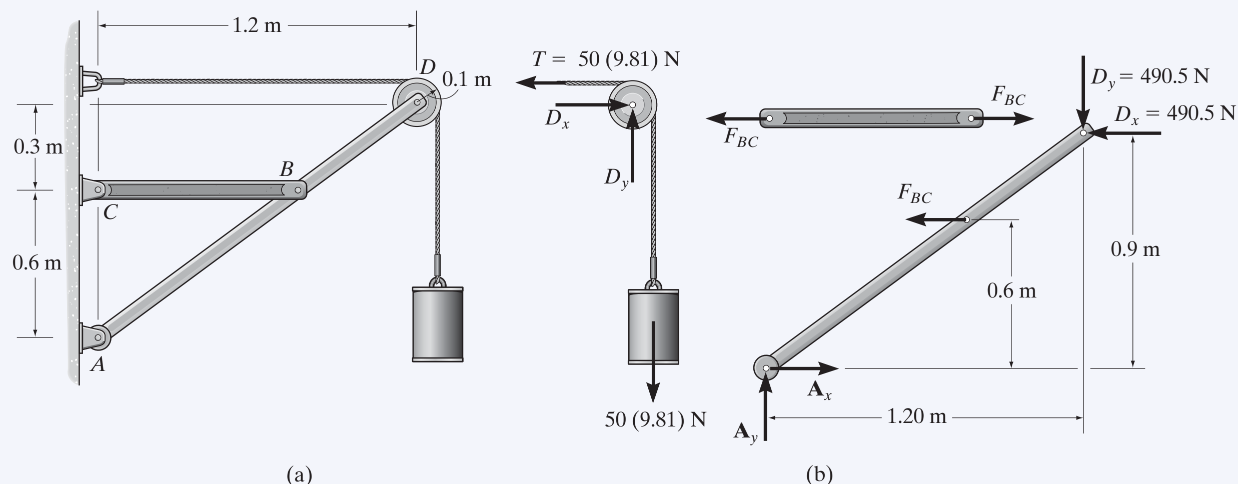



**Fig. 6-33**

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** En la figura 6-33*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la polea *D*, junto con el cilindro y una porción de la cuerda (un sistema). El elemento *BC* es un elemento de dos fuerzas, como lo indica su diagrama de cuerpo libre. También se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento *ABD*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Comenzaremos por analizar el equilibrio de la polea. La ecuación de equilibrio de momentos se satisface de manera automática con $T = 50(9.81)$ N por lo que

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad D_x - 50(9.81)\text{ N} = 0 \quad D_x = 490.5\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad D_y - 50(9.81)\text{ N} = 0 \quad D_y = 490.5\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Con estos resultados, $F_{BC}$ puede determinarse al sumar momentos con respecto al punto *A* del elemento *ABD*.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \; F_{BC}\,(0.6\text{ m}) + 490.5\text{ N}(0.9\text{ m}) - 490.5\text{ N}(1.20\text{ m}) = 0$$

$$F_{BC} = 245.25\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Ahora, $A_x$ y $A_y$ pueden determinarse mediante la sumatoria de fuerzas.

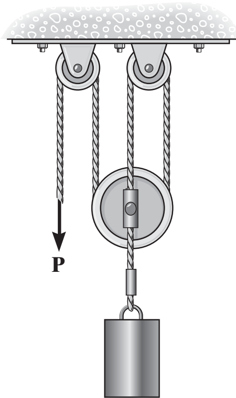
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \; A_x - 245.25\text{ N} - 490.5\text{ N} = 0 \;\; A_x = 736\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 490.5\text{ N} = 0 \quad A_y = 490.5\text{ N} \quad \textit{Resp.}$$

6

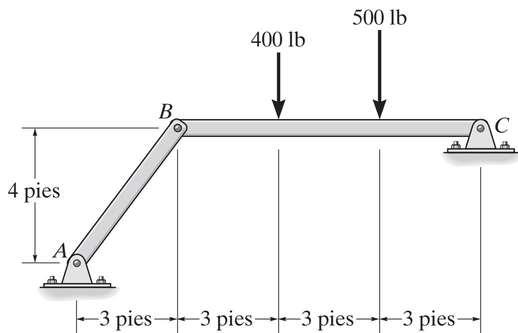
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F6-13.** Determine la fuerza $P$ necesaria para mantener en equilibrio el peso de 60 lb.



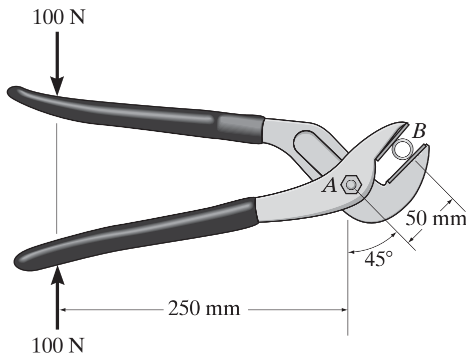

**F6-13**

**F6-14.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $C$.



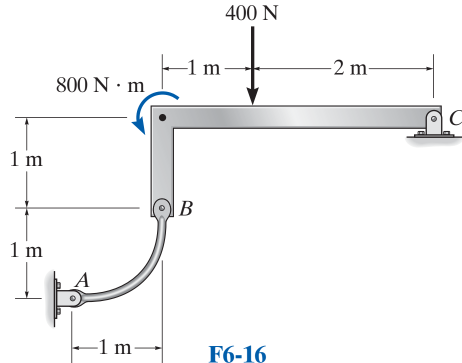

**F6-14**

**F6-15.** Si una fuerza de 100 N se aplica a los mangos de las pinzas, determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo liso $B$ y la magnitud de la fuerza resultante en el pasador $A$.



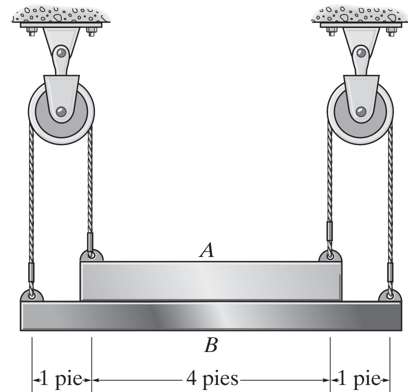

**F6-15**

**F6-16.** Determine las componentes horizontal y vertical de reacción en el pasador $C$.



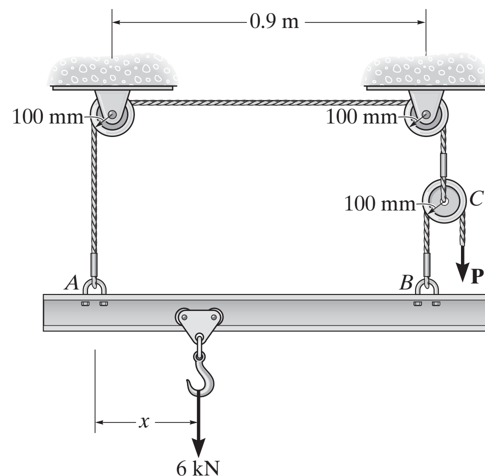

**F6-16**

**F6-17.** Determine la fuerza normal que ejerce la placa $A$ de 100 lb sobre la placa $B$ de 30 lb.




**F6-17**

**F6-18.** Determine la fuerza $P$ necesaria para elevar la carga. También determine la colocación $x$ del gancho que sea adecuada para lograr el equilibrio. Ignore el peso de la viga.

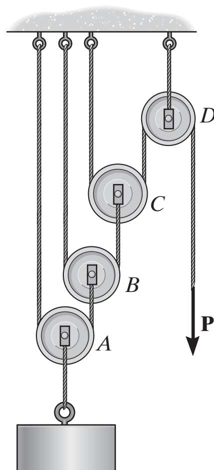



**F6-18**

6

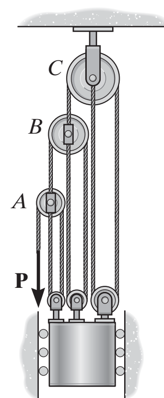
# PROBLEMAS

**6-67.** Determine la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio el peso de 100 lb.




**Prob. 6-67**

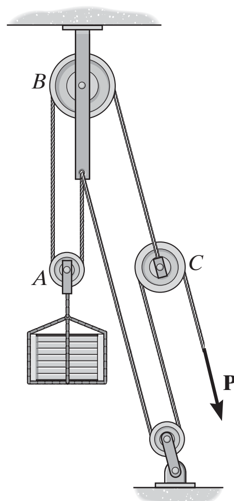
**•6-69.** Determine la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio la masa de 50 kg.




**Prob. 6-69**

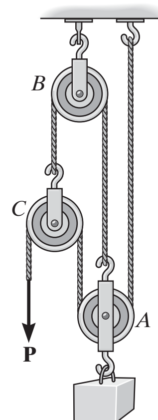


*__6-68.__ Determine la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio la caja de 150 kg.



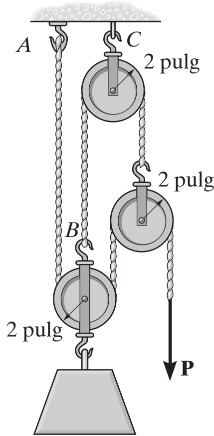

**Prob. 6-68**

**6-70.** Determine la fuerza **P** requerida para mantener en equilibrio el bloque de 20 lb.



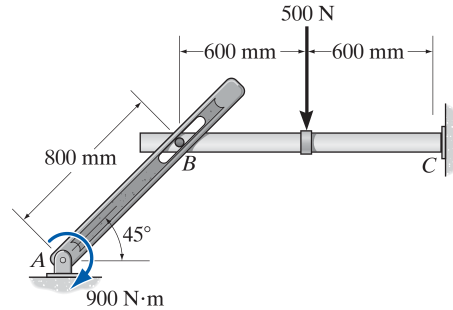

**Prob. 6-70**

**6-71.** Determine la fuerza **P** necesaria para soportar el peso de 100 lb. Cada polea tiene un peso de 10 lb. Además, ¿cuáles son las reacciones en la cuerda en *A* y en *B*?




Prob. 6-71

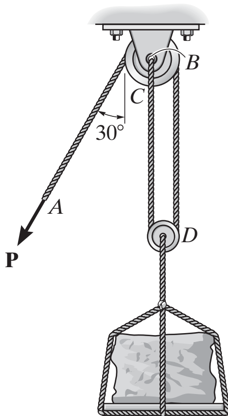
•**6-73.** Si la clavija en *B* es lisa, determine las componentes de la reacción en el pasador *A* y el soporte fijo *C*.




Prob. 6-73

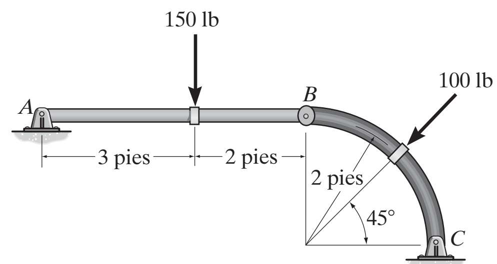


***6-72.** El cable y las poleas se usan para elevar la piedra de 600 lb. Determine la fuerza que debe ejercerse sobre el cable en *A* y la magnitud correspondiente de la fuerza resultante que ejerce la polea en *C* sobre el pasador *B* cuando los cables están en la posición mostrada.



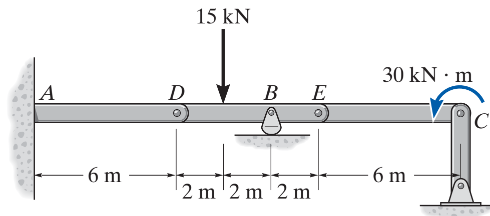

Prob. 6-72

**6-74.** Determine las componentes horizontal y vertical de las reacciones en los pasadores *A* y *C*.



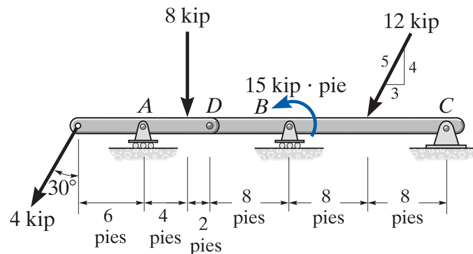

Prob. 6-74

**6-75.** La viga compuesta está fija en $A$ y soportada mediante soportes mecedora en $B$ y $C$. Se tienen articulaciones (pasadores) en $D$ y $E$. Determine las componentes de las reacciones en los soportes.



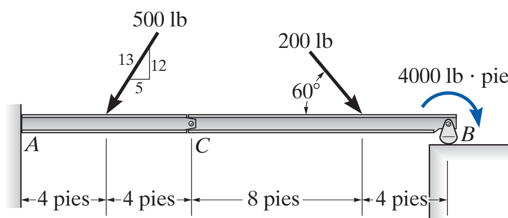

Prob. 6-75

*6-76. La viga compuesta está soportada mediante un pasador en $C$ y por rodillos en $A$ y $B$. Hay una articulación (pasador) en $D$. Determine las componentes de reacción en los soportes. Pase por alto el espesor de la viga.



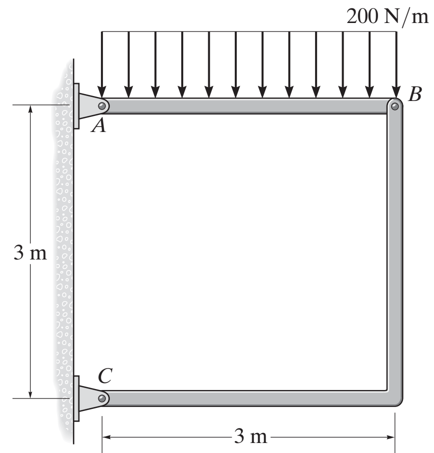

Prob. 6-76

•6-77. La viga compuesta está soportada mediante un rodillo en $B$ y se encuentra fija a la pared en $A$. Si está articulada (con pasador) en $C$, determine las componentes de reacción en los soportes. No tome en cuenta el espesor de la viga.



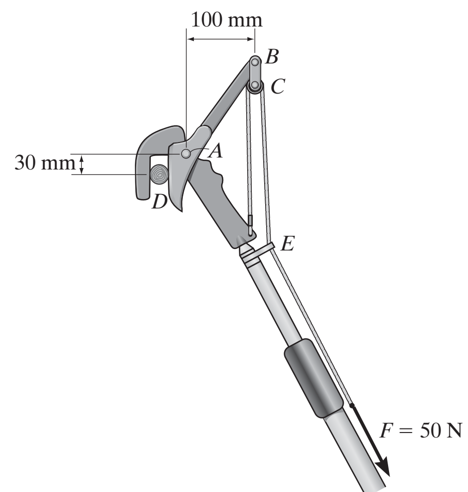

Prob. 6-77

**6-78.** Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los pasadores $A$ y $C$ del bastidor de dos elementos.



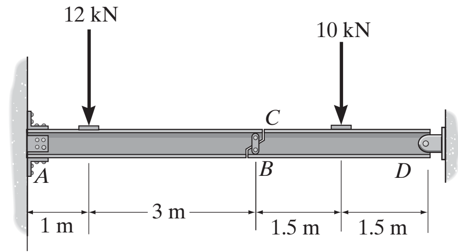

Prob. 6-78

**6-79.** Si una fuerza de $F = 50$ N actúa sobre la cuerda, determine la fuerza de corte sobre la rama de árbol lisa que se encuentra en $D$ y las componentes de fuerza horizontal y vertical que actúan sobre el pasador $A$. La cuerda pasa a través de una pequeña polea en $C$ y un anillo liso en $E$.



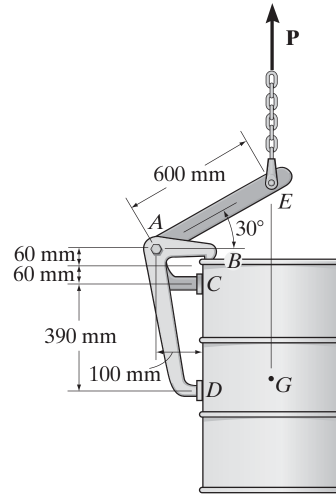

Prob. 6-79

***6-80.** Dos vigas están conectadas entre sí mediante el eslabón corto *BC*. Determine las componentes de reacción en el soporte fijo *A* y en el pasador *D*.



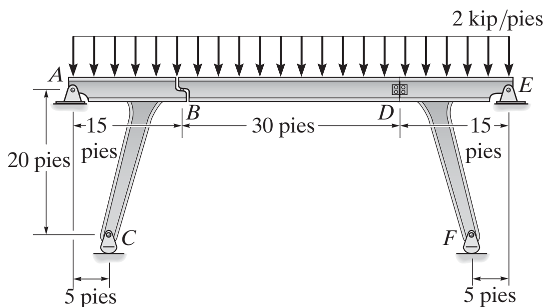

Prob. 6-80

**6-82.** Si el tambor de 300 kg tiene un centro de masa en el punto *G*, determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa en el pasador *A* y las reacciones sobre las almohadillas lisas *C* y *D*. La sujeción en *B* sobre el elemento $D_{AB}$ resiste las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el borde del tambor.



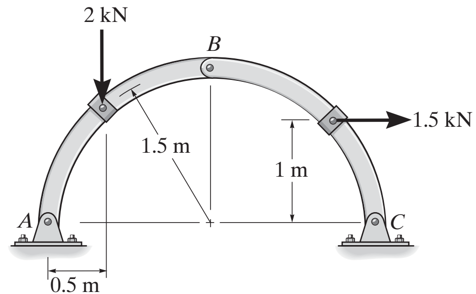

Prob. 6-82

•**6-81.** El bastidor de puente consiste en tres segmentos que pueden considerarse articulados en *A*, *D* y *E*, soportados por rodillos en *C* y *F*, y apoyados sobre un rodillo en *B*. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en todos estos soportes debida a las cargas que se muestran.



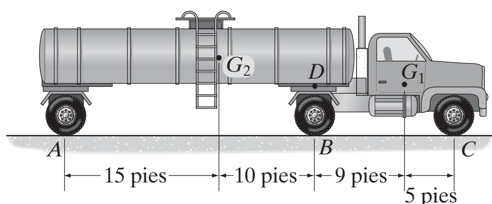

Prob. 6-81

**6-83.** Determine las componentes horizontal y vertical de reacción que ejercen los pasadores *A* y *C* sobre el arco de dos elementos.




Prob. 6-83

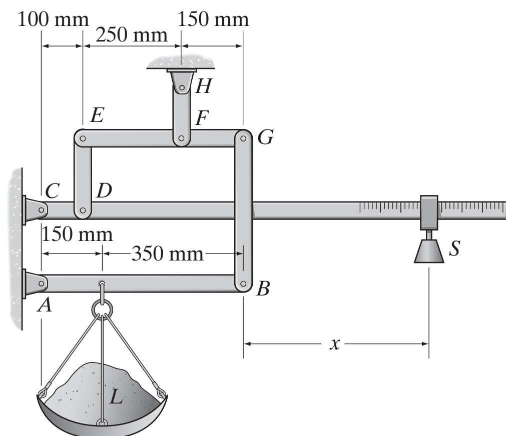
*6-84. El camión y el tanque tienen pesos de 8000 lb y 20 000 lb respectivamente. Sus centros de gravedad respectivos se ubican en los puntos $G_1$ y $G_2$. Si el camión está en reposo, determine las reacciones en las dos ruedas localizadas en $A$, en $B$ y en $C$. El tanque está conectado al camión en el tornamesa $D$, el cual actúa como un pasador.




**Prob. 6-84**

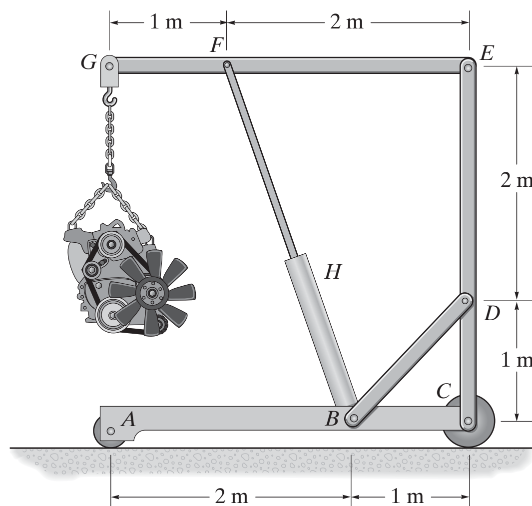
•6-85. La balanza de plataforma consiste en una combinación de palancas de tercera y primera clase de manera que la carga sobre una palanca se convierte en el esfuerzo que mueve la siguiente palanca. A través de este arreglo, un peso pequeño puede equilibrar un objeto grande. Si $x = 450$ mm, determine la masa requerida del contrapeso $S$ para balancear una carga $L$ de 90 kg.

6-86. La balanza de plataforma consiste en una combinación de palancas de tercera y primera clase de manera que la carga sobre una palanca se convierte en el esfuerzo que mueve la siguiente palanca. A través de este arreglo, un peso pequeño puede equilibrar un objeto grande. Si $x = 450$ mm y la masa del contrapeso $S$ es de 2 kg, determine la masa de la carga $L$ requerida para mantener el equilibrio.



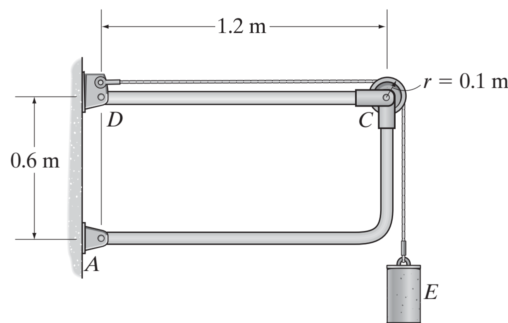

**Probs. 6-85/86**

6-87. El montacargas soporta el motor de 125 kg. Determine la fuerza que genera la carga en el elemento $DB$ y en el elemento $FB$, el cual contiene el cilindro hidráulico $H$.




**Prob. 6-87**

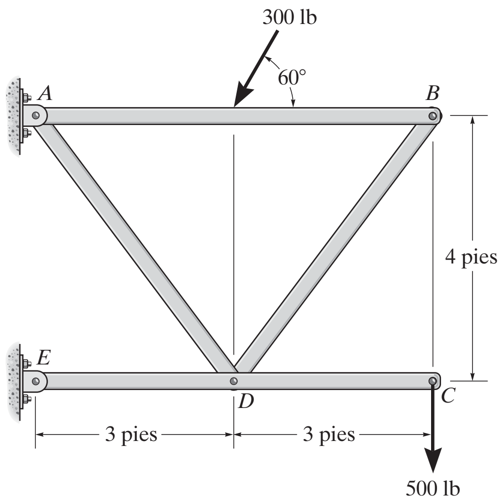
*6-88. El bastidor se usa para soportar el cilindro $E$ de 100 kg. Determine las componentes horizontal y vertical de las reacciones en $A$ y en $D$.




**Prob. 6-88**

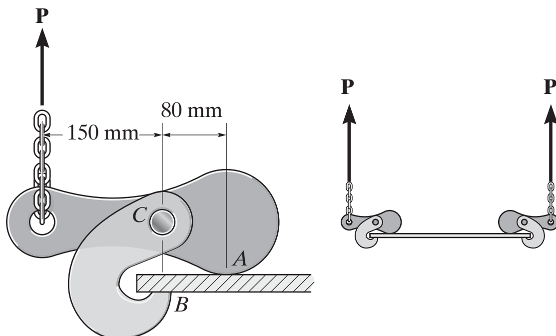
•**6-89.** Determine las componentes horizontal y vertical de reacción que ejercen los pasadores sobre el elemento *AB* del bastidor.

**6-90.** Determine las componentes horizontal y vertical de reacción que ejercen los pasadores sobre el elemento *EDC* del bastidor.




**Probs. 6-89/90**

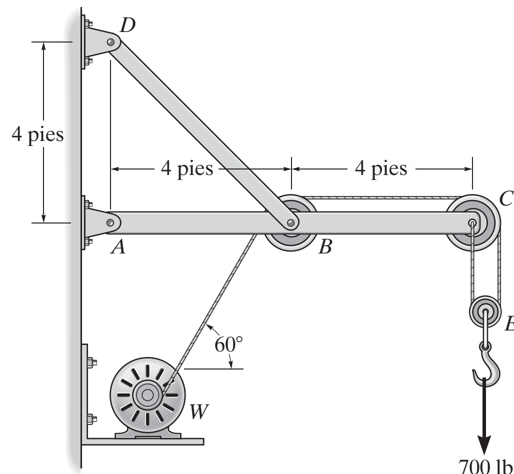
**6-91.** Los ganchos de sujeción se utilizan para elevar la placa lisa uniforme de 500 kg. Determine la fuerza compresiva resultante que ejerce el gancho sobre la placa en *A* y en *B*, y la reacción del pasador en *C*.




**Prob. 6-91**

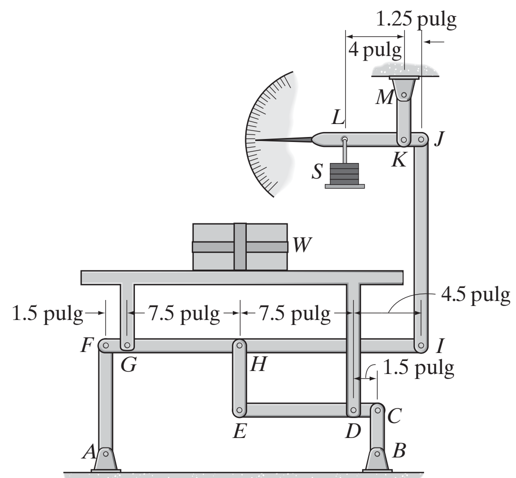
*__6-92.__ La grúa de pared soporta una carga de 700 lb. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores *A* y *D*. Además, ¿cuál es la fuerza sobre el cable en el cabrestrante *W*?

•**6-93.** La grúa de pared soporta una carga de 700 lb. Determine las componentes de reacción horizontal y vertical en los pasadores *A* y *D*. Además, ¿cuál es la fuerza sobre el cable en el cabrestrante *W*? El pescante *ABC* tiene un peso de 100 lb y el elemento *BD* tiene un peso de 40 lb. Cada elemento es uniforme y tiene un centro de gravedad en su centro.




**Probs. 6-92/93**

**6-94.** La balanza que actúa mediante palancas consiste en una serie de palancas compuestas. Si sobre la plataforma se coloca una carga de peso $W = 150$ lb, determine el peso requerido del contrapeso *S* para equilibrar la carga. ¿Es necesario colocar la carga sobre la plataforma de manera simétrica? Explique.

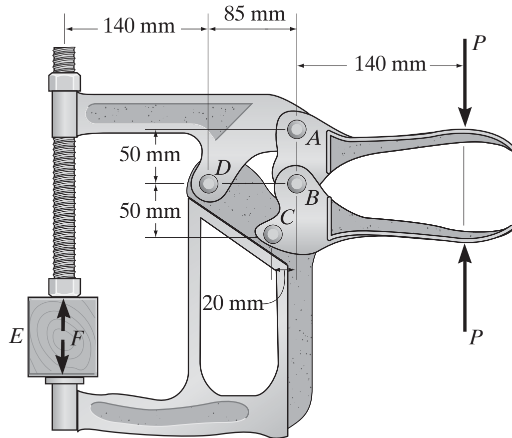



**Prob. 6-94**

6

**6-95.** Si $P = 75$ N, determine la fuerza $F$ que ejerce la tenaza de fijación sobre el bloque de madera.

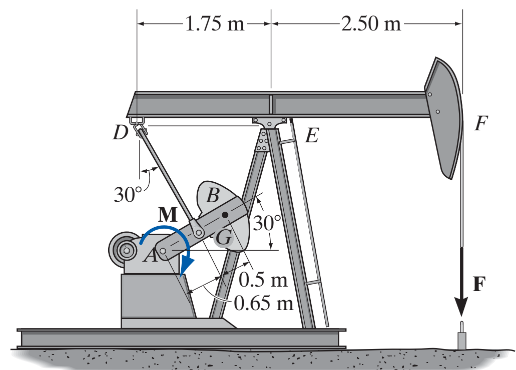
***6-96.** Si el bloque de madera ejerce una fuerza de $F = 600$ N sobre la tenaza de fijación, determine la fuerza $P$ aplicada al mango.




**Probs. 6-95/96**

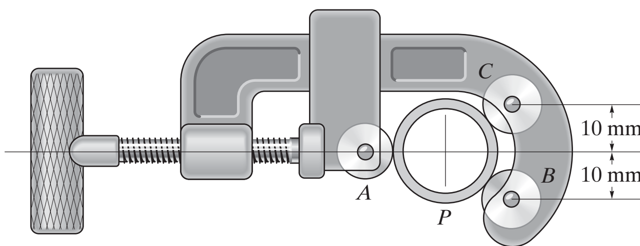
**6-98.** Un contrapeso de 300 kg, con centro de masa en $G$, está montado sobre la biela de manivela $AB$ de la unidad para bombear petróleo. Si se debe desarrollar una fuerza de $F = 5$ kN en el cable fijo unido al extremo de la viga móvil $DEF$, determine el par de torsión $M$ que debe suministrar el motor.

**6-99.** Un contrapeso de 300 kg, con centro de masa en $G$, está montado sobre la biela de manivela $AB$ de la unidad para bombear petróleo. Si el motor suministra un par de torsión de $M = 2500$ N · m, determine la fuerza **F** desarrollada en el cable fijo unido al extremo de la viga móvil $DEF$.



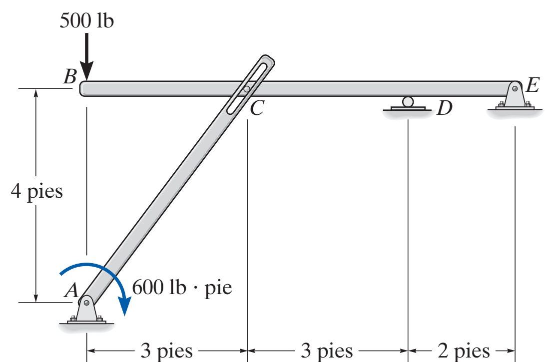

**Probs. 6-98/99**

**•6-97.** La cortadora de tubos está afianzada alrededor del tubo $P$. Si la rueda situada en $A$ ejerce una fuerza normal de $F_A = 80$ N sobre el tubo, determine las fuerzas normales de las ruedas $B$ y $C$ sobre el tubo. Las tres ruedas tienen cada una un radio de 7 mm y el tubo tiene un radio exterior de 10 mm.




**Prob. 6-97**

***6-100.** La estructura de dos elementos está conectada en $C$ mediante un pasador, el cual está fijo a $BDE$ y pasa a través de la ranura lisa en el elemento $AC$. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los soportes.

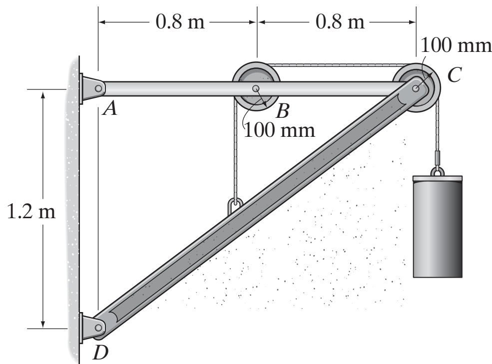



**Prob. 6-100**

6

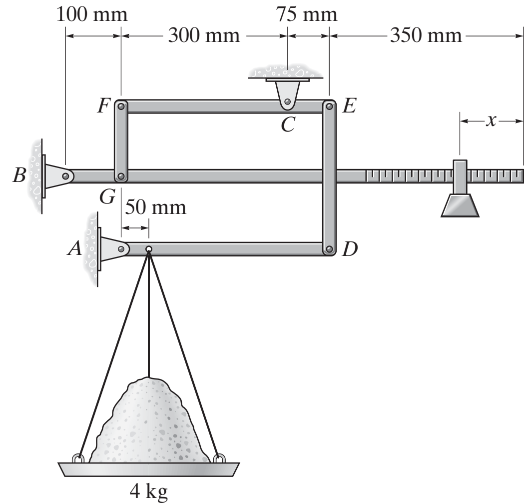
**•6-101.** El bastidor se usa para soportar el cilindro de 50 kg. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en *A* y en *D*.

**6-102.** El bastidor se usa para soportar el cilindro de 50 kg. Determine la fuerza del pasador en *C* y sobre el elemento *ABC* y sobre el elemento *CD*.



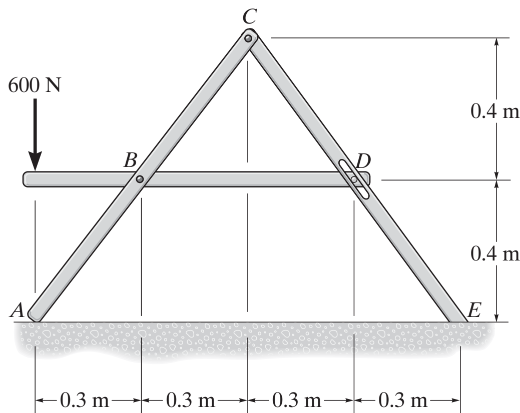

**Probs. 6-101/102**

***6-104.** Se muestra el arreglo compuesto de la balanza de platillo. Si la masa colocada sobre el platillo es de 4 kg, determine las componentes horizontal y vertical en los pasadores *A*, *B* y *C* y la distancia *x* de la masa de 25 g para mantener la balanza en equilibrio.



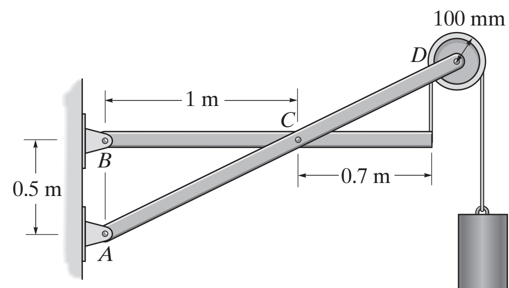

**Prob. 6-104**

**6-103.** Determine las reacciones en el soporte fijo *E* y en el soporte liso *A*. El pasador, unido al elemento *BD*, pasa a través de una ranura suave en *D*.



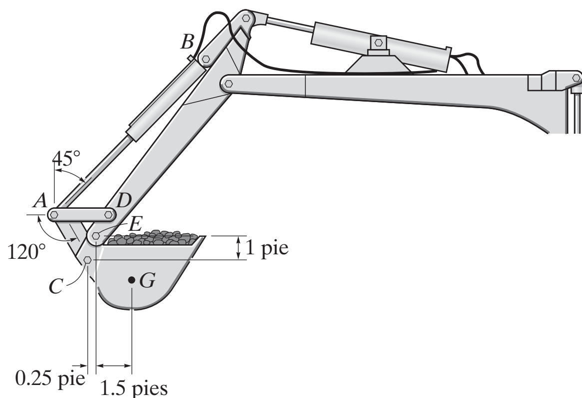

**Prob. 6-103**

**•6-105.** Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que ejercen los pasadores en *A*, *B* y *C* sobre el bastidor. El cilindro tiene una masa de 80 kg.




**Prob. 6-105**

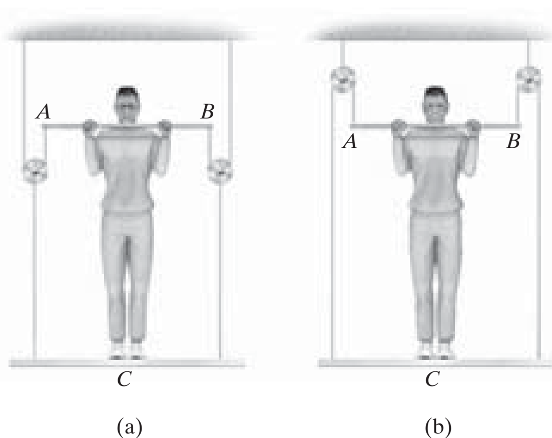
**6-106.** El cucharón de la retroexcavadora y su contenido tienen un peso de 1200 lb y centro de gravedad en $G$. Determine las fuerzas del cilindro hidráulico $AB$ y en los eslabones $AC$ y $AD$ para mantener la carga en la posición mostrada. El cucharón se conecta mediante un pasador ubicado en $E$.




Prob. 6-106

**6-107.** Un hombre con peso de 175 lb intenta levantarse mediante uno de los dos métodos mostrados. Determine la fuerza total que debe ejercer sobre la barra $AB$ en cada caso y la reacción normal que ejerce sobre la plataforma en $C$. Ignore el peso de la plataforma.

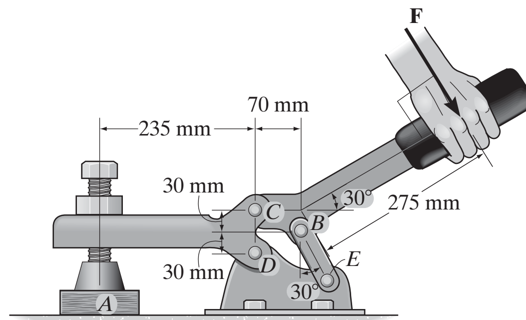
***6-108.** Un hombre con peso de 175 lb intenta levantarse mediante uno de los dos métodos mostrados. Determine la fuerza total que debe ejercer sobre la barra $AB$ en cada caso y la reacción normal que ejerce sobre la plataforma en $C$. La plataforma tiene un peso de 30 lb.




Probs. 6-107/108

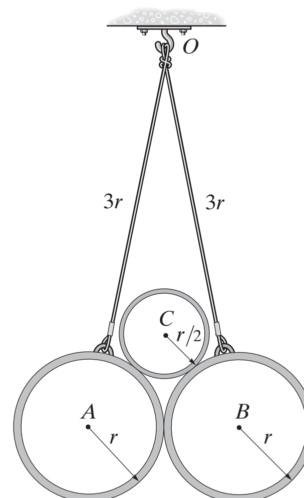
•**6-109.** Si se requiere una fuerza de apriete de 300 N en $A$, determine el tamaño de la fuerza **F** que debe aplicarse al mango de la tenaza de sujeción.

**6-110.** Si se aplica una fuerza de $F = 350$ N al mango de la tenaza de sujeción, determine la fuerza de apriete resultante en $A$.




Probs. 6-109/110

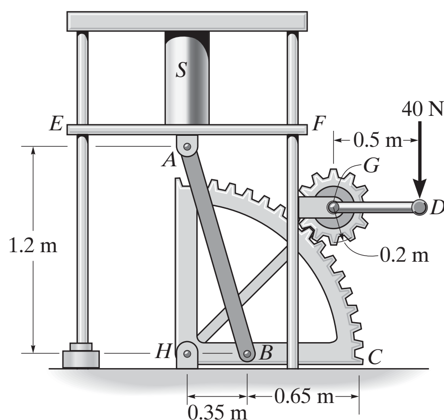
**6-111.** Dos tubos lisos $A$ y $B$, ambos con el mismo peso $W$, están suspendidos de un punto común $O$ por medio de cuerdas de igual longitud. Un tercer tubo, $C$, está colocado entre $A$ y $B$. Determine el peso máximo de $C$ sin que se perturbe el equilibrio.




Prob. 6-111

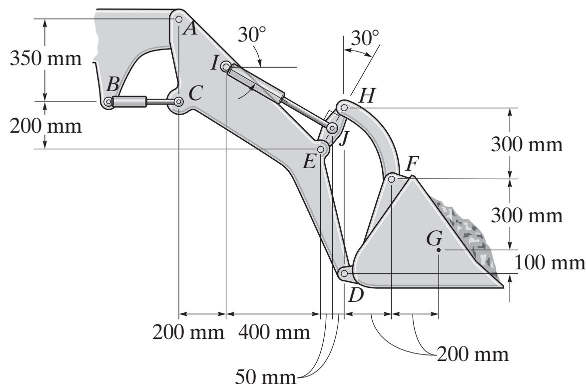
6

***6-112.** La manivela de la prensa de sector está fija al engrane $G$, el cual a su vez está trabado con el engrane de sector $C$. Observe que $AB$ está articulado en sus extremos al engrane $C$ y al lado inferior de la mesa $EF$, la cual puede moverse verticalmente debido a las guías lisas en $E$ y en $F$, Si los engranes sólo ejercen fuerzas tangenciales entre sí, determine la fuerza de compresión desarrollada sobre el cilindro $S$ cuando se aplica una fuerza vertical de 40 N a la manivela de la prensa.



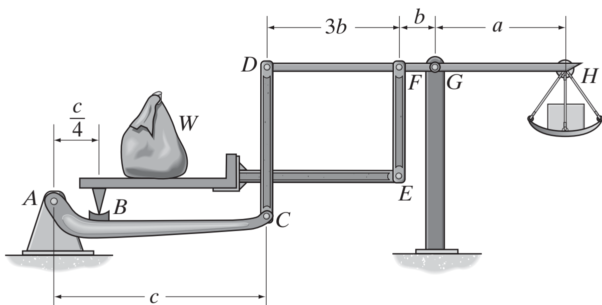

**Prob. 6-112**

**6-114.** La pala de la excavadora contiene una carga de tierra de 500 kg, con un centro de masa en $G$. Calcule las fuerzas desarrolladas en los cilindros hidráulicos $IJ$ y $BC$ debido a esta carga.




**Prob. 6-114**

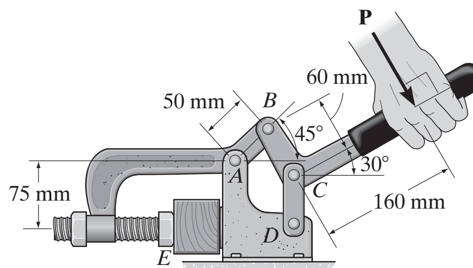
**•6-113.** Muestre que el peso $W_1$ del contrapeso ubicado en $H$ requerido para el equilibrio es $W_1 = (b/a)W$, y por tanto es independiente de la colocación de la carga $W$ sobre la plataforma.




**Prob. 6-113**

**6-115.** Si se aplica una fuerza de $P = 100$ N sobre el mango de la tenaza de fijación, determine la fuerza $N_E$ de apriete horizontal que ejerce la tenaza sobre el bloque liso de madera ubicado en $E$.

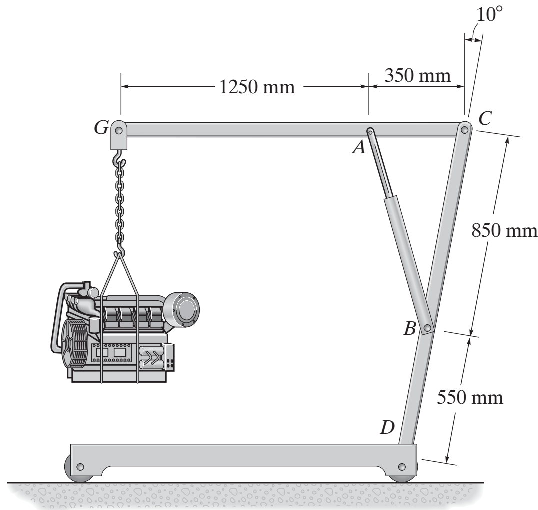
***6-116.** Si la fuerza de apriete horizontal que ejerce la tenaza de fijación sobre el bloque liso de madera ubicado en $E$ es $N_E = 200$ N, determine la fuerza **P** aplicada sobre el mango de la tenaza.




**Probs. 6-115/116**

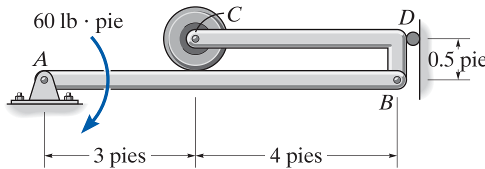
6

**•6-117.** El montacargas se usa para soportar el motor de 200 kg. Determine la fuerza que actúa en el cilindro hidráulico $AB$, las componentes de fuerza horizontal y vertical en el pasador $C$, y las reacciones en el soporte fijo $D$.



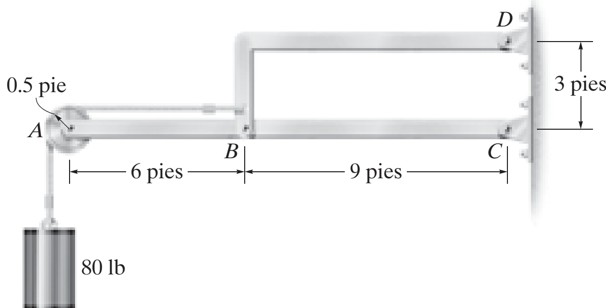

**Prob. 6-117**

**6-118.** Determine la fuerza que ejerce el rodillo liso $C$ sobre el elemento $AB$. También, ¿cuáles son las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador $A$? Ignore el peso del bastidor y del rodillo.




**Prob. 6-118**

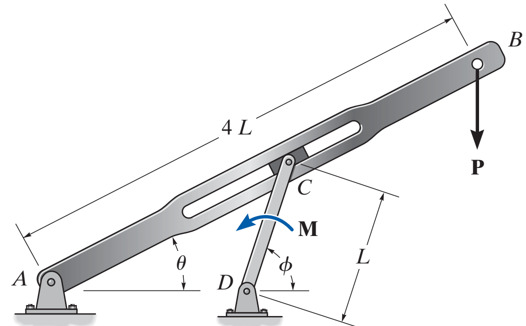
**6-119.** Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que ejercen los pasadores sobre el elemento $ABC$.




**Prob. 6-119**

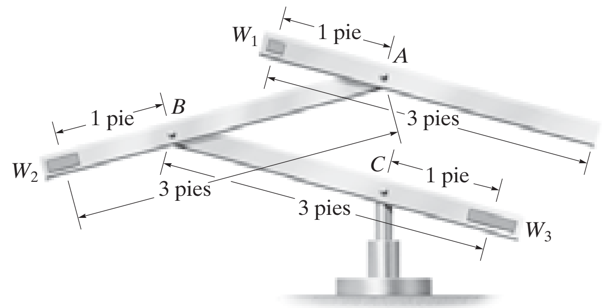
***6-120.** Determine el momento de par **M** que debe aplicarse al elemento $DC$ para lograr el equilibrio del mecanismo de retorno rápido. Exprese el resultado en términos de los ángulos $\phi$ y $\theta$, la dimensión $L$ y la *fuerza vertical* **P** aplicada. El bloque en $C$ está confinado para deslizarse dentro de la ranura del elemento $AB$.

**•6-121.** Determine el momento de par **M** que debe aplicarse al elemento $DC$ para lograr el equilibrio del mecanismo de retorno rápido. Exprese el resultado en términos de los ángulos $\phi$ y $\theta$, la dimensión $L$ y la fuerza **P** aplicada, la cual debe cambiarse en la figura para que esté dirigida horizontalmente hacia la derecha. El bloque en $C$ está confinado para deslizarse dentro de la ranura del elemento $AB$.




**Probs. 6-120/121**

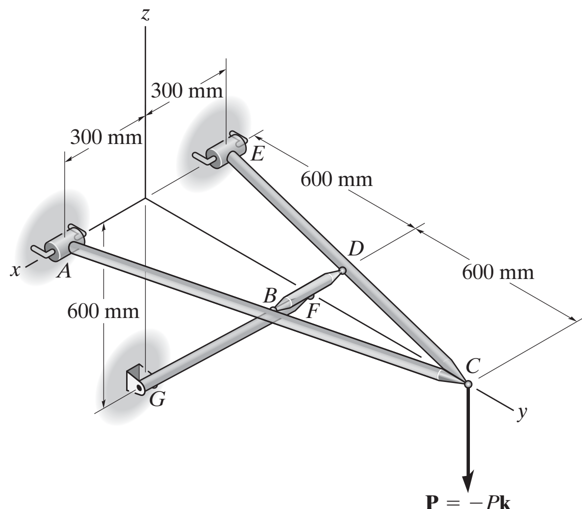
**6-122.** La escultura cinética requiere que cada una de las tres vigas articuladas esté en perfecto equilibrio en cualquier momento durante su lento movimiento. Si cada elemento tiene un peso uniforme de 2 lb/pie y una longitud de 3 pies, determine los contrapesos necesarios $W_1$, $W_2$ y $W_3$ que deben agregarse a los extremos de cada elemento para mantener el sistema en equilibrio en cualquier posición. Ignore el tamaño de los contrapesos.




**Prob. 6-122**

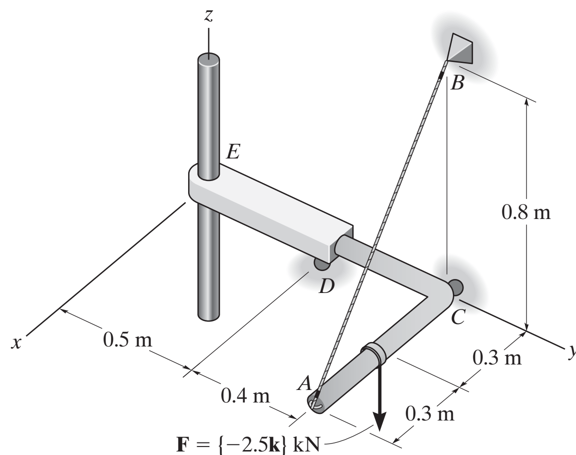
6

**6-123.** El bastidor en forma de "A" de cuatro miembros está soportado en $A$ y $E$ por collares lisos y en $G$ mediante un pasador. Todas las otras uniones son rótulas esféricas. Si el pasador ubicado en $G$ fallara cuando la fuerza resultante ahí sea de 800 N, determine la fuerza $P$ vertical máxima que pueda soportar el bastidor. Además, ¿cuáles son las componentes de fuerza $x$, $y$, $z$, que el elemento $BD$ ejerce sobre los elementos $EDC$ y $ABC$? Los collarines localizados en $A$ y $E$ y el pasador colocado en $G$ sólo ejercen componentes de fuerza sobre el bastidor.



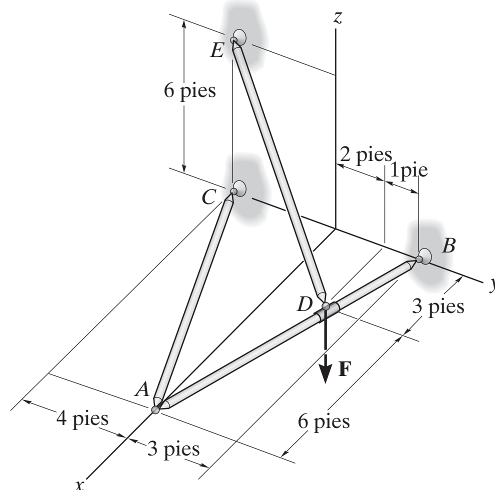

Prob. 6-123

*__6-124.__ La estructura está sometida a la carga mostrada. El elemento $AD$ está soportado por un cable $AB$ y un rodillo en $C$, y entra en un orificio circular liso en $D$. El elemento $ED$ está soportado por un rodillo en $D$ y un poste que entra en un orificio circular liso con reborde en $E$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la reacción en $E$ y la tensión en el cable $AB$.



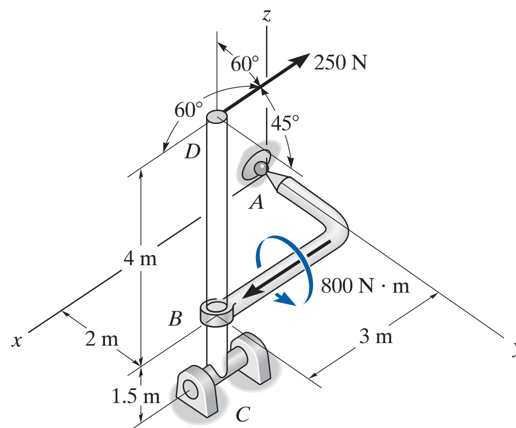

Prob. 6-124

•**6-125.** El bastidor de tres elementos está conectado en sus extremos por medio de rótulas esféricas. Determine las componentes de reacción $x$, $y$, $z$ en $B$ y la tensión en el elemento $ED$. La fuerza que actúa en $D$ es $\mathbf{F} = \{135\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 180\mathbf{k}\}$ lb.




Prob. 6-125

**6-126.** La estructura está sometida a las cargas que se muestran. El elemento $AB$ está soportado por una rótula esférica en $A$ y un collarín liso en $B$. El elemento $CD$ está soportado por un pasador en $C$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de las reacciones en $A$ y en $C$.

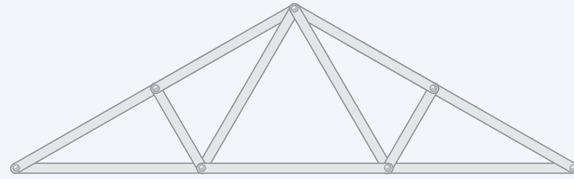



Prob. 6-126

# REPASO DEL CAPÍTULO

**Armadura simple**

Una armadura simple consiste en elementos triangulares conectados entre sí mediante nodos de pasador. Las fuerzas dentro de sus elementos pueden determinarse al suponer que todos son de dos fuerzas, conectados concurrentemente en cada nodo. Los elementos están en tensión o en compresión, o no soportan ninguna fuerza.



Armadura de techo

**Método de nodos**

El método de nodos establece que si una armadura está en equilibrio, entonces cada uno de sus nodos también está en equilibrio. Para una armadura plana, el sistema de fuerzas concurrentes en cada nodo debe satisfacer el equilibrio de fuerzas.

Para obtener una solución numérica para las fuerzas en los elementos, seleccione un nodo que tenga un diagrama de cuerpo libre con cuando mucho dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida. (Esto puede requerir encontrar primero las reacciones en los soportes).

Una vez determinada una fuerza del elemento, use su valor y aplíquelo a un nodo adyacente.

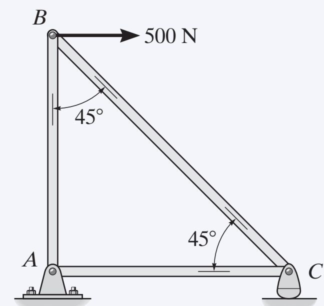
Recuerde que las fuerzas que *jalan* el nodo *están en tensión*, y aquellas que lo *empujan* están en *compresión*.

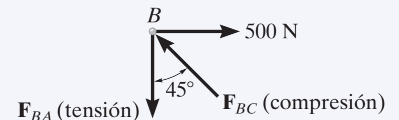
Para evitar una solución simultánea de dos ecuaciones, establezca uno de los ejes coordenados a lo largo de la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas y sume fuerzas en una dirección perpendicular a este eje. Esto permitirá obtener una solución directa para la otra incógnita.

El análisis se puede simplificar más aún, al identificar primero todos los elementos de fuerza cero.

$$\Sigma F_x = 0$$

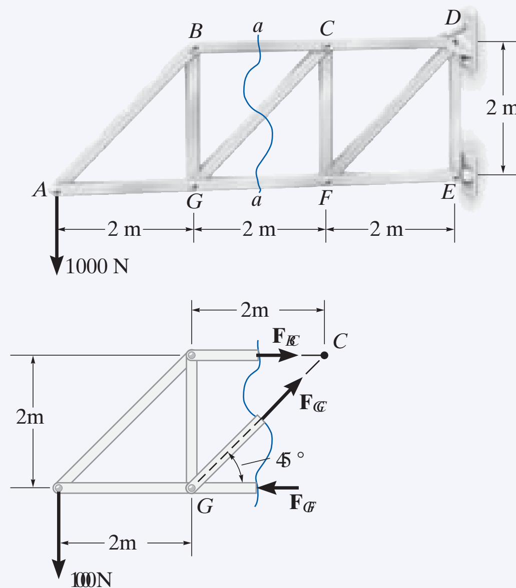
$$\Sigma F_y = 0$$



**Método de secciones**

El método de secciones establece que si una armadura está en equilibrio, entonces cada una de sus secciones también está en equilibrio. Pase una sección a través del elemento cuya fuerza debe ser determinada. Después trace el diagrama de cuerpo libre de la parte seccionada que tenga el menor número de fuerzas sobre ella.




Los elementos seccionados sometidos a un *jalón* están en *tensión* y aquellos sometidos a un *empujón* están en *compresión*.



Se dispone de tres ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$

Si es posible, sume las fuerzas en una dirección que sea perpendicular a dos de las tres fuerzas desconocidas. Esto dará una solución directa para la tercera fuerza.

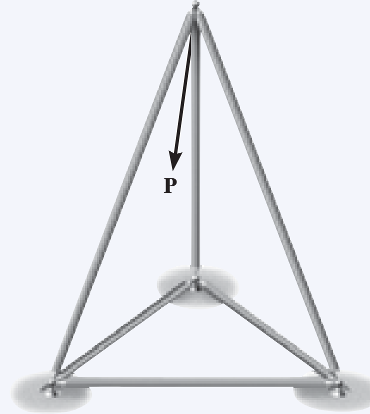
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$
$$-1000 \text{ N} + F_{GC} \operatorname{sen} 45^\circ = 0$$
$$F_{GC} = 1.41 \text{ kN (T)}$$

Sume momentos con respecto a un punto donde las líneas de acción de dos de las tres fuerzas desconocidas se intersequen, de manera que la tercera fuerza desconocida pueda determinarse en forma directa.

$$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0$$
$$1000 \text{ N}(4 \text{ m}) - F_{GF}(2 \text{ m}) = 0$$
$$F_{GF} = 2 \text{ kN (C)}$$

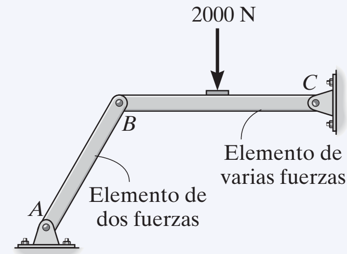
**Armadura espacial**

Una armadura espacial es una estructura tridimensional construida a partir de elementos tetraédricos, y se analiza con los mismos métodos que para las armaduras planas. Se supone que las uniones son conexiones de rótula esférica.



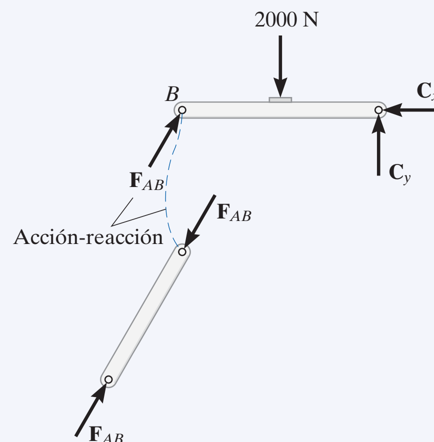

**Bastidores y máquinas**

Los bastidores y máquinas son estructuras que contienen uno o más elementos de varias fuerzas, es decir, elementos que tienen tres o más fuerzas o pares que actúan sobre ellos. Los bastidores están diseñados para soportar cargas, y las máquinas transmiten y modifican el efecto de las fuerzas.




Las fuerzas que actúan en las uniones de un bastidor o de una máquina pueden determinarse al trazar los diagramas de cuerpo libre de cada uno de sus elementos o partes. El principio de acción-reacción debe cumplirse cuidadosamente al trazar esas fuerzas sobre cada elemento o pasador adyacente. Para un sistema coplanar de fuerzas, hay tres ecuaciones de equilibrio disponibles para cada elemento.

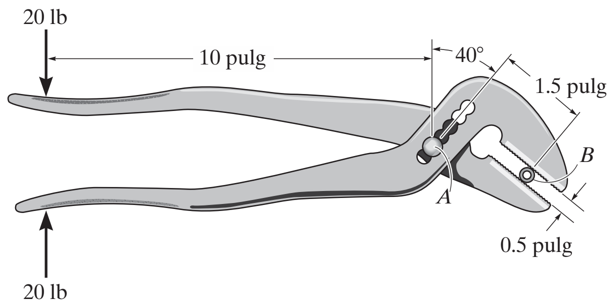
Para simplificar el análisis, asegúrese de reconocer todos los elementos de dos fuerzas. Éstos tienen fuerzas colineales iguales pero opuestas en sus extremos.




6

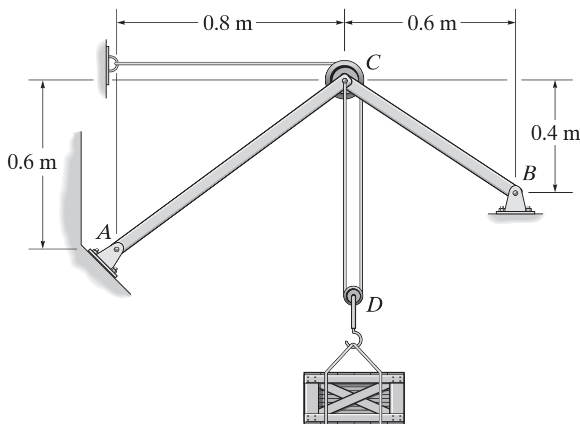
## PROBLEMAS DE REPASO

**6-127.** Determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo liso en *B* si se aplica una fuerza de 20 lb a los mangos de las pinzas. Las pinzas están articuladas en *A*.



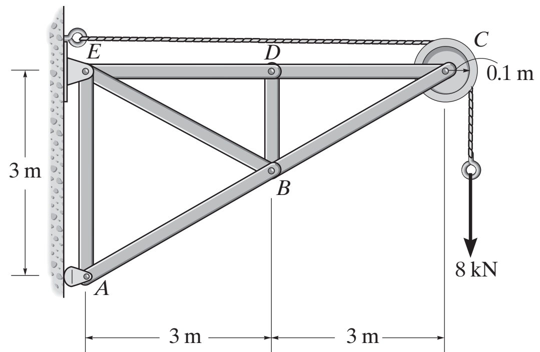

**Prob. 6-127**

*__6-128.__ Determine las fuerzas que ejercen los pasadores ubicados en *A* y *B* sobre el bastidor de dos elementos que sostiene a la caja de 100 kg.




**Prob. 6-128**

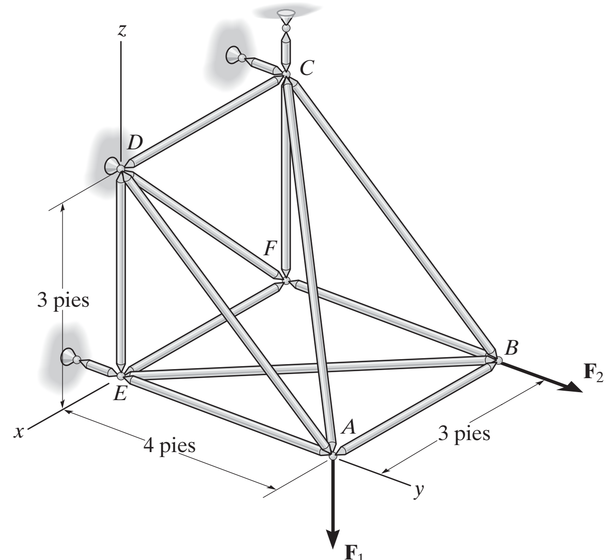
•**6-129.** Determine la fuerza en cada elemento de la armadura y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




**Prob. 6-129**

**6-130.** La armadura espacial está soportada por una unión de rótula esférica en *D* y eslabones cortos en *C* y *E*. Determine la fuerza en cada elemento y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $\mathbf{F}_1 = \{-500\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{400\mathbf{j}\}$ lb.

**6-131.** La armadura espacial está soportada por una unión de rótula esférica en *D* y eslabones cortos en *C* y *E*. Determine la fuerza en cada elemento y establezca si los elementos están en tensión o en compresión. Considere $\mathbf{F}_1 = \{200\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 500\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{400\mathbf{j}\}$ lb.

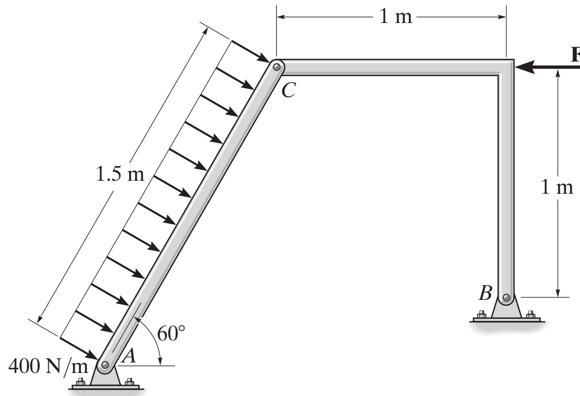



**Probs. 6-130/131**

6

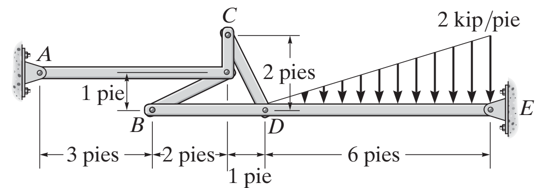
*6-132. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción que ejercen los pasadores $A$ y $B$ sobre el bastidor de dos elementos. Considere $F = 0$.

*6-133. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción que ejercen los pasadores $A$ y $B$ sobre el bastidor de dos elementos. Considere $F = 500$ N.




Probs. 6-132/133

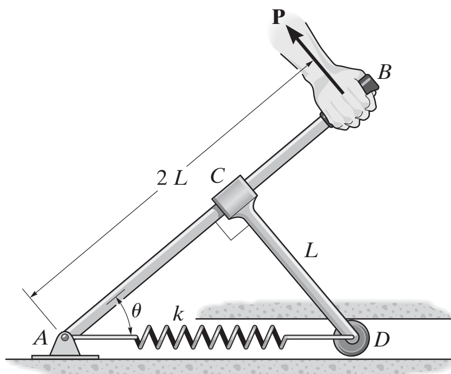
6-135. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en los soportes de pasador $A$ y $E$ del ensamble de vigas compuestas.




Prob. 6-135

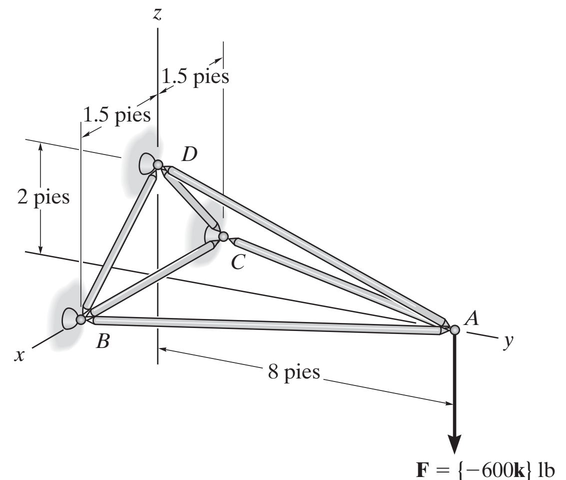
6

6-134. El mecanismo de dos barras consiste en un brazo de palanca $AB$ y un eslabón liso $CD$, el cual tiene un collarín fijo en su extremo $C$ y un rodillo en el otro extremo $D$. Determine la fuerza **P** necesaria para mantener la palanca en la posición $\theta$. El resorte tiene rigidez $k$ y su longitud no estirada es de $2L$. El rodillo entra en contacto con la porción superior o inferior de la guía horizontal.




Prob. 6-134

*6-136. Determine la fuerza en los elementos $AB$, $AD$ y $AC$ de la armadura espacial y establezca si los elementos están en tensión o en compresión.




Prob. 6-136



Estas varillas reforzadas se encajonarán en concreto a fin de crear una columna de construcción. Las cargas internas desarrolladas dentro del material resisten la carga externa que se colocará sobre la columna.

# Fuerzas internas

7

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mostrar cómo se usa el método de secciones para determinar las cargas internas en un elemento.
- Generalizar este procedimiento por medio de la formulación de ecuaciones que puedan graficarse, de modo que describan el corte y el momento internos a través de un elemento.
- Analizar las fuerzas y estudiar la geometría de los cables que sostienen una carga.

## 7.1 Fuerzas internas desarrolladas en elementos estructurales

Para diseñar un elemento estructural o mecánico es necesario conocer la carga que actúa dentro de él para asegurarnos de que el material puede resistir esta carga. Las cargas internas pueden determinarse por el *método de secciones*. Para ilustrar este método, considere la viga en voladizo que se muestra en la figura 7-1*a*. Si se deben determinar las cargas internas que actúan en la sección transversal en el punto *B*, entonces se debe pasar por la viga una sección imaginaria *a*-*a*, perpendicular al eje de la viga a través del punto *B*, que separa la viga en dos segmentos. Las cargas internas que actúan en *B* quedarán expuestas y se volverán *externas* en el diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura 7-1*b*.

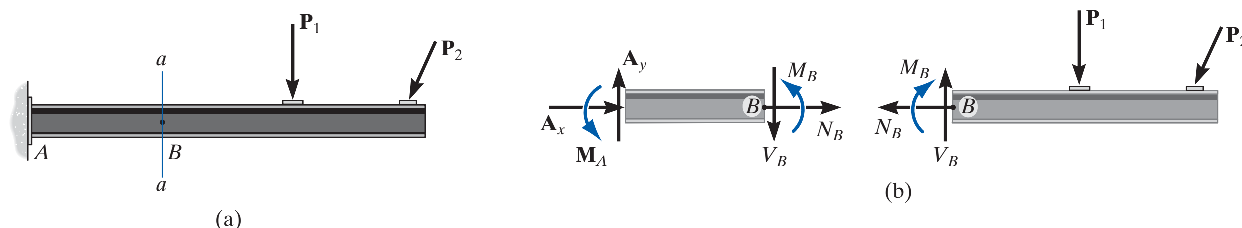


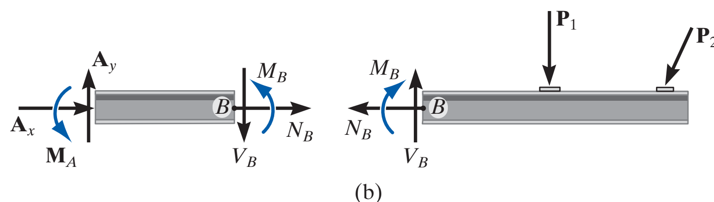

Fig. 7-1





En cada caso, el eslabón de la retroexcavadora es un elemento de dos fuerzas. En la fotografía de arriba está sometido a flexión y a carga axial en su centro. Al colocar el elemento en posición recta, como en la fotografía inferior, en él sólo actúa una fuerza axial.






(b)

**Fig. 7-1**

La componente de fuerza $\mathbf{N}_B$ que actúa en *perpendicular* a la sección transversal se denomina *fuerza normal*. La componente de fuerza $\mathbf{V}_B$ que es tangente a la sección transversal se llama *fuerza cortante* y el momento de par $\mathbf{M}_B$ se conoce como *momento flexionante*. Las componentes de fuerza evitan la traslación relativa entre los dos segmentos, y el momento de par evita la rotación relativa. De acuerdo con la tercera ley de Newton, estas cargas pueden actuar en direcciones opuestas sobre cada segmento, como se muestra en la figura 7-1*b*. Éstas pueden determinarse al aplicar las ecuaciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre de cualquier segmento. Sin embargo, en este caso el segmento derecho es la mejor opción debido a que no involucra las reacciones de soporte desconocidas en $A$. Una solución directa para $\mathbf{N}_B$ se obtiene al aplicar $\Sigma F_x = 0$, $\mathbf{V}_B$ se obtiene de $\Sigma F_y = 0$ y $\mathbf{M}_B$ se puede obtener al aplicar $\Sigma M_B = 0$, ya que los momentos de $\mathbf{N}_B$ y $\mathbf{V}_B$ con respecto a $B$ son iguales a cero.

En dos dimensiones hemos demostrado que existen tres cargas resultantes internas, figura 7-2*a*; sin embargo, en tres dimensiones actuarán una fuerza interna general y un momento de par resultante en la sección. Las componentes $x$, $y$, $z$ de estas cargas se muestran en la figura 7-2*b*. Aquí $\mathbf{N}_y$ es la *fuerza normal*, y $\mathbf{V}_x$ y $\mathbf{V}_z$ son *componentes de fuerza cortante*. $\mathbf{M}_y$ es un *momento de torsión* o *de giro* y $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ son *componentes de momento flexionante*. Para la mayoría de las aplicaciones, estas *cargas resultantes* actuarán en el centro geométrico o centroide ($C$) del área de la sección transversal. Aunque por lo general la magnitud para cada carga será diferente en los distintos puntos a lo largo del eje del elemento, puede usarse siempre el método de secciones para determinar sus valores.

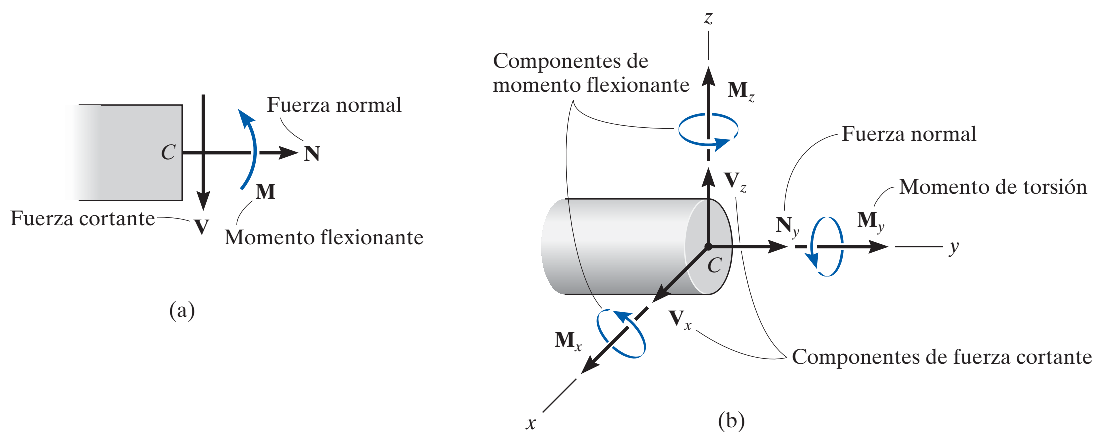
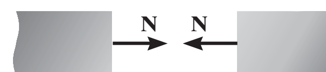


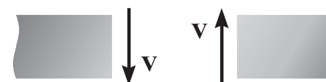

**Fig. 7-2**

**Convención de signos.** Los ingenieros suelen usar una convención de signos para expresar las tres cargas internas **N**, **V** y **M**. Aunque esta convención de signos puede asignarse de manera arbitraria, aquí se usará la de más amplia aceptación, figura 7-3. Se dice que la fuerza normal es positiva si crea *tensión*, una fuerza cortante positiva ocasionará que el segmento de viga sobre el que actúa gire en el sentido de las manecillas del reloj, y un momento flexionante positivo tenderá a doblar el segmento sobre el que actúa de una forma cóncava hacia arriba. Las cargas opuestas a las descritas anteriormente se consideran negativas.

Si el elemento está sometido a cargas externas tridimensionales, entonces las cargas internas suelen expresarse como positivas o negativas, de acuerdo con un sistema establecido de coordenadas $x$, $y$, $z$ como el que se muestra en la figura 7-2.



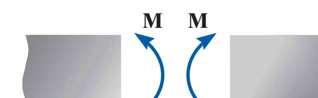

Fuerza normal positiva







Fuerza cortante positiva




Momento positivo




**Fig. 7-3**

## Procedimiento para el análisis

El método de secciones puede usarse para determinar las cargas internas en una ubicación específica de un elemento, por el siguiente procedimiento.

### Reacciones en los soportes.

- Antes de seccionar el elemento, puede ser necesario determinar primero las reacciones en sus soportes, de manera que las ecuaciones de equilibrio se usen para resolver las cargas internas sólo después de que el elemento esté seccionado.

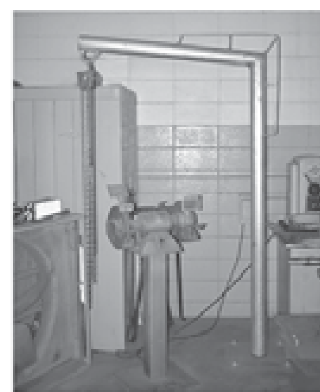
### Diagrama de cuerpo libre.

- Mantenga todas las cargas distribuidas, momentos de par y fuerzas que actúan sobre el elemento en sus *ubicaciones exactas*, luego pase una sección imaginaria por el elemento, perpendicular a su eje en el punto en que debe determinarse la carga interna.
- Una vez hecha la sección, trace un diagrama de cuerpo libre del segmento que tenga el menor número de cargas, e indique las componentes de la fuerza y el momento de par resultantes en la sección transversal que actúan en sus direcciones positivas de acuerdo con la convención de signos establecida.

### Ecuaciones de equilibrio.

- Hay que sumar los momentos en la sección. De esta manera se eliminan las fuerzas normal y cortante en la sección y se puede obtener una solución directa para el momento.
- Si la solución de las ecuaciones de equilibrio resulta en un escalar negativo, el sentido supuesto de la cantidad es contrario al del diagrama de cuerpo libre.

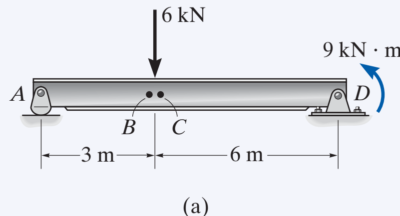




El diseñador de esta grúa de taller se dio cuenta de la necesidad de poner un refuerzo extra alrededor de la unión a fin de evitar una flexión interna grave en ésta cuando se suspenda una carga grande de la cadena del malacate.

## EJEMPLO 7.1

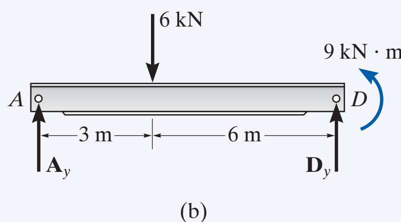
Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan justo a la izquierda, punto $B$, y justo a la derecha, punto $C$, de la fuerza de 6 kN aplicada sobre la viga de la figura 7-4*a*.




(a)

### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** En la figura 7-4*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. Al determinar las *reacciones externas*, observe que el momento de par de 9 kN · m es un vector libre, y por lo tanto se le puede colocar en *cualquier parte* del diagrama de cuerpo libre de la viga completa. Aquí determinaremos sólo $\mathbf{A}_y$, ya que los segmentos de la izquierda se usarán para el análisis.

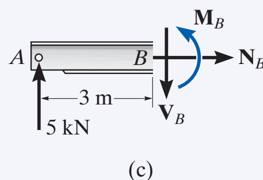



(b)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_D = 0; \quad 9\text{ kN}\cdot\text{m} + (6\text{ kN})(6\text{ m}) - A_y(9\text{ m}) = 0$$

$$A_y = 5\text{ kN}$$

**Diagramas de cuerpo libre.** En las figuras 7-4*c* y 7-4*d* se muestran los diagramas de cuerpo libre de los segmentos izquierdos $AB$ y $AC$ de la viga. En este caso, el momento de par de 9 kN · m *no se incluye* en esos diagramas ya que debe mantenerse en su *posición original* hasta *después* de que se haga la sección y se aísle el segmento apropiado.




(c)

**Ecuaciones de equilibrio.**

*Segmento AB*

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_B = 0 \qquad \textbf{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 5\text{ kN} - V_B = 0 \qquad V_B = 5\text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

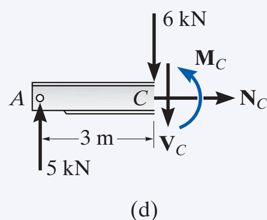
$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad -(5\text{ kN})(3\text{ m}) + M_B = 0 \qquad M_B = 15\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

*Segmento AC*

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C = 0 \qquad \textbf{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 5\text{ kN} - 6\text{ kN} - V_C = 0 \qquad V_C = -1\text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad -(5\text{ kN})(3\text{ m}) + M_C = 0 \qquad M_C = 15\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$




(d)

**Fig. 7-4**

**NOTA:** el signo negativo indica que $\mathbf{V}_C$ actúa en sentido opuesto al del diagrama de cuerpo libre. Además, el brazo de momento para la fuerza de 5 kN en ambos casos es aproximadamente de 3 m ya que $B$ y $C$ son "casi" coincidentes.

7

## EJEMPLO 7.2

Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto $C$ de la viga que se muestra la figura 7-5*a*.

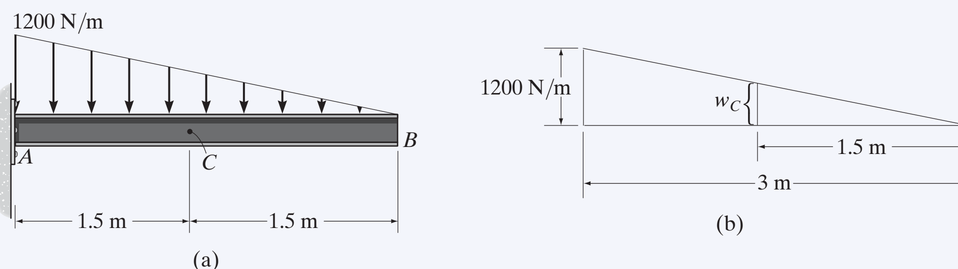
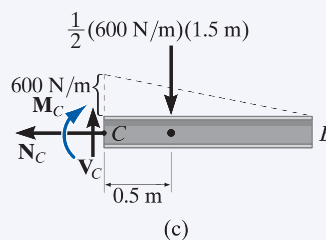



**Fig. 7-5**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** No es necesario encontrar las reacciones en el soporte $A$ ya que el segmento $BC$ de la viga puede usarse para determinar las cargas internas en $C$. La intensidad de la carga triangular distribuida en $C$ se determina por triángulos semejantes a partir de la geometría que se muestra en la figura 7-5*b*, es decir,




$$w_C = (1200 \text{ N/m})\left(\frac{1.5 \text{ m}}{3 \text{ m}}\right) = 600 \text{ N/m}$$

La carga distribuida que actúa sobre el segmento $BC$ puede reemplazarse ahora por su fuerza resultante, y su ubicación se indica en el diagrama de cuerpo libre, figura 7-5*c*.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_C - \tfrac{1}{2}(600 \text{ N/m})(1.5 \text{ m}) = 0$$

$$V_C = 450 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -M_C - \tfrac{1}{2}(600 \text{ N/m})(1.5 \text{ m})(0.5 \text{ m}) = 0$$

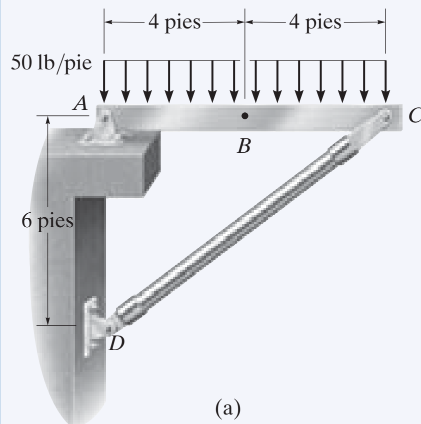
$$M_C = -225 \text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{M}_C$ actúa en sentido opuesto al que se muestra en el diagrama de cuerpo libre.

7

## EJEMPLO 7.3

Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto $B$ de la estructura de dos elementos que se muestra en la figura 7-6*a*.




(a)

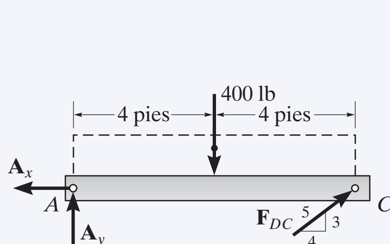
### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** En la figura 7-6*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de cada elemento. Como $CD$ es un elemento de dos fuerzas, las ecuaciones de equilibrio tienen que aplicarse sólo al elemento $AC$.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -400 \text{ lb } (4 \text{ pies}) + \left(\tfrac{3}{5}\right) F_{DC}\,(8 \text{ pies}) = 0 \quad F_{DC} = 333.3 \text{ lb}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad -A_x + \left(\tfrac{4}{5}\right)(333.3 \text{ lb}) = 0 \quad A_x = 266.7 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 400 \text{ lb} + \left(\tfrac{3}{5}\right)(333.3 \text{ lb}) = 0 \quad A_y = 200 \text{ lb}$$



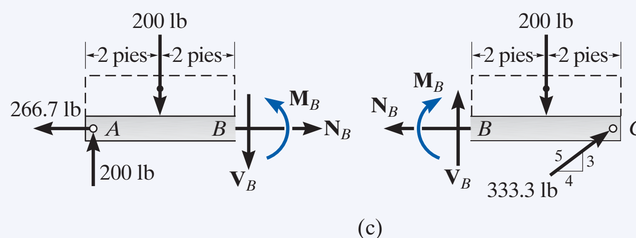

$\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{F}_{DC}$

$\mathbf{F}_{DC}$

$\mathbf{F}_{DC}$

(b)

**Fig. 7-6**




$\mathbf{M}_B$, $\mathbf{N}_B$, $\mathbf{V}_B$

(c)

**Diagramas de cuerpo libre.** Al pasar una sección imaginaria perpendicular al eje del elemento $AC$ a través del punto $B$ se obtienen los diagramas de cuerpo libre de los segmentos $AB$ y $BC$ de la figura 7-6*c*. Al construir esos diagramas es importante mantener la carga distribuida exactamente como está *hasta después de que se haga la sección*. Sólo entonces podrá ser reemplazada por una sola fuerza resultante.

**Ecuaciones de equilibrio.** Al aplicar las ecuaciones de equilibrio al segmento $AB$, tenemos

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad N_B - 266.7 \text{ lb} = 0 \quad N_B = 267 \text{ lb} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 200 \text{ lb} - 200 \text{ lb} - V_B = 0 \quad V_B = 0 \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

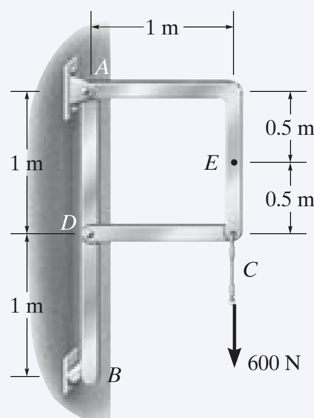
$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad M_B - 200 \text{ lb } (4 \text{ pies}) + 200 \text{ lb } (2 \text{ pies}) = 0$$

$$M_B = 400 \text{ lb} \cdot \text{pie} \quad \textbf{\textit{Resp.}}$$

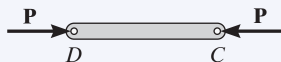
**NOTA:** como un ejercicio, trate de obtener los mismos resultados mediante el segmento $BC$.

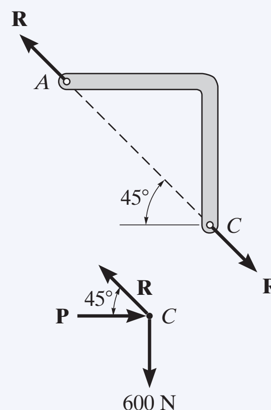
## EJEMPLO 7.4

Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto $E$ de una estructura que está cargada de la manera que se muestra en la figura 7-7$a$.




(a)




(b)

### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** Por inspección, los elementos $AC$ y $CD$ son elementos de dos fuerzas, figura 7-7$b$. Para determinar las cargas internas en $E$, primero debemos determinar la fuerza **R** que actúa en el extremo del elemento $AC$. Para obtener esto analizaremos el equilibrio del pasador ubicado en $C$.

Sumando fuerzas en la dirección vertical sobre el pasador, figura 7-7$b$, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad R \text{ sen } 45^\circ - 600 \text{ N} = 0 \qquad R = 848.5 \text{ N}$$

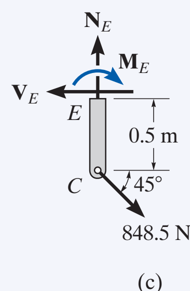
**Diagrama de cuerpo libre.** En la figura 7-7$c$ se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento $CE$.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 848.5 \cos 45^\circ \text{ N} - V_E = 0 \quad V_E = 600 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -848.5 \text{ sen } 45^\circ \text{ N} + N_E = 0 \quad N_E = 600 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \quad 848.5 \cos 45^\circ \text{ N}(0.5 \text{ m}) - M_E = 0 \quad M_E = 300 \text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

**Fig. 7-7**

**NOTA:** estos resultados indican un diseño pobre. El elemento $AC$ debería ser *recto* (de $A$ a $C$) para que se *elimine* la flexión dentro del elemento. Si $AC$ fuera recto, entonces la fuerza interna generaría sólo tensión en el elemento.

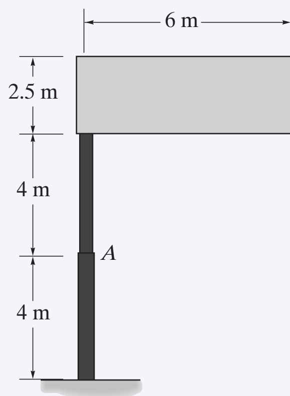
7

## EJEMPLO 7.5

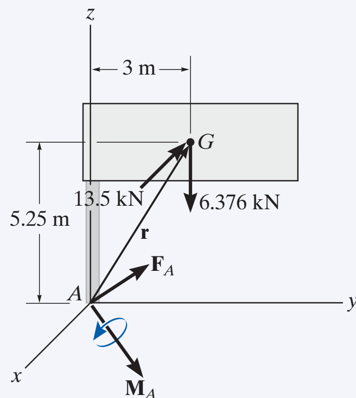
El letrero uniforme de la figura 7-8*a* tiene una masa de 650 kg y está sostenido mediante la columna empotrada. Los códigos de diseño indican que la carga de viento máxima uniforme esperada que ocurrirá en el área donde se localiza el letrero es de 900 Pa. Determine las cargas internas en $A$.



(a)




(b)




(c)

**Fig. 7-8**

### SOLUCIÓN

En la figura 7-8*b* se muestra el modelo idealizado para el letrero. Aquí se indican las dimensiones necesarias. Podemos considerar el diagrama de cuerpo libre de una sección arriba del punto $A$, ya que ahí no están involucradas las reacciones de soporte.

**Diagrama de cuerpo libre.** El letrero tiene un peso de $W = 650(9.81)\text{ N} = 6.376\text{ kN}$, y el viento genera una fuerza resultante de $F_w = 900\text{ N/m}^2(6\text{ m})(2.5\text{ m}) = 13.5\text{ kN}$ que es perpendicular a la cara del letrero. Estas cargas se muestran en el diagrama de cuerpo libre, figura 7-8*c*.

**Ecuaciones de equilibrio.** Como el problema es tridimensional, se usará un análisis vectorial.

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_A - 13.5\mathbf{i} - 6.376\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_A = \{13.5\mathbf{i} + 6.38\mathbf{k}\}\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{M}_A + \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_w + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

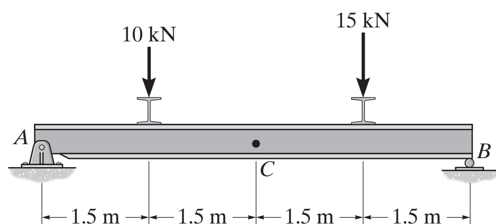
$$\mathbf{M}_A + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 5.25 \\ -13.5 & 0 & -6.376 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_A = \{19.1\mathbf{i} + 70.9\mathbf{j} - 40.5\mathbf{k}\}\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** aquí $\mathbf{F}_{A_z} = \{6.38\mathbf{k}\}$ kN representa la fuerza normal, mientras que $\mathbf{F}_{A_x} = \{13.5\mathbf{i}\}$ kN es la fuerza cortante. Además, el momento de torsión es $\mathbf{M}_{A_z} = \{-40.5\mathbf{k}\}$ kN · m, y el momento flexionante se determina a partir de sus componentes $\mathbf{M}_{A_x} = \{19.1\mathbf{i}\}$ kN · m y $\mathbf{M}_{A_y} = \{70.9\mathbf{j}\}$ kN · m; es decir, $(M_b)_A = \sqrt{(M_A)_x^2 + (M_A)_y^2} = 73.4$ kN · m.

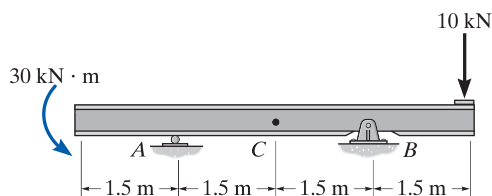
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F7-1.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



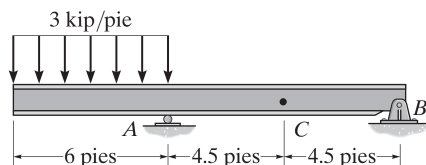

**F7-1**

**F7-2.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



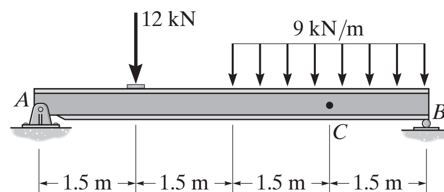

**F7-2**

**F7-3.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



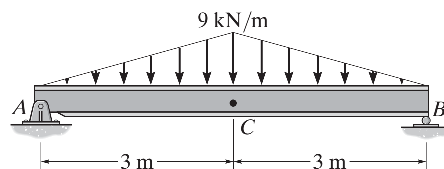

**F7-3**

**F7-4.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



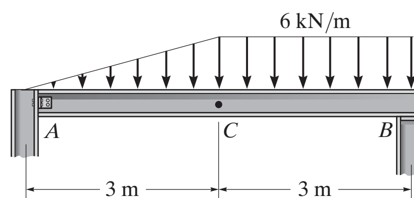

**F7-4**

**F7-5.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.




**F7-5**

**F7-6.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*. Suponga que en *A* hay una conexión de pasador y que *B* es un rodillo.

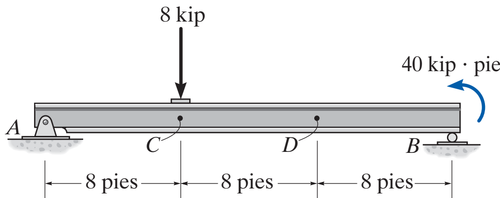



**F7-6**

7

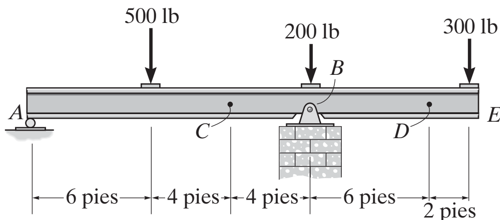
# PROBLEMAS

**•7-1.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en la viga en los puntos *C* y *D*. Suponga que el soporte en *B* es un rodillo. El punto *C* está localizado justo a la derecha de la carga de 8 kip.



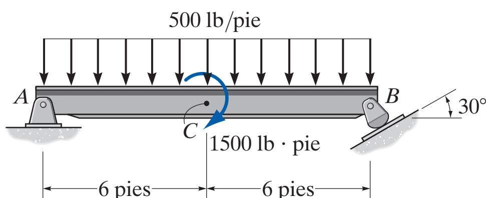

**Prob. 7-1**

**7-2.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *C* y *D*.



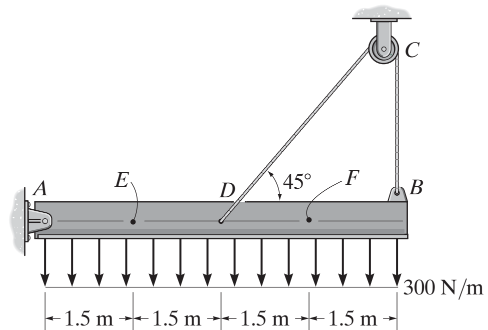

**Prob. 7-2**

**7-3.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C* en la viga simplemente apoyada. El punto *C* se localiza justo a la derecha del momento de par de 1500 lb · pie.



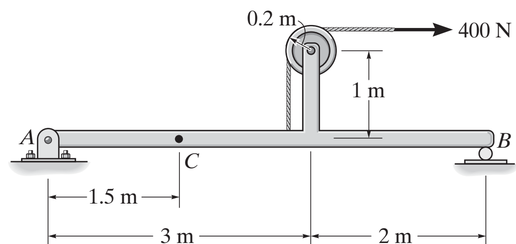

**Prob. 7-3**

***7-4.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *E* y *F* de la viga.



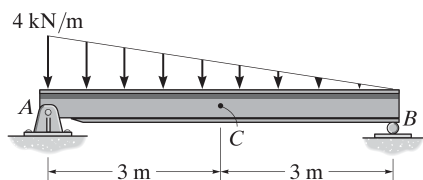

**Prob. 7-4**

**•7-5.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



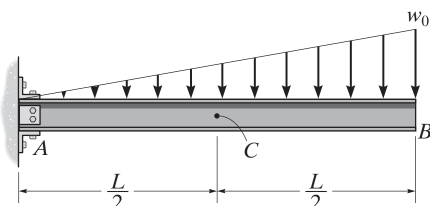

**Prob. 7-5**

**7-6.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C* de la viga simplemente apoyada.



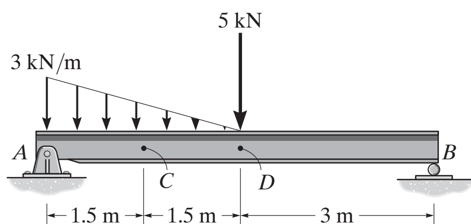

**Prob. 7-6**

**7-7.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C* de la viga en voladizo.



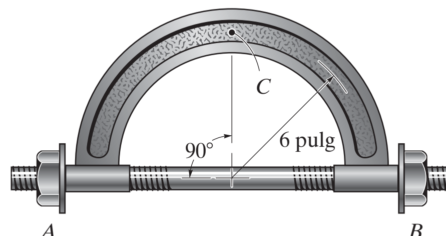

**Prob. 7-7**

***7-8.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* en la viga simplemente apoyada. El punto *D* está localizado justo a la izquierda de la fuerza de 5 kN.



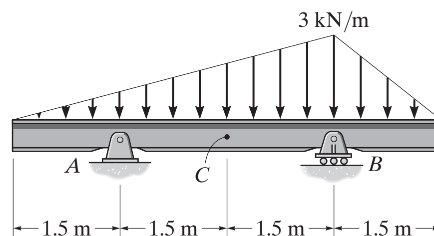

**Prob. 7-8**

**•7-9.** La espiga de tornillo está sometida a una tensión de 80 lb. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C*.



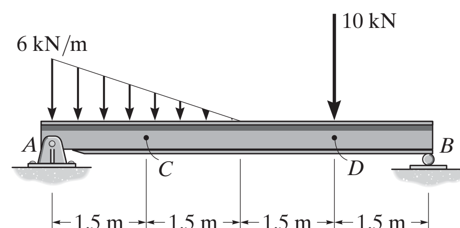

**Prob. 7-9**

**7-10.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *C* de la viga de doble saliente.



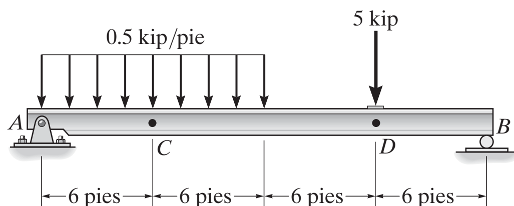

**Prob. 7-10**

**7-11.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* en la viga simplemente apoyada. El punto *D* se localiza justo a la izquierda de la carga concentrada de 10 kN.




**Prob. 7-11**

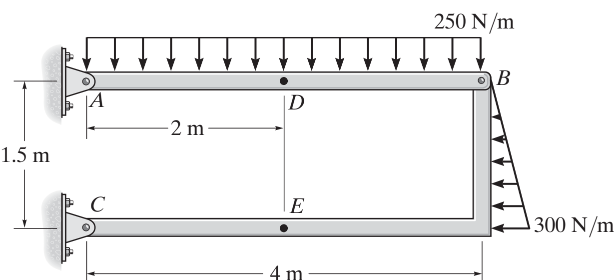
*7-12. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *C* y *D* de la viga. El punto *D* está justo a la derecha de la carga de 5 kip.




Prob. 7-12

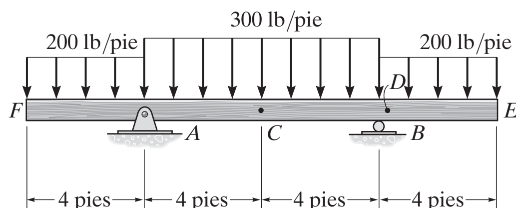
•7-13. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *D* del bastidor de dos elementos.

7-14. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *E* del bastidor de dos elementos.



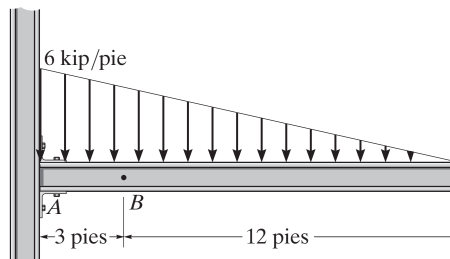

Probs. 7-13/14

7-15. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto *C* y en el punto *D*, que se localiza justo a la derecha del soporte de rodillo en *B*.



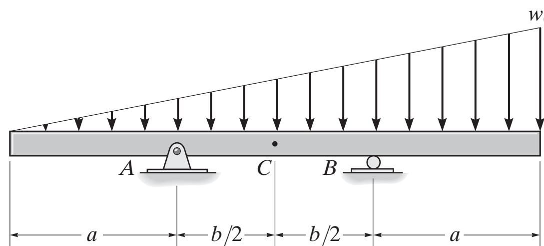

Prob. 7-15

*7-16. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto *B* de la viga en voladizo.



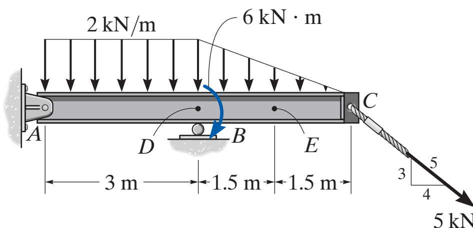

Prob. 7-16

•7-17. Determine la razón *a*/*b* para la cual la fuerza cortante será cero en el punto medio *C* de la viga con doble saliente.



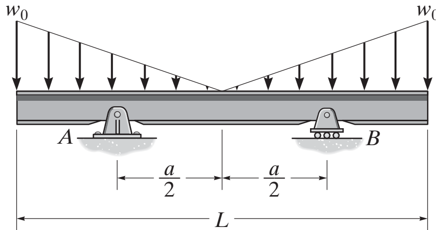

Prob. 7-17

7-18. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante, y momento flexionante en los puntos *D* y *E* en la viga en voladizo. El punto *D* se localiza justo a la izquierda del soporte de rodillo en *B*, donde actúa el momento de par.



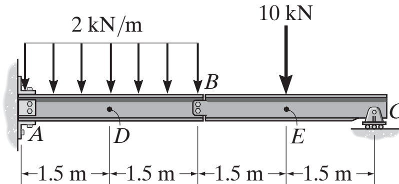

Prob. 7-18

**7-19.** Determine la distancia $a$ en términos de la longitud de la viga $L$ entre los soportes $A$ y $B$ colocados simétricamente, de manera que el momento flexionante interno en el centro de la viga es cero.



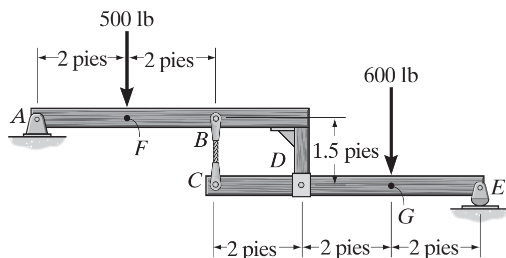

**Prob. 7-19**

***7-20.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $D$ y $E$ de la viga compuesta. El punto $E$ se localiza justo a la izquierda de la carga concentrada de 10 kN. Suponga que el soporte en $A$ está fijo y que la conexión en $B$ es un pasador.



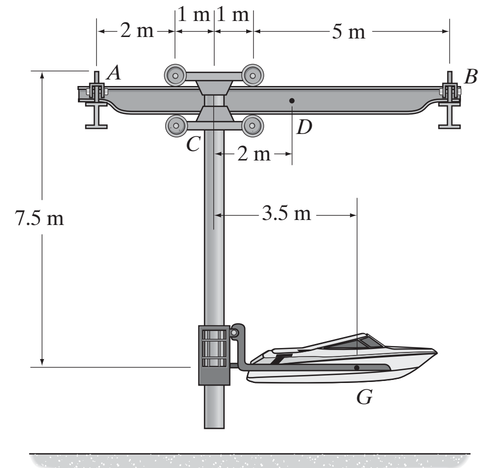

**Prob. 7-20**

**•7-21.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $F$ y $G$ de la viga compuesta. El punto $F$ se localiza justo a la derecha de la fuerza de 500 lb, mientras que el punto $G$ se ubica justo a la derecha de la fuerza de 600 lb.




**Prob. 7-21**

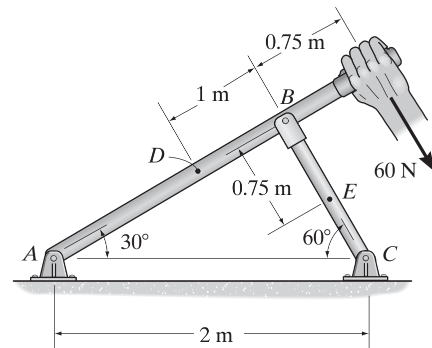
**7-22.** La grúa estibadora sostiene una lancha de 1.5 Mg con el centro de masa en $G$. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto $D$ del larguero. El carro puede rodar libremente a lo largo del riel del larguero y se ubica en la posición mostrada. En $A$ y $B$ sólo ocurren reacciones verticales.




**Prob. 7-22**

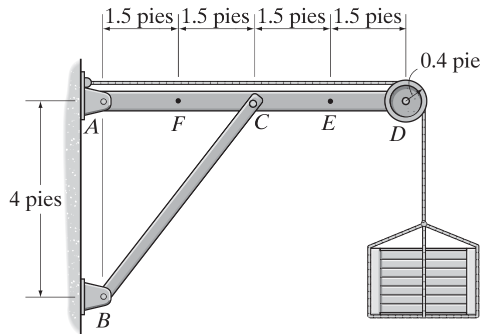
7

**7-23.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $D$ y $E$ de los dos elementos.



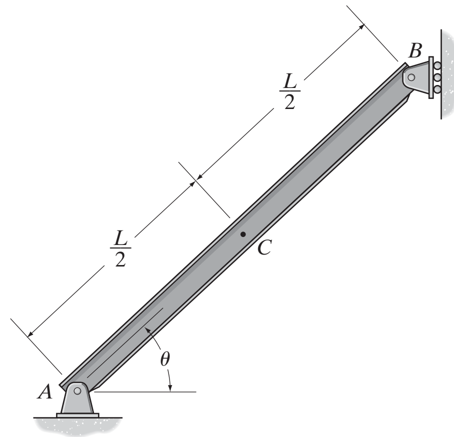

**Prob. 7-23**

***7-24.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $F$ y $E$ del bastidor. La caja pesa 300 lb.



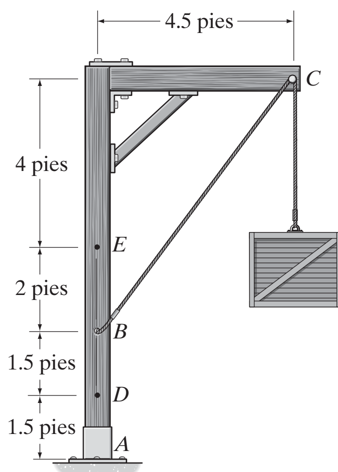

Prob. 7-24

**7-26.** La viga tiene un peso $w$ por unidad de longitud. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto $C$ debidos a su peso.



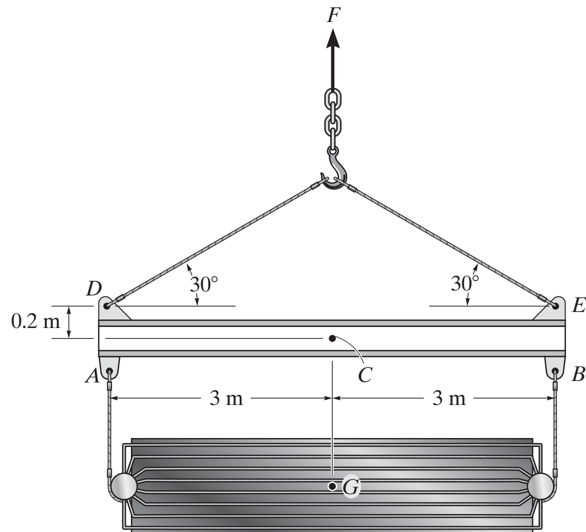

Prob. 7-26

**•7-25.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $D$ y $E$ del bastidor que sostiene la caja de 200 lb. Ignore el tamaño de la clavija lisa en $C$.




Prob. 7-25

**7-27.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en el punto $C$. La unidad de enfriamiento tiene una masa total de 225 kg con un centro de masa en $G$.

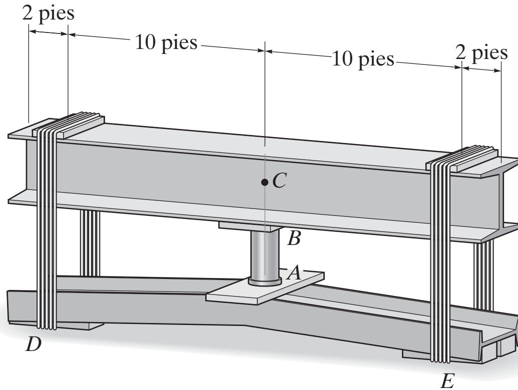



Prob. 7-27

7

*__7-28.__ El gato $AB$ se usa para enderezar la viga doblada $DE$ mediante el arreglo mostrado. Si la fuerza axial de compresión en el gato es de 5000 lb, determine el momento interno desarrollado en el punto $C$ de la viga superior. Ignore el peso de las vigas.

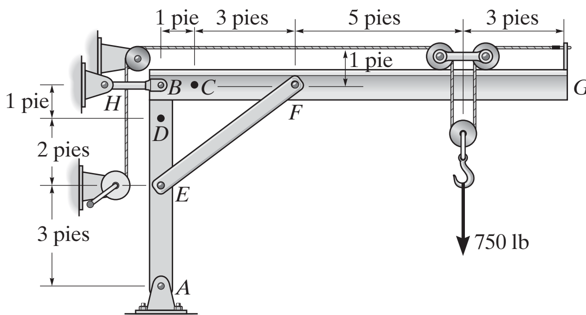
•**7-29.** Resuelva el problema 7-28 al suponer que cada viga tiene un peso uniforme de 150 lb/pie.




**Probs. 7-28/29**

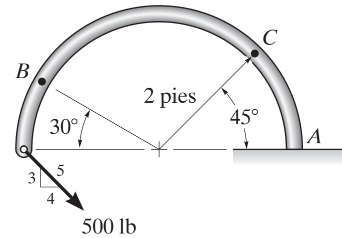
**7-30.** La grúa fija sostiene una carga de 750 lb, la cual pende de un cargador montado en la parte superior del brazo. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante de la grúa en el punto $C$ del brazo, cuando el cargador está en la posición mostrada. Los elementos de la grúa están unidos mediante pasadores en $B$, $E$ y $F$ y se sostienen mediante un eslabón corto $BH$.

**7-31.** La grúa fija sostiene una carga de 750 lb, la cual pende de un cargador montado en la parte superior del brazo. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto $D$ de la columna, cuando el cargador está en la posición mostrada. Los elementos de la grúa están unidos mediante pasadores en $B$, $E$ y $F$ y se sostienen mediante un eslabón corto $BH$.



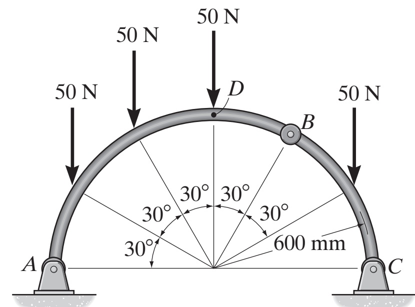

**Probs. 7-30/31**

*__7-32.__ Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que actúan en los puntos $B$ y $C$ sobre la barra curva.




**Prob. 7-32**

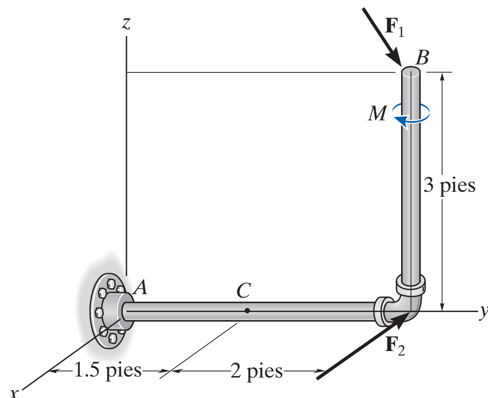
•**7-33.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto $D$ que se encuentra ubicado justo a la derecha de la fuerza de 50 N.




**Prob. 7-33**

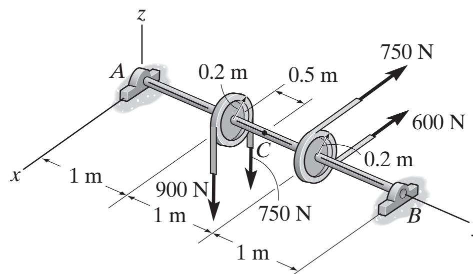
7

**7-34.** Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en el punto $C$ del ensamble de tubería. Ignore el peso de los tubos. La carga es $\mathbf{F}_1 = \{-24\mathbf{i} - 10\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{-80\mathbf{i}\}$ lb y $\mathbf{M} = \{-30\mathbf{k}\}$ lb · pie.




**Prob. 7-34**

**•7-37.** La flecha está soportada por una chumacera de empuje en $A$ y una chumacera lisa en $B$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en el punto $C$.

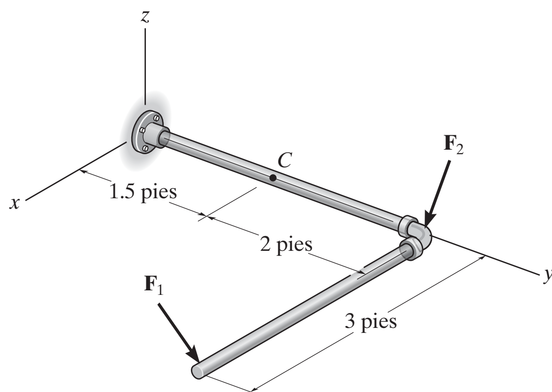



**Prob. 7-37**

**7-35.** Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en una sección que pasa por el punto $C$ del ensamble de tubería. No tome en cuenta el peso de los tubos. Considere $\mathbf{F}_1 = \{350\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{150\mathbf{i} - 300\mathbf{k}\}$ lb.

7

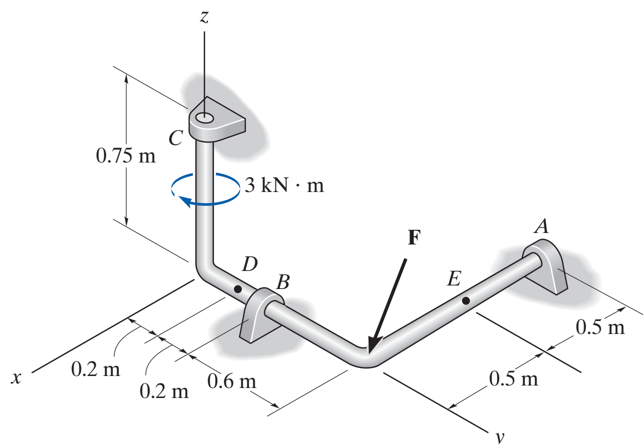
***7-36.** Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en una sección que pasa por el punto $C$ del ensamble de tubería. No tome en cuenta el peso de los tubos. Considere $\mathbf{F}_1 = \{-80\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ lb y $\mathbf{F}_2 = \{250\mathbf{i} - 150\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}$ lb.




**Probs. 7-35/36**

**7-38.** Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en el punto $D$ de la barra. Hay chumaceras lisas en $A$, $B$ y $C$. Considere $\mathbf{F} = \{7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}$ kN.

**7-39.** Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de la carga interna en el punto $E$ de la barra. Considere $\mathbf{F} = \{7\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\}$ kN.




**Probs. 7-38/39**

# *7.2 Ecuaciones y diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante

Las *vigas* son elementos estructurales diseñados para soportar cargas aplicadas de manera perpendicular a sus ejes. En general, las vigas son largas y rectas y tienen un área de sección transversal constante. A menudo, se clasifican con respecto a cómo están soportadas. Por ejemplo, una *viga simplemente apoyada* es aquella que está articulada en un extremo y sostenida por un rodillo en el otro, figura 7-9*a*, mientras que una *viga en voladizo* está fija o empotrada en un extremo y libre en el otro. El diseño real de una viga requiere un conocimiento detallado de la *variación* de la fuerza cortante interna $V$ y del momento flexionante $M$ que actúan en *cada punto* a lo largo del eje de la viga.*



Para ahorrar material y por lo tanto producir un diseño eficiente, estas vigas, también llamadas largueros, están ahusadas, ya que el momento interno en la viga será mayor en los soportes, o apoyos, que en el centro del claro.

Estas *variaciones* de $V$ y $M$ a lo largo de la viga pueden obtenerse por el método de secciones analizado en la sección 7.1. Sin embargo, en este caso es necesario seccionar la viga a una distancia arbitraria $x$ de un extremo para después aplicar las ecuaciones de equilibrio al segmento que tiene la longitud $x$. Al hacer esto es posible obtener $V$ y $M$ como funciones de $x$.

En general, las funciones de fuerza cortante y de momento flexionante serán discontinuas, o sus pendientes serán discontinuas en puntos donde una carga distribuida cambia o donde se aplican fuerzas o momentos de par concentrados. Debido a esto, dichas funciones deben determinarse para *cada segmento* de la viga localizado entre dos discontinuidades de la carga. Por ejemplo, los segmentos que tienen longitudes $x_1$, $x_2$ y $x_3$, tendrán que usarse para describir la variación de $V$ y $M$ en toda la longitud de la viga en la figura 7-9*a*. Estas funciones serán válidas *sólo* dentro de las regiones desde $O$ hasta $a$ para $x_1$, de $a$ a $b$ para $x_2$ y de $b$ a $L$ para $x_3$. Si se grafican las funciones resultantes de $x$, las gráficas se denominan *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flexionante*, figura 7-9*b* y figura 7-9*c*, respectivamente.

7

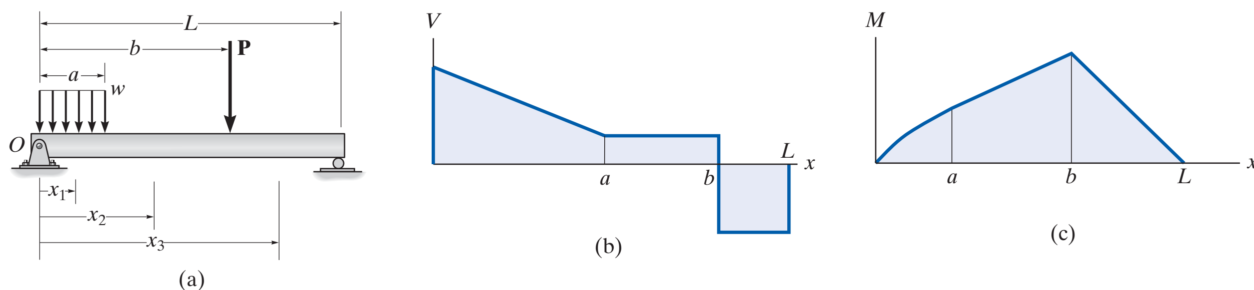
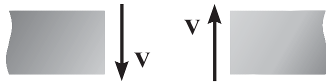



**Fig. 7-9**

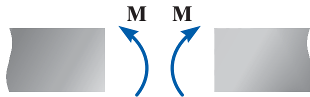
*La fuerza normal interna no se considera por dos razones. En la mayoría de los casos, las cargas aplicadas a una viga actúan de manera perpendicular al eje de la viga y, por lo tanto, producen sólo una fuerza cortante y un momento flexionante internos. Para propósitos de diseño, la resistencia de la viga a la fuerza cortante, y en particular a la flexión, es más importante que su capacidad de resistir una fuerza normal.







Corte (sentido) positivo




Momento positivo




Convención de signos en una viga

**Fig. 7-10**

7



Este brazo remolcador extendido debe resistir cargas, tanto flexionantes como cortantes, en toda su longitud debido al peso del vehículo. Para que el brazo esté bien diseñado es necesario conocer la variación de estas cargas.

## Procedimiento para el análisis

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para una viga pueden construirse con el siguiente procedimiento.

### Reacciones en los soportes.

- Determine todas las fuerzas y los momentos de par reactivos que actúan sobre la viga, y descomponga todas las fuerzas en componentes que actúan en forma perpendicular y paralela al eje de la viga.

### Funciones de fuerza cortante y de momento flexionante.

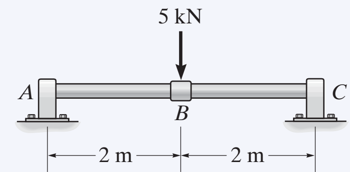
- Especifique coordenadas $x$ separadas cuyo origen está en el extremo izquierdo de la viga y que se extienden a regiones de la viga *entre* fuerzas y/o momentos de par concentrados, o donde la carga distribuida sea continua.
- Seccione la viga en cada distancia $x$ y trace el diagrama de cuerpo libre de uno de los segmentos. Asegúrese de que **V** y **M** se muestren al actuar en sus *sentidos positivos*, de acuerdo con la convención de signos dada en la figura 7-10.
- La fuerza cortante $V$ se obtiene al sumar fuerzas perpendiculares al eje de la viga.
- El momento flexionante $M$ se obtiene al sumar momentos con respecto al extremo seccionado del segmento.

### Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

- Grafique el diagrama de fuerza cortante ($V$ contra $x$) y el diagrama de momento flexionante ($M$ contra $x$). Si los valores calculados de las funciones que describen $V$ y $M$ son *positivos*, se grafican sobre el eje $x$, en tanto que los valores *negativos* se grafican debajo del eje $x$.
- Por lo general, es conveniente graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante directamente debajo del diagrama de cuerpo libre de la viga.

## EJEMPLO 7.6

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha que se muestra en la figura 7-11*a*. El soporte en *A* es una chumacera de empuje y el soporte en *C* es una chumacera lisa.

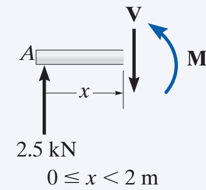


(a)

### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** En la figura 7-11*d* se muestran las reacciones en los soportes sobre el diagrama de cuerpo libre de la flecha.

**Funciones de fuerza cortante y de momento flexionante.** La flecha se secciona a una distancia arbitraria *x* del punto *A*, la cual se extiende dentro de la región *AB*, y el diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo se muestra en la figura 7-11*b*. Se supone que las incógnitas **V** y **M** actúan en el *sentido positivo* sobre la cara derecha del segmento de acuerdo con la convención de signos establecida. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio resulta



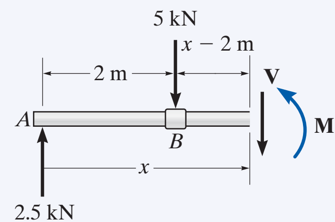
$0 \leq x < 2$ m

(b)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = 2.5 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M = 2.5x \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

En la figura 7-11*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre para un segmento izquierdo de la flecha que se extiende una distancia *x* dentro de la región *BC*. Como siempre, **V** y **M** se presentan en acción en el sentido positivo. Por lo tanto,



$2 \text{ m} < x \leq 4$ m

(c)

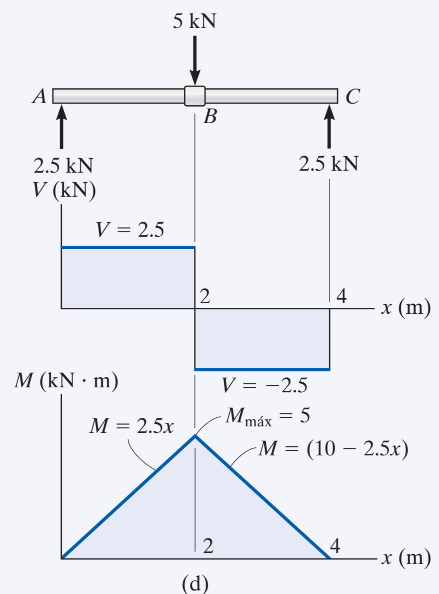
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2.5 \text{ kN} - 5 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = -2.5 \text{ kN} \qquad (3)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + 5 \text{ kN}(x - 2 \text{ m}) - 2.5 \text{ kN}(x) = 0$$

$$M = (10 - 2.5x) \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad (4)$$

**Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.** Cuando se grafican las ecuaciones de la 1 a la 4 dentro de las regiones en que son válidas, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante que se muestran en la figura 7-11*d*. El diagrama de fuerza cortante indica que la fuerza cortante interna es siempre de 2.5 kN (positiva) dentro del segmento de flecha *AB*. Justo a la derecha del punto *B*, la fuerza cortante cambia de signo y permanece en el valor constante de −2.5 kN para el segmento *BC*. El diagrama de momento comienza en cero, se incrementa linealmente hasta el punto *B* en $x = 2$ m, donde $M_{máx} = 2.5 \text{ kN}(2 \text{ m}) = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, y después disminuye de nuevo a cero.

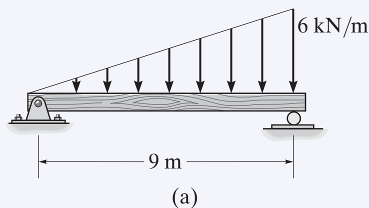


(d)

**Fig. 7-11**

**NOTA:** en la figura 7-11*d* se ve que la gráfica de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante es discontinua en los puntos donde actúa una fuerza concentrada, es decir, en los puntos *A*, *B* y *C*. Por esta razón, como se indicó antes, es necesario expresar por separado las funciones de fuerza cortante y de momento flexionante para regiones entre cargas concentradas. Sin embargo, debe observarse que todas las discontinuidades de carga son matemáticas, y surgen de la *idealización de una fuerza concentrada y de un momento de par*. Físicamente, las cargas siempre se aplican sobre un área finita, y si la variación real de la carga pudiera tomarse en cuenta, los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante serían continuos sobre toda la longitud de la flecha.

## EJEMPLO 7.7

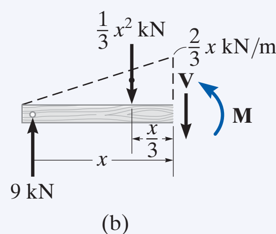



Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga de la figura 7-12*a*.

### SOLUCIÓN

**Reacciones en los soportes.** En la figura 7-12*c* se muestran las reacciones en los soportes sobre el diagrama de cuerpo libre de la viga.

**Funciones de fuerza cortante y de momento flexionante.** En la figura 7-12*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre para un segmento izquierdo de la viga que tiene longitud $x$. Por triángulos semejantes, la carga distribuida que actúa en el extremo de este segmento tiene una intensidad de $w/x = 6/9$ o $w = (2/3)x$. Esta carga se reemplaza por una fuerza resultante *después* de que el segmento se aísla como un diagrama de cuerpo libre. La *magnitud* de la fuerza resultante es igual a $\frac{1}{2}(x)\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2$. Esta fuerza *actúa a través del centroide* del área de carga distribuida, a una distancia de $\frac{1}{3}x$ desde el extremo derecho. Al aplicar las dos ecuaciones de equilibrio resulta




$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 9 - \frac{1}{3}x^2 - V = 0$$

$$V = \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) \text{kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + \frac{1}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right) - 9x = 0$$

$$M = \left(9x - \frac{x^3}{9}\right) \text{kN}\cdot\text{m} \qquad (2)$$

**Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.** Los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante de la figura 7-12*c* se obtienen al graficar las ecuaciones 1 y 2.

El punto de *fuerza cortante cero* se puede encontrar por la ecuación 1:

$$V = 9 - \frac{x^2}{3} = 0$$
$$x = 5.20 \text{ m}$$

**NOTA:** en la sección 7.3 se verá que este valor de $x$ representa el punto sobre la viga donde ocurre el *momento máximo*. Con la ecuación 2, tenemos

$$M_{\text{máx}} = \left(9(5.20) - \frac{(5.20)^3}{9}\right) \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$= 31.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

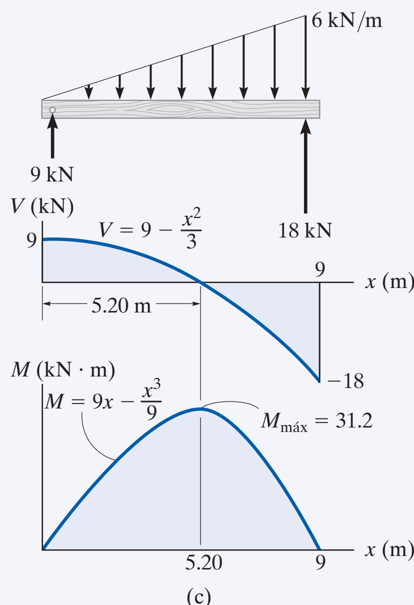
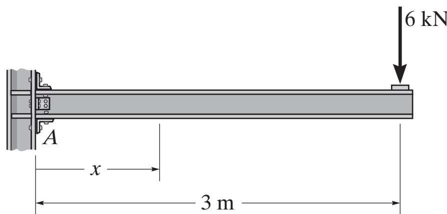



**Fig. 7-12**

7

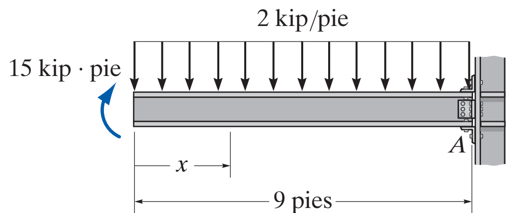
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F7-7.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.



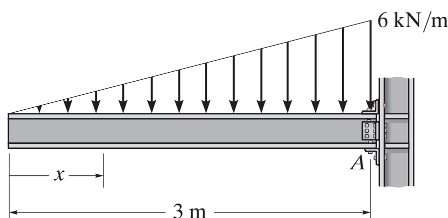

**F7-7**

**F7-8.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.



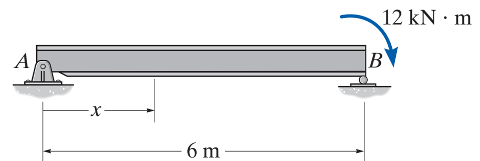

**F7-8**

**F7-9.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.



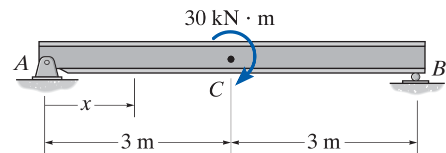

**F7-9**

**F7-10.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.



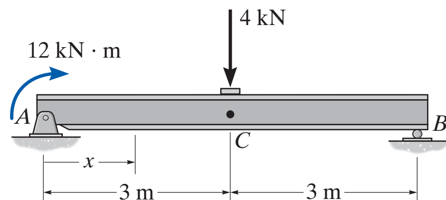

**F7-10**

**F7-11.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, donde $0 \leq x < 3$ m y $3$ m $< x \leq 6$ m, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.




**F7-11**

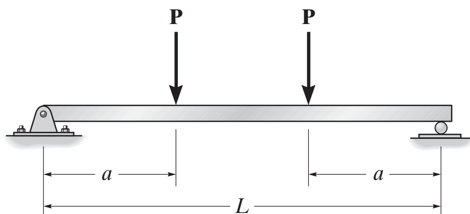
**F7-12.** Determine la fuerza cortante y el momento flexionante como funciones de $x$, donde $0 \leq x < 3$ m y $3$ m $< x \leq 6$ m, después trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.




**F7-12**

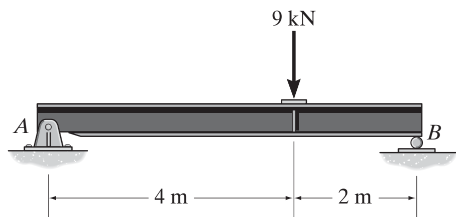
# PROBLEMAS

*__7-40.__ Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga (*a*) en términos de los parámetros mostrados; (*b*) considere $P = 800$ lb, $a = 5$ pies, $L = 12$ pies.



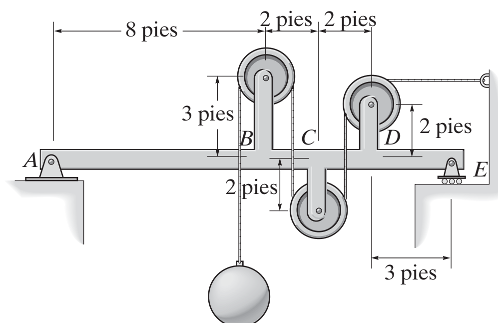

**Prob. 7-40**

•**7-41.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



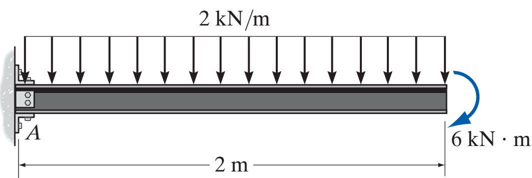

**Prob. 7-41**

**7-42.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga *ABCDE*. Todas las poleas tienen radio de 1 pie. Ignore el peso de la viga y del arreglo de poleas. La carga pesa 500 lb.




**Prob. 7-42**

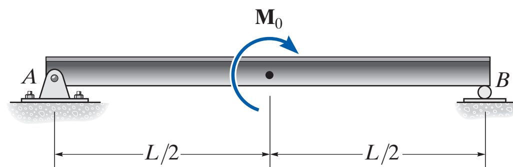
**7-43.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo.




**Prob. 7-43**

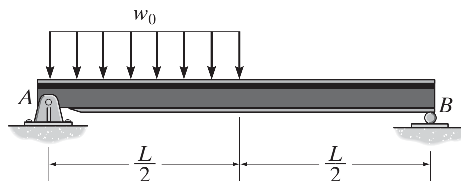
*__7-44.__ Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga (*a*) en términos de los parámetros mostrados; (*b*) considere $M_0 = 500$ N · m, $L = 8$ m.

•**7-45.** Si $L = 9$ m, la viga fallará cuando la máxima fuerza cortante sea $V_{\text{máx}} = 5$ kN o el máximo momento flexionante sea $M_{\text{máx}} = 22$ kN · m. Determine el momento de par $M_0$ más grande que soportará la viga.



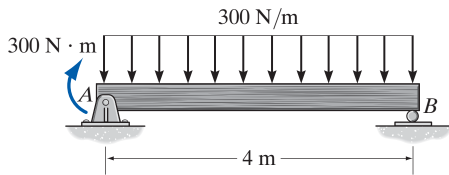

**Probs. 7-44/45**

**7-46.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



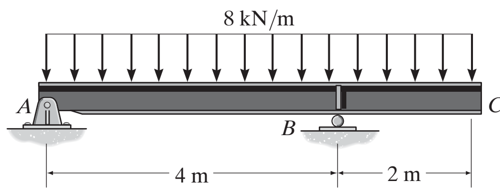

**Prob. 7-46**

**7-47.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



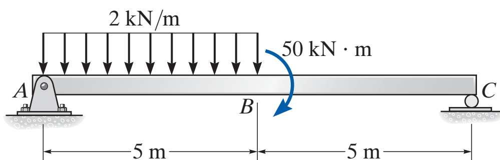

**Prob. 7-47**

***7-48.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga saliente.



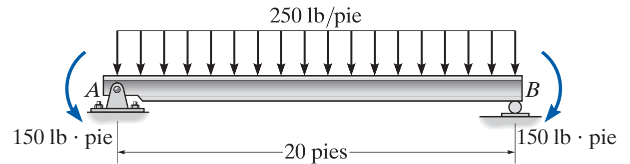

**Prob. 7-48**

•**7-49.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



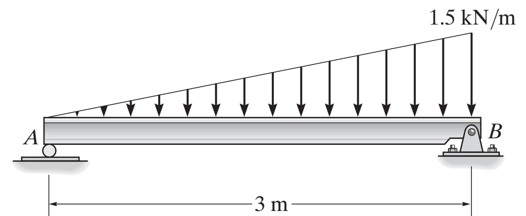

**Prob. 7-49**

**7-50.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



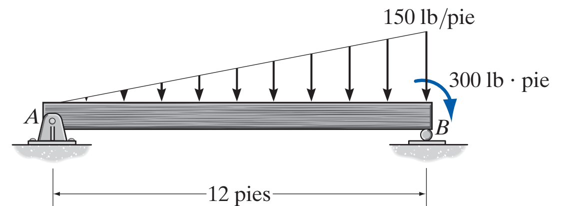

**Prob. 7-50**

**7-51.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



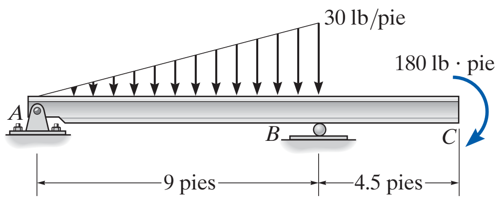

**Prob. 7-51**

***7-52.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



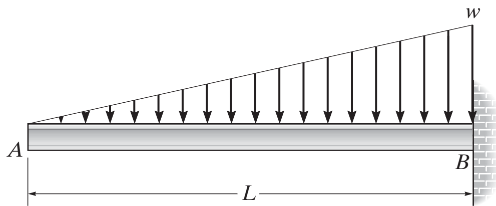

**Prob. 7-52**

**•7-53.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



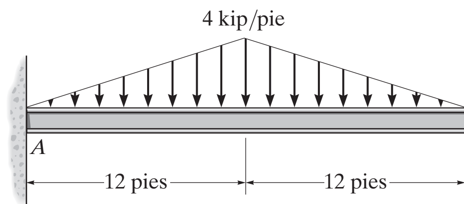

Prob. 7-53

**7-54.** Si $L = 18$ pies, la viga fallará cuando la máxima fuerza cortante sea $V_{máx} = 800$ lb o el máximo momento flexionante sea $M_{máx} = 1200$ lb · pie. Determine la intensidad $w$ más grande de la carga distribuida que soportará la viga.



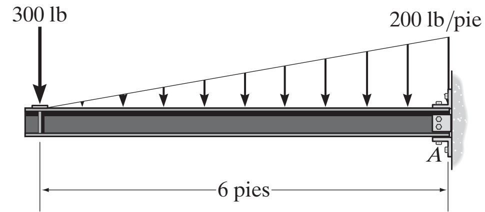

Prob. 7-54

**7-55.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



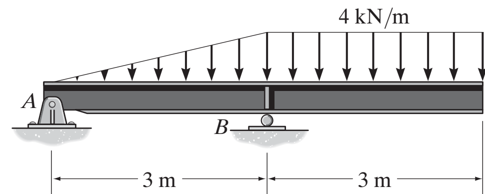

Prob. 7-55

***7-56.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo.



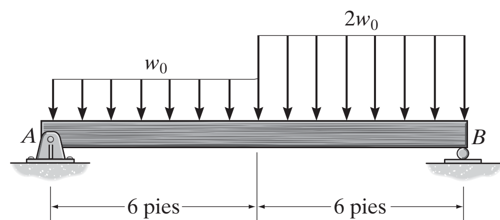

Prob. 7-56

**•7-57.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga de voladizo.




Prob. 7-57

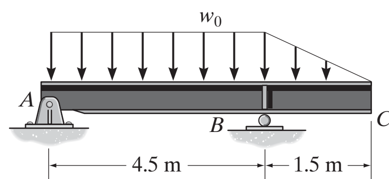
**7-58.** Determine la intensidad $w_0$ más grande de la carga distribuida que puede soportar la viga si ésta puede aguantar una fuerza cortante máxima de $V_{máx} = 1200$ lb y un momento flexionante máximo de $M_{máx} = 600$ lb · pie.




Prob. 7-58

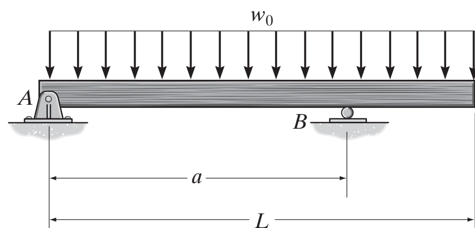
7

**7-59.** Determine la intensidad $w_0$ más grande de la carga distribuida que puede soportar la viga si ésta puede aguantar un momento flexionante máximo de $M_{máx} = 20$ kN · m y una fuerza cortante máxima de $V_{máx} = 80$ kN.



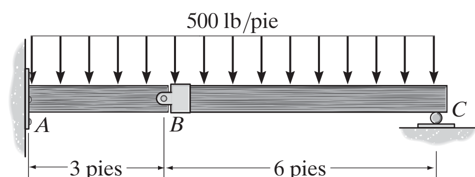

**Prob. 7-59**

***7-60.** Determine la colocación $a$ del soporte de rodillo $B$ de modo que el momento máximo dentro del claro $AB$ sea equivalente al momento en el soporte $B$.



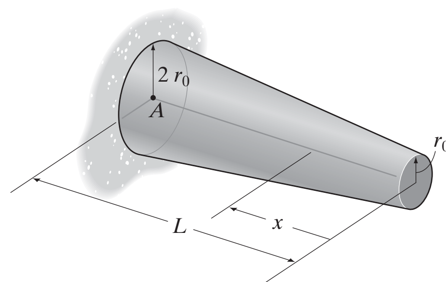

**Prob. 7-60**

**•7-61.** La viga compuesta tiene un soporte fijo en $A$, está conectada mediante un pasador en $B$ y se sostiene por medio de un rodillo en $C$. Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga.



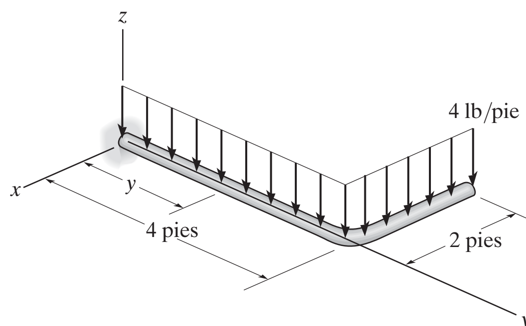

**Prob. 7-61**

**7-62.** El cono truncado se encuentra en voladizo desde el punto $A$. Si el cono está hecho de un material con un peso específico de $\gamma$, determine en el cono la fuerza cortante y el momento flexionante internos como funciones de $x$.



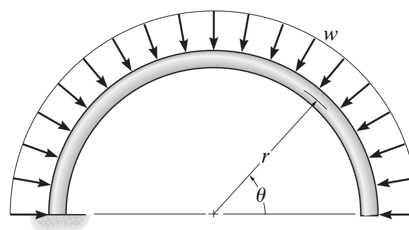

**Prob. 7-62**

**7-63.** Exprese las componentes de la fuerza cortante y del momento flexionante internos que actúan en la barra como una función de $y$, donde $0 \leq y \leq 4$ pies.




**Prob. 7-63**

***7-64.** Determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en la barra curva como una función de $\theta$.




**Prob. 7-64**

7

## *7.3 Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flexionante

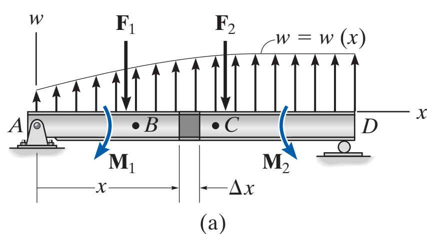


A fin de poder diseñar la viga que se usa para soportar estas líneas eléctricas, es importante trazar primero los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.

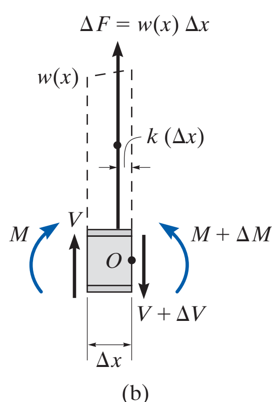
Si una viga está sometida a varias cargas concentradas, momentos de par y cargas distribuidas, el método para construir diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante analizado en la sección 7.2 puede resultar muy tedioso. En esta sección veremos un método más simple para construir esos diagramas —un método que se basa en las relaciones diferenciales entre la carga, la fuerza cortante y el momento flexionante.

**Carga distribuida.** Considere la viga $AD$ en la figura 7-13*a*, la cual está sometida a una carga arbitraria $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y momentos de par. En el siguiente análisis, la *carga distribuida* se considerará *positiva* cuando la *carga actúe hacia arriba* como se muestra. Un diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento de la viga de longitud $\Delta x$ se elige en un punto $x$ a lo largo de la viga que *no* esté sometida a una fuerza concentrada o momento de par, figura 7-13*b*. Por lo tanto, cualquier resultado que se obtenga no se aplica en puntos de carga concentrada. Se supone que la fuerza cortante y el momento flexionante internos mostrados en el diagrama de cuerpo libre actúan en *sentido positivo* de acuerdo con la convención de signos establecida. Observe que tanto la fuerza cortante como el momento flexionante que actúan sobre la cara derecha deben ser incrementados en una cantidad pequeña, finita, para mantener el segmento en equilibrio. La carga distribuida ha sido reemplazada por una fuerza resultante $\Delta F = w(x)\,\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ desde el extremo derecho, donde $0 < k < 1$ [por ejemplo, si $w(x)$ es *uniforme*, $k = \frac{1}{2}$].

7




(a)




(b)

**Fig. 7-13**

**Relación entre la carga distribuida y la fuerza cortante.** Si se aplica la ecuación de equilibrio de fuerzas, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = w(x)\Delta x$$

Al dividir entre $\Delta x$ y tomar $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{dV}{dx} = w(x) \tag{7-1}$$

pendiente del diagrama de fuerza cortante = intensidad de la carga distribuida

Si volvemos a escribir la ecuación anterior en la forma $dV = w(x)dx$ y realizamos una integración entre dos puntos $B$ y $C$ sobre la viga, vemos que

$$\Delta V = \int w(x)\, dx \qquad (7\text{-}2)$$

| Cambio en la fuerza cortante | = | Área bajo la curva de carga |
|---|---|---|

**Relación entre la fuerza cortante y el momento flexionante.** Si aplicamos la ecuación de equilibrio de momento con respecto al punto $O$ en el diagrama de cuerpo libre de la figura 7-13*b*, obtenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_0 = 0; \quad (M + \Delta M) - [w(x)\Delta x]\, k\Delta x - V\Delta x - M = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + k\, w(x)\Delta x^2$$

Al dividir ambos lados de esta ecuación entre $\Delta x$, y se toma $\Delta x \to 0$, resulta

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad (7\text{-}3)$$

| Pendiente del diagrama de momento flexionante | = | Fuerza cortante |
|---|---|---|

En particular, observe que el momento flexionante máximo absoluto $|M|_{\text{máx}}$ ocurre en el punto donde la pendiente $dM/dx = 0$, ya que es ahí donde la fuerza cortante es igual a cero.

Si la ecuación 7-3 se reescribe en la forma $dM = \int V\, dx$ y se integra entre dos puntos $B$ y $C$ sobre la viga, tenemos

$$\Delta M = \int V\, dx \qquad (7\text{-}4)$$

| Cambio en el momento flexionante | = | Área bajo el diagrama fuerza cortante |
|---|---|---|

Como se indicó antes, las ecuaciones anteriores no se aplican donde actúan una fuerza o un momento de par *concentrados*. Esos dos casos especiales crean *discontinuidades* en los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante y, en consecuencia, cada uno debe tratarse por separado.

**Fuerza.** En la figura 7-14*a* se muestra un diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de la viga de la figura 7-13*a*, tomado debajo de una de las fuerzas. Aquí, el equilibrio de fuerzas requiere

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \Delta V = F \qquad (7\text{-}5)$$

Puesto que el *cambio en la fuerza cortante es positivo*, el diagrama de fuerza cortante "saltará" *hacia arriba cuando* **F** *actúe hacia arriba* sobre la viga. De la misma forma, el salto en la fuerza cortante ($\Delta V$) es hacia abajo cuando **F** actúa hacia abajo.

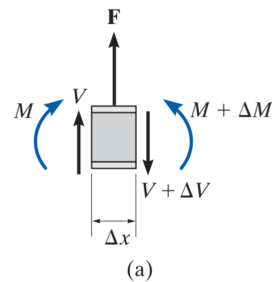



Fig. 7-14

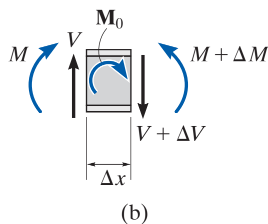



**Fig. 7-14**

**Momento de par.** Si retiramos un segmento de la viga de la figura 7-13*a* que esté localizado en el momento de par $\mathbf{M}_0$, resultará el diagrama de cuerpo libre de la figura 7-14*b*. En este caso, sea $\Delta x \rightarrow 0$, el equilibrio de momento requiere

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad \Delta M = M_0 \qquad (7\text{-}6)$$

Así, el *cambio en momento es positivo*, o el diagrama de momento flexionante "saltará" *hacia arriba si* $\mathbf{M}_0$ *es en el sentido de las manecillas del reloj*. De la misma forma, el salto $\Delta M$ es hacia abajo cuando $\mathbf{M}_0$ es en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las ecuaciones anteriores para la construcción de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Después de trabajar con estos ejemplos, se recomienda que los ejemplos 7.6 y 7.7 se resuelvan por este método.

## Puntos importantes

- La pendiente del diagrama de fuerza cortante en un punto es igual a la intensidad de la carga distribuida, donde la carga distribuida positiva es hacia arriba, esto es, $dV/dx = w(x)$.
- Si una fuerza concentrada actúa hacia arriba sobre la viga, la fuerza cortante saltará hacia arriba en la misma cantidad.
- El cambio en la fuerza cortante $\Delta V$ entre dos puntos es igual *al área* bajo la curva de carga distribuida entre los puntos.
- La pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante, esto es, $dM/dx = V$.
- El cambio en el momento $\Delta M$ entre dos puntos es igual al *área* bajo el diagrama de fuerza cortante entre los dos puntos.
- Si un momento de par en *el sentido de las manecillas del reloj* actúa sobre la viga, la fuerza cortante no será afectada; sin embargo, el diagrama de momento flexionante saltará hacia *arriba* en la misma cantidad que el momento.
- Los puntos de *fuerza cortante cero* representan puntos de *momento flexionante máximo o mínimo* ya que $dM/dx = 0$.
- Como se requieren dos integraciones de $w = w(x)$, para determinar primero el cambio en la fuerza cortante, $\Delta V = \int w(x)\,dx$, después para determinar el cambio en el momento flexionante, $\Delta M = \int V\,dx$, luego si la curva de carga $w = w(x)$ es un polinomio de grado $n$, $V = V(x)$ será una curva de grado $n + 1$, y $M = M(x)$ será una curva de grado $n + 2$.

7



Esta viga de concreto se usa para soportar el techo. Su tamaño y la colocación del refuerzo de acero en su interior pueden determinarse después de establecer los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

## EJEMPLO 7.8

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo de la figura 7-15*a*.

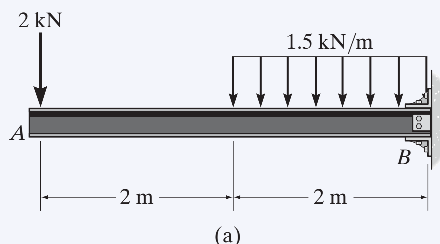
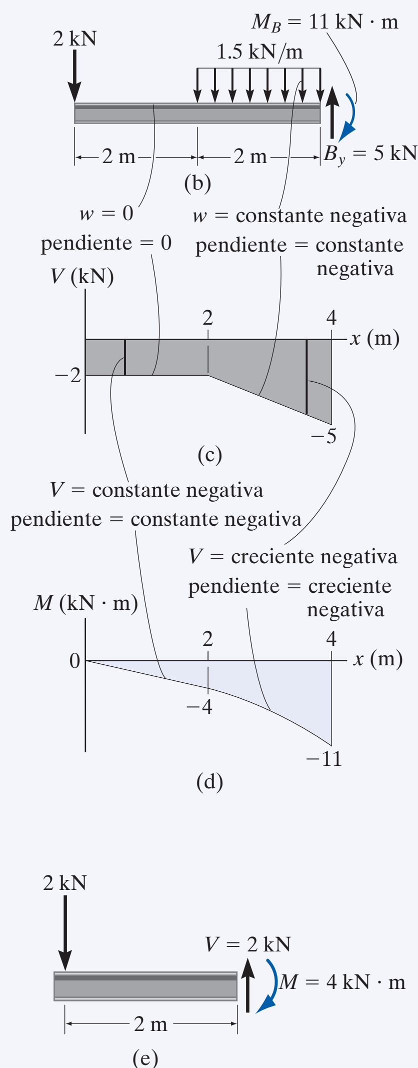



**Fig. 7-15**




### SOLUCIÓN

En la figura 7-15*b* se muestran las reacciones en el soporte fijo *B*.

**Diagrama cortante.** La fuerza cortante en el extremo *A* es de −2 kN. Este valor se grafica en $x = 0$, figura 7-15*c*. Observe cómo se construye el diagrama de fuerza cortante al seguir las pendientes definidas por la carga *w*. La fuerza cortante en $x = 4$ m es −5 kN, la reacción en la viga. Este valor se puede verificar si se encuentra el área bajo la carga distribuida; es decir,

$$V|_{x=4\text{ m}} = V|_{x=2\text{ m}} + \Delta V = -2\text{ kN} - (1.5\text{ kN/m})(2\text{ m}) = -5\text{ kN}$$

**Diagrama de momento flexionante.** El momento de fuerza cero en $x = 0$ se grafica en la figura 7-15*d*. La construcción del diagrama de momento flexionante se basa en conocer su pendiente que es igual a la fuerza cortante en cada punto. El cambio de momento flexionante desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m se determina a partir del área bajo el diagrama de fuerza cortante. Por consiguiente, el momento flexionante en $x = 2$ m es

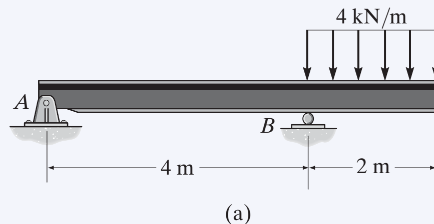
$$M|_{x=2\text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2\text{ kN}(2\text{ m})] = -4\text{ kN}\cdot\text{m}$$

Este mismo valor puede determinarse con el método de secciones, figura 7-15*e*.

7

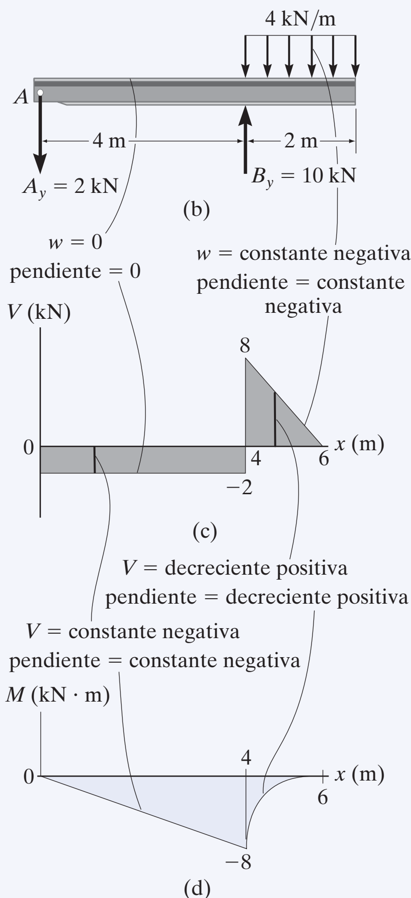
# EJEMPLO 7.9

Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga con voladizo que se muestra en la figura 7-16*a*.




(a)

**Fig. 7-16**




## SOLUCIÓN

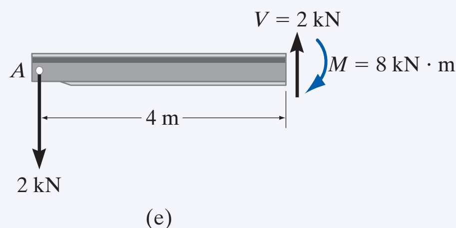
En la figura 7-16*b* se muestran las reacciones en los soportes.

**Diagrama de fuerza cortante.** La fuerza cortante de −2 kN en el extremo *A* de la viga se grafica en $x = 0$, figura 7-16*c*. Las pendientes se determinan a partir de la carga y con base en ésta se construye el diagrama de fuerza cortante, como se indica en la figura. En particular, observe el salto positivo de 10 kN en $x = 4$ m debido a la fuerza $B_y$ como se indica en la figura.

**Diagrama de momento flexionante.** Se traza el momento de cero en $x = 0$, figura 7-16*d*; luego, al seguir el comportamiento de la pendiente determinada a partir del diagrama de fuerza cortante, se construye el diagrama de momento flexionante. Dicho momento en $x = 4$ m se determina a partir del área debajo del diagrama de fuerza de corte.

$$M|_{x=4\text{ m}} = M|_{x=0} + \Delta M = 0 + [-2\text{ kN}(4\text{ m})] = -8\text{ kN}\cdot\text{m}$$

También podemos obtener este valor por el método de secciones, como se muestra en la figura 7-16*e*.




(e)

## EJEMPLO 7.10

La flecha que se muestra en la figura 7-17*a* está sostenida por una chumacera de empuje en $A$ y una chumacera lisa en $B$. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.

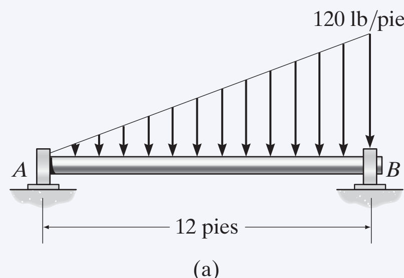
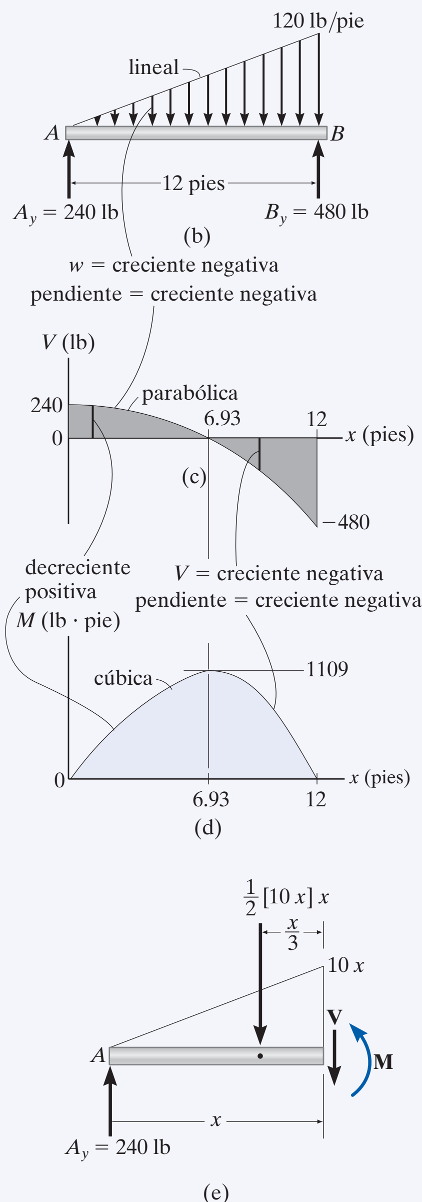



**Fig. 7-17**




### SOLUCIÓN

En la figura 7-17*b* se muestran las reacciones en los soportes.

**Diagrama de fuerza cortante.** Como se muestra en la figura 7-17*c*, la fuerza cortante en $x = 0$ es $+240$. Con la pendiente definida por la carga se construye el diagrama de fuerza cortante, donde en $B$ su valor es $-480$ lb. Como la fuerza cortante cambia de signo, debe localizarse el punto donde $V = 0$, para esto usaremos el método de secciones. El diagrama de cuerpo libre del segmento izquierdo del eje, seccionado en una posición arbitraria $x$ dentro de la región $0 \leq x < 9$ pies, se muestra en la figura 7-17*e*. Observe que la intensidad de la carga distribuida en $x$ es $w = 10x$, la cual se encontró por triángulos proporcionales, es decir, $120/12 = w/x$.

Así, para $V = 0$,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 240 \text{ lb} - \tfrac{1}{2}(10x)x = 0$$

$$x = 6.93 \text{ pies}$$

**Diagrama de momento flexionante.** El diagrama de momento comienza en 0 ya que no hay momento en $A$, después se construye con base en la pendiente que se determinó en el diagrama de fuerza cortante. El momento flexionante máximo ocurre en $x = 6.93$ pies, donde la fuerza cortante es igual a cero, ya que $dM/dx = V = 0$, figura 7-17*e*,

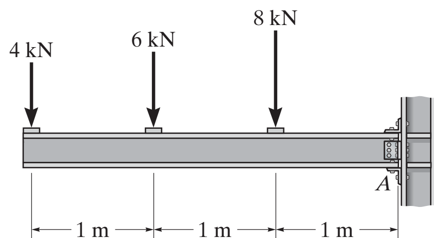
$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad M_{\text{máx}} + \tfrac{1}{2}[(10)(6.93)]\,6.93\left(\tfrac{1}{3}(6.93)\right) - 240(6.93) = 0$$

$$M_{\text{máx}} = 1109 \text{ lb} \cdot \text{pie}$$

Por último, observe que la integración, primero de la carga $w$ que es lineal, produce un diagrama de fuerza cortante que es parabólico, y después un diagrama de momento que es cúbico.

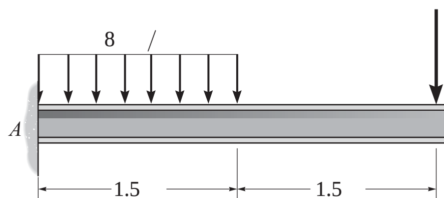
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F7-13.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



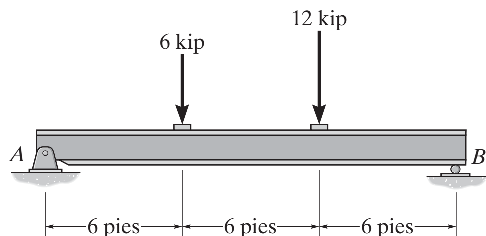

**F7-13**

**F7-14.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



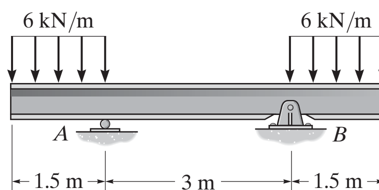

**F7-14**

**F7-15.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



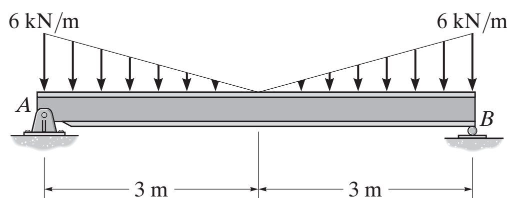

**F7-15**

**F7-16.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



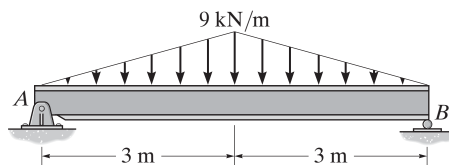

**F7-16**

**F7-17.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.




**F7-17**

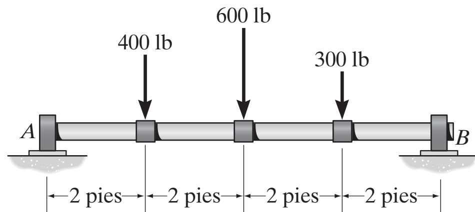
**F7-18.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.




**F7-18**

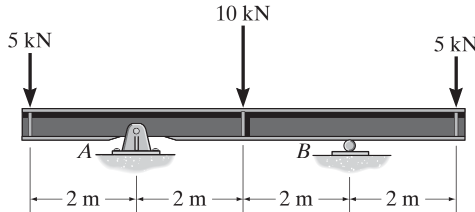
## PROBLEMAS

•**7-65.** La flecha está soportada por una chumacera de empuje en $A$ y una chumacera lisa en $B$. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha.



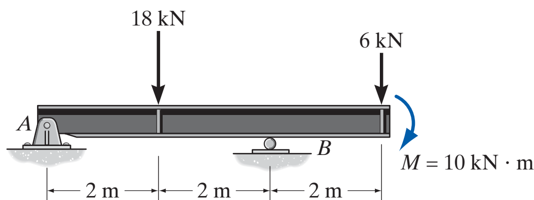

**Prob. 7-65**

**7-66.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga con doble voladizo.



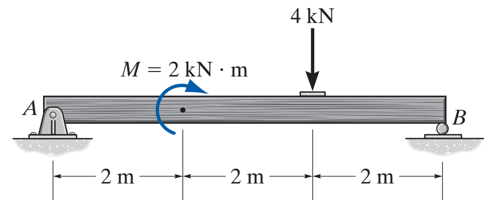

**Prob. 7-66**

**7-67.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga con voladizo.



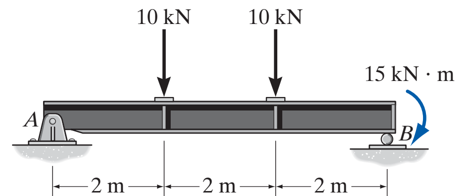

**Prob. 7-67**

*__7-68.__ Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



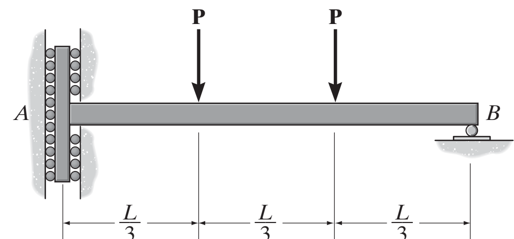

**Prob. 7-68**

•**7-69.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



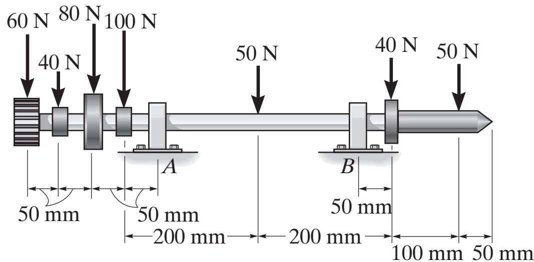

**Prob. 7-69**

**7-70.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga. El soporte en $A$ no ofrece resistencia a la carga vertical.



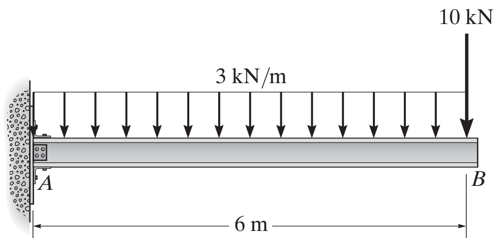

**Prob. 7-70**

**7-71.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha de torno que está sometida a las cargas que se ilustran. La chumacera en *A* es una chumacera lisa y en *B* es una chumacera de empuje.



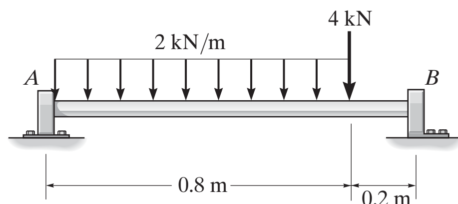

**Prob. 7-71**

***7-72.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



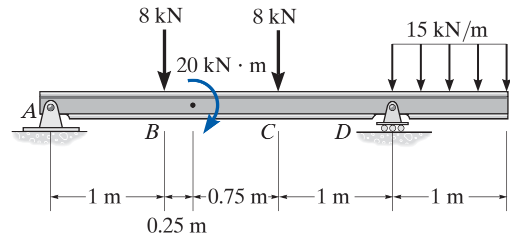

**Prob. 7-72**

**•7-73.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha. El soporte en *A* es una chumacera de empuje y en *B* es una chumacera lisa.



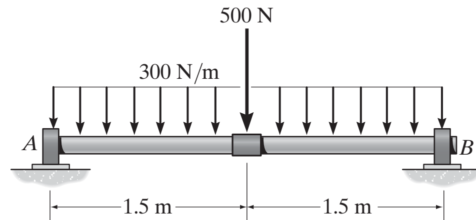

**Prob. 7-73**

**7-74.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



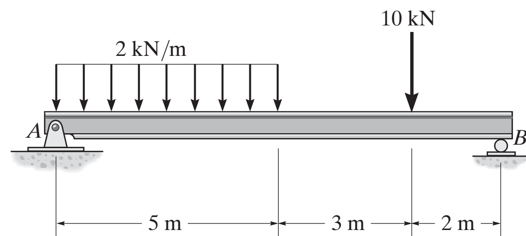

**Prob. 7-74**

**7-75.** La flecha está soportada por una chumacera de empuje en *A* y una chumacera lisa en *B*. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha.



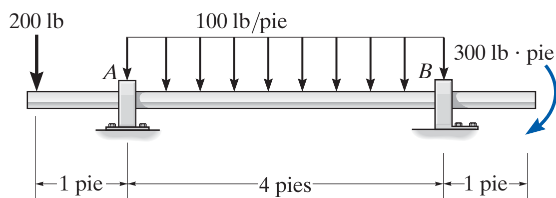

**Prob. 7-75**

***7-76.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



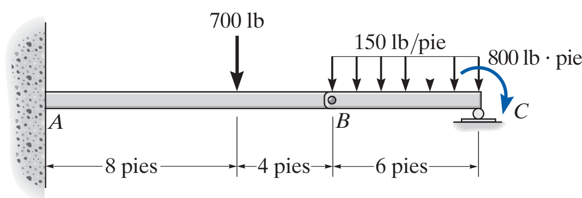

**Prob. 7-76**

**•7-77.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha. El soporte en *A* es una chumacera lisa y en *B* es una chumacera de empuje.



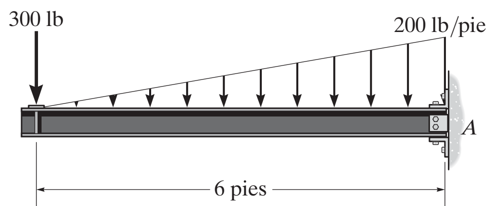

**Prob. 7-77**

**7-78.** La viga consta de dos segmentos conectados mediante un pasador en *B*. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



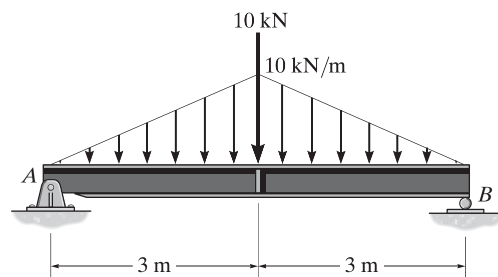

**Prob. 7-78**

**7-79.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga en voladizo.



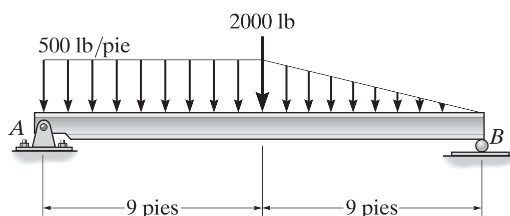

**Prob. 7-79**

***7-80.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga simplemente apoyada.



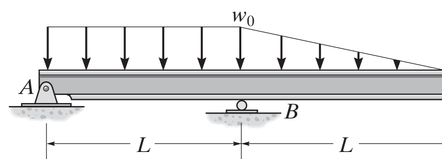

**Prob. 7-80**

**•7-81.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



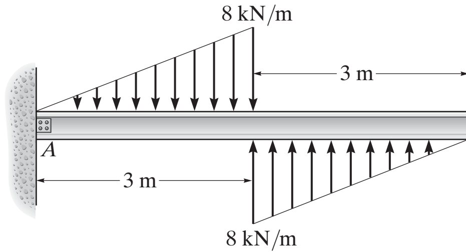

**Prob. 7-81**

**7-82.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



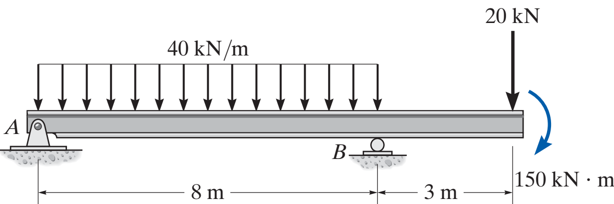

**Prob. 7-82**

**7-83.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



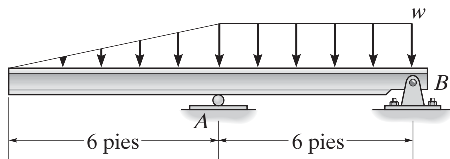

**Prob. 7-83**

***7-84.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



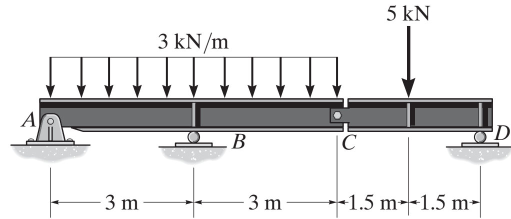

**Prob. 7-84**

**•7-85.** La viga fallará cuando el momento flexionante máximo sea $M_{máx} = 30$ kip · pie o la fuerza cortante máxima sea $V_{máx} = 8$ kip. Determine la intensidad $w$ más grande de la carga distribuida que soportará la viga.



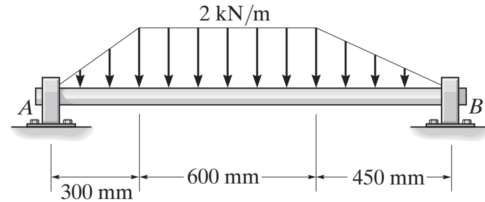

**Prob. 7-85**

**7-86.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga compuesta.



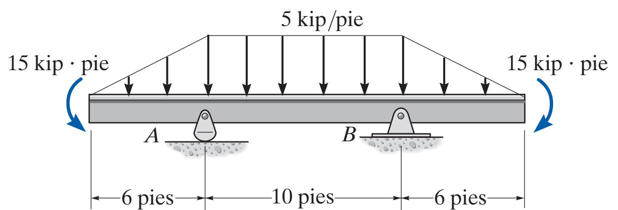

**Prob. 7-86**

**7-87.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la flecha. Los soportes en *A* y *B* son chumaceras lisas.




**Prob. 7-87**

***7-88.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.




**Prob. 7-88**

# *7.4 Cables

Los cables y las cadenas flexibles combinan resistencia con ligereza y se usan con frecuencia en las estructuras para soportar y transmitir cargas de un elemento a otro. Cuando se utilizan para sostener puentes colgantes y ruedas de cargadores, los cables constituyen el elemento principal de carga de la estructura. En el análisis de fuerzas de tales sistemas, el peso del cable puede pasarse por alto porque suele ser pequeño en comparación con la carga que lleva. Por otra parte, cuando los cables se usan como líneas de transmisión y retenidas para antenas de radio y grúas, el peso del cable puede llegar a ser importante y debe incluirse en el análisis estructural.



Cada uno de los segmentos de cable permanece casi recto cuando soporta el peso de estos semáforos.

En el análisis que se presenta a continuación se considerarán tres casos. En cada uno de ellos supondremos que el cable es *perfectamente flexible* e *inextensible*. Debido a su flexibilidad, el cable no ofrece resistencia a la flexión y, por lo tanto, la fuerza de tensión que actúa en él es siempre tangente en puntos localizados a lo largo de su extensión. Por ser inextensible, el cable tiene una longitud constante antes y después de aplicarse la carga. Como resultado, una vez aplicada la carga, la geometría del cable permanece fija, y el cable o segmento de éste pueden tratarse como un cuerpo rígido.

**Cables sometidos a cargas concentradas.** Cuando un cable cuyo peso se puede ignorar soporta varias cargas concentradas, el cable toma la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales está sometido a una fuerza de tensión constante. Por ejemplo, considere el cable de la figura 7-18, donde las distancias $h$, $L_1$, $L_2$ y $L_3$, y las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ son conocidas. Aquí, el problema es determinar las *nueve incógnitas* consistentes en la tensión en cada uno de los *tres* segmentos, las *cuatro* componentes de reacción en $A$ y $B$, y las *dos* flechas $y_C$ y $y_D$ en los puntos $C$ y $D$. Para la solución podemos escribir *dos* ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$. Esto resulta en un total de *ocho ecuaciones*.* Para completar la solución, será necesario saber algo sobre la geometría del cable para obtener la novena ecuación necesaria. Por ejemplo, si la *longitud* total $L$ del cable está especificada, entonces se puede usar el teorema de Pitágoras para relacionar cada una de las tres longitudes de segmento, escritas en términos de $h$, $y_C$, $y_D$, $L_1$, $L_2$ y $L_3$, con la longitud total $L$. Por desgracia, este tipo de problemas no puede resolverse fácilmente de forma manual. Sin embargo, otra posibilidad es especificar una de las flechas, $y_C$ o $y_D$, en vez de la longitud del cable. Al hacer esto, entonces las ecuaciones de equilibrio son suficientes para obtener las fuerzas desconocidas y la flecha restante. Una vez obtenida la flecha en cada punto de carga, la longitud del cable puede determinarse mediante trigonometría. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento útil para efectuar el análisis de equilibrio para un problema de este tipo.

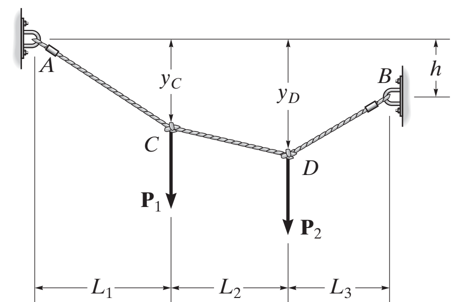


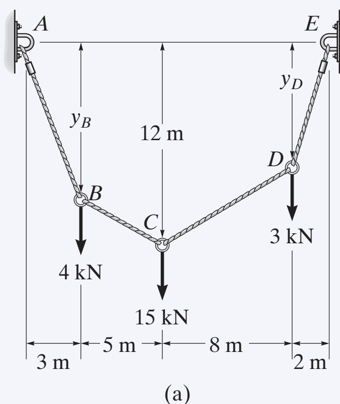

**Fig. 7-18**

7

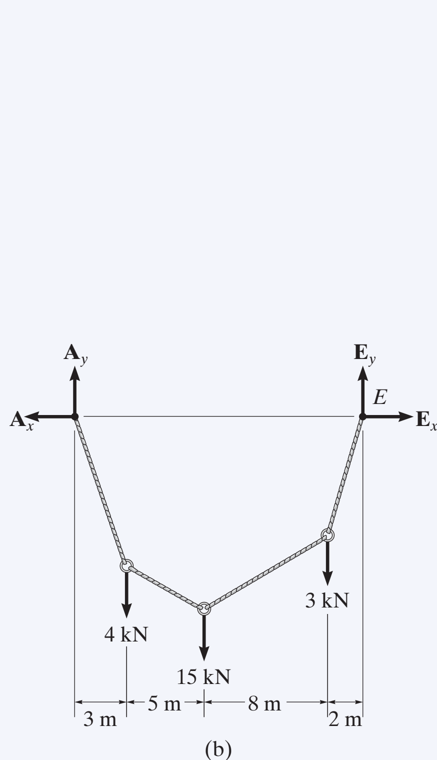
*Como se mostrará en el siguiente ejemplo, las ocho ecuaciones de equilibrio pueden escribirse *también* para todo el cable, o cualquier parte de él. Pero *no* están disponibles *más* de *ocho* ecuaciones.

## EJEMPLO 7.11

Determine la tensión en cada segmento del cable de la figura 7-19*a*.



(a)



(b)

### SOLUCIÓN

Por inspección, hay cuatro reacciones externas desconocidas ($A_x$, $A_y$, $E_x$ y $E_y$) y cuatro tensiones desconocidas en el cable, una en cada segmento. Esas ocho incógnitas junto con las dos flechas desconocidas $y_B$ y $y_D$ pueden determinarse a partir de *diez* ecuaciones de equilibrio disponibles. Un método consiste en aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$) a cada uno de los cinco puntos, de *A* a *E*. Sin embargo, aquí usaremos un enfoque más directo.

Considere el diagrama de cuerpo libre para todo el cable, figura 7-19*b*. Entonces,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -A_x + E_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0;$$

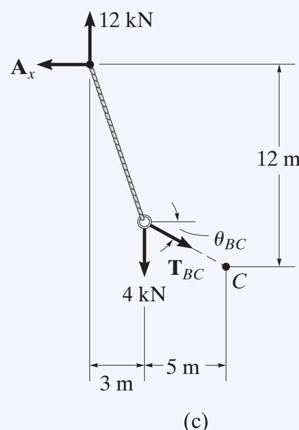
$$-A_y(18 \text{ m}) + 4 \text{ kN}\,(15 \text{ m}) + 15 \text{ kN}\,(10 \text{ m}) + 3 \text{ kN}\,(2 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = 12 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 12 \text{ kN} - 4 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 3 \text{ kN} + E_y = 0$$

$$E_y = 10 \text{ kN}$$

Como la flecha $y_C = 12$ m es conocida, consideraremos ahora la sección ubicada más a la izquierda, la cual corta el cable *BC*, figura 7-19*c*.



(c)

**Fig. 7-19**

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \; A_x(12 \text{ m}) - 12 \text{ kN}\,(8 \text{ m}) + 4 \text{ kN}\,(5 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = E_x = 6.33 \text{ kN}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{BC} \cos \theta_{BC} - 6.33 \text{ kN} = 0$$

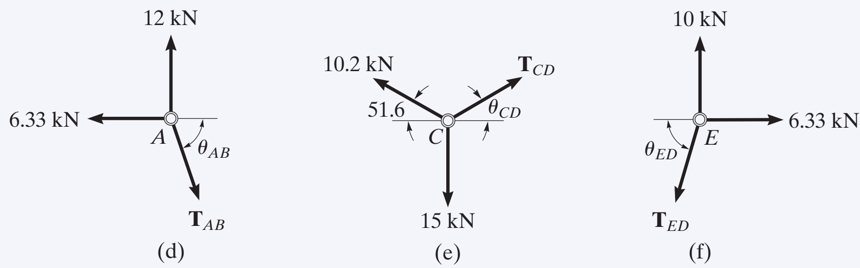
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 12 \text{ kN} - 4 \text{ kN} - T_{BC} \operatorname{sen} \theta_{BC} = 0$$

Así,

$$\theta_{BC} = 51.6°$$

$$T_{BC} = 10.2 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

7




Al proceder ahora al análisis del equilibrio de los puntos $A$, $C$ y $E$ en secuencia, tenemos

**Punto *A*** (Figura 7-19*d*).

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{AB} \cos \theta_{AB} - 6.33 \text{ kN} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -T_{AB} \operatorname{sen} \theta_{AB} + 12 \text{ kN} = 0$$

$$\theta_{AB} = 62.2^\circ$$

$$T_{AB} = 13.6 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Punto *C*** (Figura 7-19*e*).

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad T_{CD} \cos \theta_{CD} - 10.2 \cos 51.6^\circ \text{ kN} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{CD} \operatorname{sen} \theta_{CD} + 10.2 \operatorname{sen} 51.6^\circ \text{ kN} - 15 \text{ kN} = 0$$

$$\theta_{CD} = 47.9^\circ$$

$$T_{CD} = 9.44 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Punto *E*** (Figura 7-19*f*).

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 6.33 \text{ kN} - T_{ED} \cos \theta_{ED} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 10 \text{ kN} - T_{ED} \operatorname{sen} \theta_{ED} = 0$$

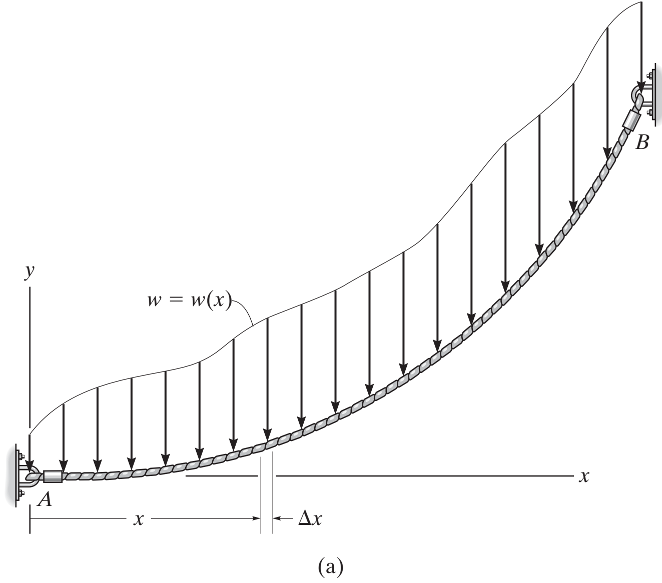
$$\theta_{ED} = 57.7^\circ$$

$$T_{ED} = 11.8 \text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** por comparación, vemos que la tensión máxima en el cable está en el segmento $AB$ ya que este segmento tiene la pendiente ($\theta$) más grande, y se requiere que para cualquier segmento de cable la componente horizontal $T \cos \theta = A_x = E_x$ (una constante). Además, como se han determinado los ángulos de pendiente que forman los segmentos del cable con la horizontal, es posible encontrar las flechas $y_B$ y $y_D$, figura 7-19$a$, por trigonometría.



El cable y los tirantes se usan para soportar la carga uniforme de una tubería de gas que cruza el río.




(a)

**Fig. 7-20**

**Cable sometido a una carga distribuida.** Consideremos ahora el cable sin peso que se muestra en la figura 7-20*a*, el cual está sometido a una carga distribuida $w = w(x)$ que se *mide en la dirección x*. En la figura 7-20*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento del cable con una longitud $\Delta s$. Como la fuerza de tensión cambia tanto en magnitud como en dirección a través de la longitud del cable, denotaremos este cambio en el diagrama de cuerpo libre mediante $\Delta T$. Por último, la carga distribuida se representa mediante su fuerza resultante $w(x)(\Delta x)$, la cual actúa a una distancia fraccional $k(\Delta x)$ desde el punto $O$, donde $0 < k < 1$. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -T\cos\theta + (T + \Delta T)\cos(\theta + \Delta\theta) = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad -T\operatorname{sen}\theta - w(x)(\Delta x) + (T + \Delta T)\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = 0$$

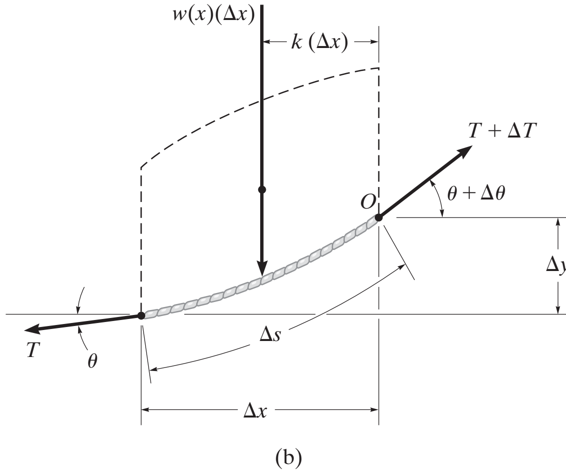
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \qquad w(x)(\Delta x)k(\Delta x) - T\cos\theta\,\Delta y + T\operatorname{sen}\theta\,\Delta x = 0$$

Al dividir cada una de esas ecuaciones entre $\Delta x$ y tomar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y, por lo tanto, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$ y $\Delta T \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0 \qquad (7\text{-}7)$$

$$\frac{d(T\operatorname{sen}\theta)}{dx} - w(x) = 0 \qquad (7\text{-}8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad (7\text{-}9)$$




(b)

Si integramos la ecuación 7-7, tenemos

$$T \cos \theta = \text{constante} = F_H \tag{7-10}$$

donde $F_H$ representa la componente horizontal de la fuerza de tensión en *cualquier punto* a lo largo del cable.

Al integrar la ecuación 7-8 resulta

$$T \operatorname{sen} \theta = \int w(x)\, dx \tag{7-11}$$

Al dividir la ecuación 7-11 entre la ecuación 7-10 se elimina $T$. Luego, con la ecuación 7-9, podemos obtener la pendiente del cable.

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(x)\, dx$$

Al realizar una segunda integración resulta

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left( \int w(x)\, dx \right) dx \tag{7-12}$$

Esta ecuación se usa para determinar la curva para el cable, $y = f(x)$. La componente horizontal de fuerza $F_H$ y las dos constantes adicionales, digamos $C_1$ y $C_2$, que resultan de la integración se determinan al aplicar las condiciones de frontera para la curva.

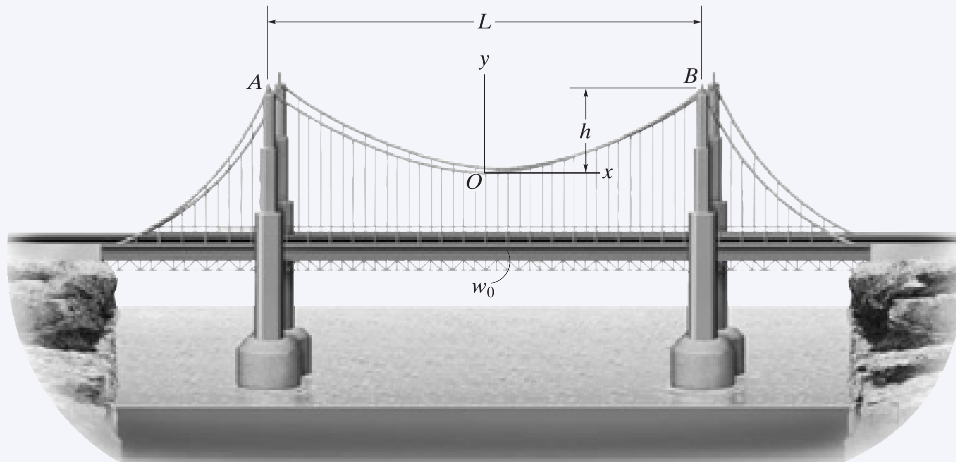


Los cables del puente colgante ejercen fuerzas muy grandes sobre la torre y el bloque de cimiento, las cuales deben tomarse en cuenta para el diseño.

7

## EJEMPLO 7.12

El cable de un puente colgante soporta la mitad de la superficie uniforme del camino entre las dos columnas ubicadas en $A$ y $B$, figura 7-21*a*. Si esta carga distribuida es $w_0$, determine la fuerza máxima desarrollada en el cable y la longitud requerida de éste. La longitud del claro $L$ y la flecha $h$ son conocidas.




(a)

**Fig. 7-21**



### SOLUCIÓN

Podemos determinar las incógnitas en el problema si encontramos primero la curva que define la forma del cable mediante la ecuación 7-12. Por razones de simetría, el origen de coordenadas se colocó en el centro del cable. Si se observa que $w(x) = w_0$, tenemos

$$y = \frac{1}{F_H}\int\left(\int w_0\,dx\right)dx$$

Al realizar las dos integraciones resulta

$$y = \frac{1}{F_H}\left(\frac{w_0x^2}{2} + C_1x + C_2\right) \qquad (1)$$

Las constantes de integración pueden determinarse por las condiciones de frontera $y = 0$ en $x = 0$ y $dy/dx = 0$ en $x = 0$. Sustituir en la ecuación 1 y su derivada resulta $C_1 = C_2 = 0$. Entonces la ecuación de la curva se convierte en

$$y = \frac{w_0}{2F_H}x^2 \qquad (2)$$

Ésta es la ecuación de una *parábola*. La constante $F_H$ puede obtenerse al aplicar la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$. Así,

$$F_H = \frac{w_0 L^2}{8h} \tag{3}$$

Por lo tanto, la ecuación 2 se convierte en

$$y = \frac{4h}{L^2} x^2 \tag{4}$$

Como se conoce a $F_H$, la tensión en el cable puede determinarse ahora con la ecuación 7-10, escrita como $T = F_H/\cos\theta$. Para $0 \le \theta < \pi/2$, la tensión máxima ocurrirá cuando $\theta$ esté al *máximo*, es decir, en el punto $B$, figura 7-21*a*. A partir de la ecuación 2, la pendiente en este punto es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = \tan\theta_{\text{máx}} = \left.\frac{w_0}{F_H}x\right|_{x=L/2}$$

o bien

$$\theta_{\text{máx}} = \tan^{-1}\left(\frac{w_0 L}{2F_H}\right) \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos(\theta_{\text{máx}})} \tag{6}$$

Con la relación triangular que se muestra en la figura 7-21*b*, que se basa en la ecuación 5, la ecuación 6 puede escribirse como

$$T_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{4F_H^2 + w_0^2 L^2}}{2}$$

Al sustituir la ecuación 3 en la ecuación anterior resulta

$$T_{\text{máx}} = \frac{w_0 L}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{L}{4h}\right)^2} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Para un segmento diferencial del cable con longitud $ds$, podemos escribir

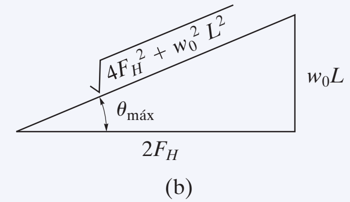
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Por tanto, la longitud total del cable puede determinarse por integración. Si usamos la ecuación 4, tenemos

$$\mathscr{L} = \int ds = 2\int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{L^2}x\right)^2}\, dx \tag{7}$$

Por integración resulta

$$\mathscr{L} = \frac{L}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L}\right)^2} + \frac{L}{4h}\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{4h}{L}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$



(b)

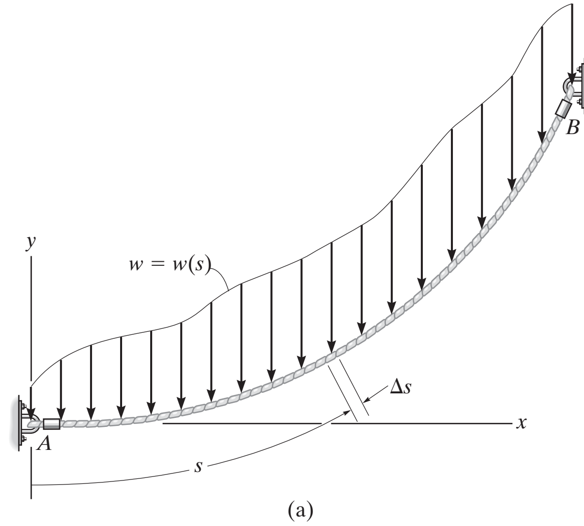



Fig. 7-22

7

**Cable sometido a su propio peso.** Cuando el peso de un cable se vuelve importante en el análisis de fuerzas, la función de carga a lo largo del cable será una función de la longitud de arco $s$ en vez de la longitud proyectada $x$. Para analizar este problema consideraremos una función de carga generalizada $w = w(s)$ que actúa a lo largo del cable como se muestra en la figura 7-22*a*. El diagrama de cuerpo libre para un segmento pequeño del cable se muestra en la figura 7-22*b*. Al aplicar las ecuaciones de equilibrio al sistema de fuerzas que se encuentra en este diagrama, se obtienen relaciones idénticas a las dadas por las ecuaciones 7-7 a 7-9, pero con $ds$ que reemplaza a $dx$. Por lo tanto, podemos demostrar que

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \operatorname{sen} \theta = \int w(s)\, ds \qquad (7\text{-}13)$$

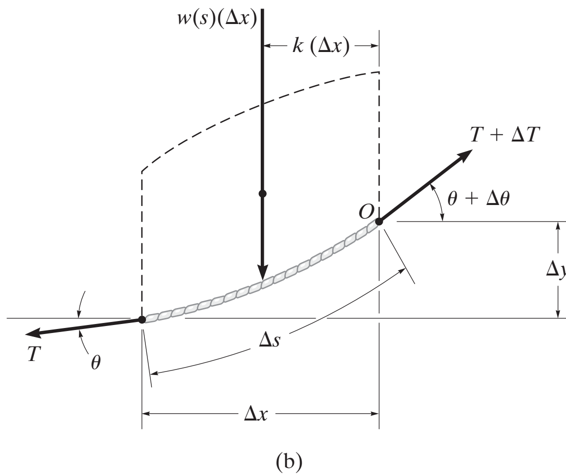
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s)\, ds \qquad (7\text{-}14)$$

Para realizar una integración directa de la ecuación 7-14, es necesario reemplazar $dy/dx$ por $ds/dx$. Puesto que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1}$$




(b)

Por lo tanto,

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \frac{1}{F_H^2}\left(\int w(s)\,ds\right)^2\right]^{1/2}$$

Si se separan las variables y se integran resulta

$$x = \int \frac{ds}{\left[1 + \frac{1}{F_H^2}\left(\int w(s)\,ds\right)^2\right]^{1/2}} \tag{7-15}$$

Las dos constantes de integración, digamos $C_1$ y $C_2$, se encuentran mediante las condiciones de frontera para la curva.

7



Las torres de transmisión eléctrica deben estar diseñadas para soportar los pesos de los cables suspendidos. El peso y la longitud de los cables se pueden determinar ya que cada uno forma una curva catenaria.

## EJEMPLO 7.13

Determine la curva de deflexión, la longitud y la tensión máxima en el cable uniforme que se muestra en la figura 7-23. El cable tiene un peso por unidad de longitud de $w_0 = 5$ N/m.

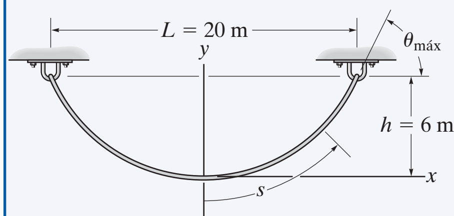



**Fig. 7-23**

### SOLUCIÓN

Por razones de simetría, el origen de coordenadas se localiza en el centro del cable. La curva de deflexión se expresa como $y = f(x)$. Podemos determinarla si aplicamos primero la ecuación 7-15, donde $w(s) = w_0$.

$$x = \int \frac{ds}{\left[1 + (1/F_H^2)\left(\int w_0\, ds\right)^2\right]^{1/2}}$$

Al integrar el término bajo el signo de integral en el denominador, tenemos

$$x = \int \frac{ds}{[1 + (1/F_H^2)(w_0 s + C_1)^2]^{1/2}}$$

Al sustituir $u = (1/F_H)(w_0 s + C_1)$ de manera que $du = (w_0/F_H)\, ds$, resulta una segunda integración

$$x = \frac{F_H}{w_0}(\operatorname{senh}^{-1} u + C_2)$$

o bien

$$x = \frac{F_H}{w_0}\left\{\operatorname{senh}^{-1}\left[\frac{1}{F_H}(w_0 s + C_1)\right] + C_2\right\} \qquad (1)$$

Para evaluar las constantes observe que, a partir de la ecuación 7-14,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}\int w_0\, ds \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H}(w_0 s + C_1)$$

Como $dy/dx = 0$ en $s = 0$, entonces $C_1 = 0$. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w_0 s}{F_H} \qquad (2)$$

La constante $C_2$ puede evaluarse con la condición $s = 0$ en $x = 0$ de acuerdo con la ecuación 1, en cuyo caso $C_2 = 0$. Para obtener la curva de deflexión, despeje $s$ de la ecuación 1, con lo cual se obtiene

$$s = \frac{F_H}{w_0}\operatorname{senh}\left(\frac{w_0}{F_H}x\right) \qquad (3)$$

Ahora sustituya en la ecuación 2, en cuyo caso

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\left(\frac{w_0}{F_H}x\right)$$

Por consiguiente,

$$y = \frac{F_H}{w_0}\cosh\left(\frac{w_0}{F_H}x\right) + C_3$$

Si se aplica la condición de frontera $y = 0$ en $x = 0$, la constante $C_3 = -F_H/w_0$, y entonces la curva de deflexión se convierte en

$$y = \frac{F_H}{w_0}\left[\cosh\left(\frac{w_0}{F_H}x\right) - 1\right] \quad (4)$$

Esta ecuación define la forma de una *curva catenaria*. La constante $F_H$ se obtiene por la condición de frontera $y = h$ en $x = L/2$, en cuyo caso

$$h = \frac{F_H}{w_0}\left[\cosh\left(\frac{w_0 L}{2F_H}\right) - 1\right] \quad (5)$$

Como $w_0 = 5$ N/m, $h = 6$ m y $L = 20$ m, las ecuaciones 4 y 5 se convierten en

$$y = \frac{F_H}{5 \text{ N/m}}\left[\cosh\left(\frac{5 \text{ N/m}}{F_H}x\right) - 1\right] \quad (6)$$

$$6 \text{ m} = \frac{F_H}{5 \text{ N/m}}\left[\cosh\left(\frac{50 \text{ N}}{F_H}\right) - 1\right] \quad (7)$$

$F_H$ se puede despejar de la ecuación 7 por un procedimiento de prueba y error. El resultado es

$$F_H = 45.9 \text{ N}$$

y, por lo tanto, la curva de deflexión, ecuación 6, resulta ser

$$y = 9.19[\cosh(0.109x) - 1] \text{ m}$$ ***Resp.***

Mediante la ecuación 3 con $x = 10$ m, la mitad de la longitud del cable es

$$\frac{\mathscr{L}}{2} = \frac{45.9 \text{ N}}{5 \text{ N/m}}\text{senh}\left[\frac{5 \text{ N/m}}{45.9 \text{ N}}(10 \text{ m})\right] = 12.1 \text{ m}$$

Por consiguiente,

$$\mathscr{L} = 24.2 \text{ m}$$ ***Resp.***

Como $T = F_H/\cos\theta$, la tensión máxima ocurre cuando $\theta$ es máximo, es decir, en $s = \mathscr{L}/2 = 12.1$ m. Con la ecuación 2 se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{s=12.1 \text{ m}} = \tan\theta_{\text{máx}} = \frac{5 \text{ N/m}(12.1 \text{ m})}{45.9 \text{ N}} = 1.32$$

$$\theta_{\text{máx}} = 52.8^\circ$$

Y entonces,

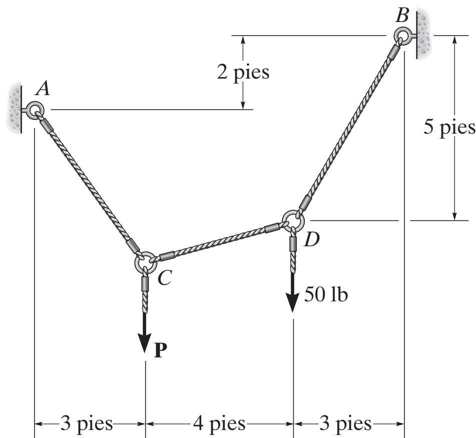
$$T_{\text{máx}} = \frac{F_H}{\cos\theta_{\text{máx}}} = \frac{45.9 \text{ N}}{\cos 52.8^\circ} = 75.9 \text{ N}$$ ***Resp.***

## PROBLEMAS

*En los siguientes problemas ignore el peso del cable, a menos que se especifique lo contrario.*

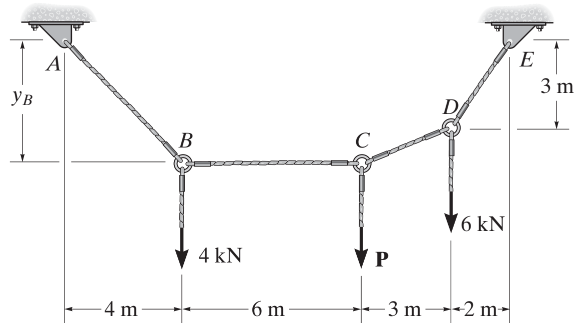
**•7-89.** Determine la tensión en cada segmento del cable y la longitud total del cable. Considere $P = 80$ lb.

**7-90.** Si cada segmento del cable puede soportar una tensión máxima de 75 lb, determine la carga $P$ más grande que puede aplicarse.




**Probs. 7-89/90**

**•7-93.** Determine la fuerza $P$ necesaria para mantener el cable en la posición que se muestra, es decir, de modo que el segmento $BC$ permanezca horizontal. Además, calcule la flecha $y_B$ y la tensión máxima en el cable.

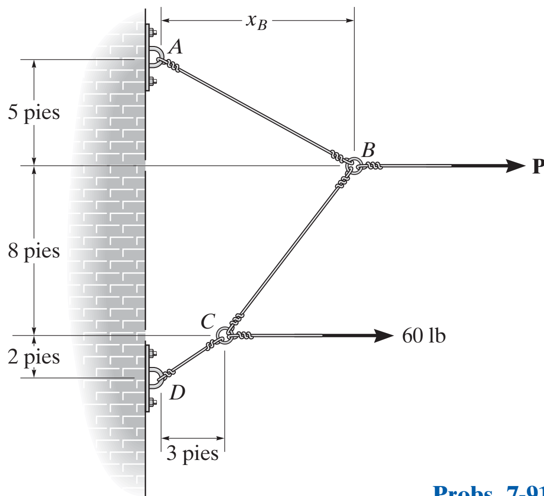



**Prob. 7-93**



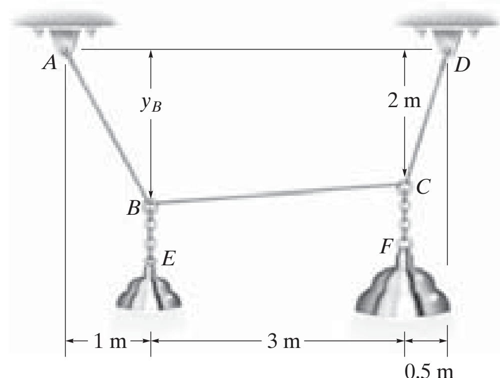
**7-91.** Los segmentos del cable soportan la carga que se muestra. Determine la distancia horizontal $x_B$ desde la fuerza en $B$ hasta el punto $A$. Considere $P = 40$ lb.

***7-92.** Los segmentos del cable soportan la carga que se muestra. Determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** de manera que $x_B = 6$ pies.




**Probs. 7-91/92**

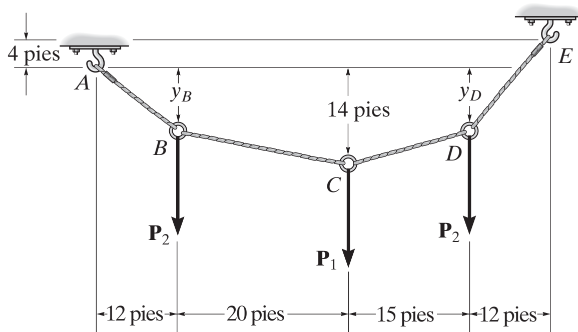
**7-94.** El cable $ABCD$ soporta la lámpara $E$ de 10 kg y la lámpara $F$ de 15 kg. Determine la tensión máxima en el cable y la flecha $y_B$ del punto $B$.




**Prob. 7-94**

**7-95.** El cable soporta las tres cargas que se muestran. Determine las flechas $y_B$ y $y_D$ de los puntos $B$ y $D$. Considere $P_1 = 400$ lb, $P_2 = 250$ lb.

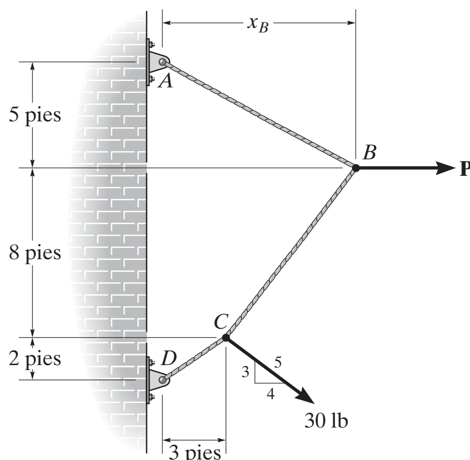
*__7-96.__ El cable soporta las tres cargas que se muestran. Determine la magnitud de $\mathbf{P}_1$ si $P_2 = 300$ lb y $y_B = 8$ pies. También encuentre la flecha $y_D$.




**Probs. 7-95/96**

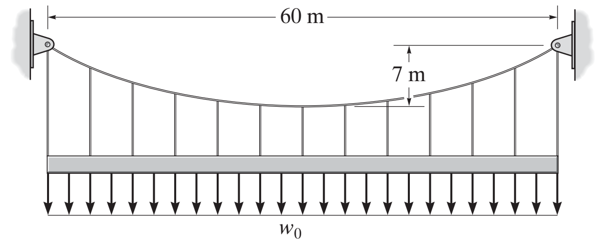
•**7-97.** El cable soporta la carga que se muestra. Determine la distancia horizontal $x_B$ medida desde el punto $A$ a que actúa la fuerza en el punto $B$. Considere $P = 40$ lb.

**7-98.** El cable soporta la carga que se muestra. Determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** de modo que $x_B = 6$ pies.




**Probs. 7-97/98**

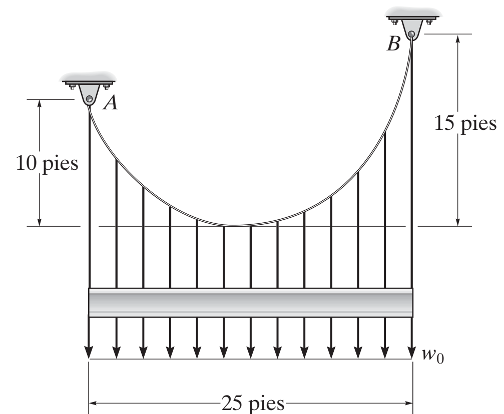
**7-99.** Determine la máxima carga uniforme distribuida $w_0$ N/m que puede soportar el cable si es capaz de sostener una tensión máxima de 60 kN.




**Prob. 7-99**

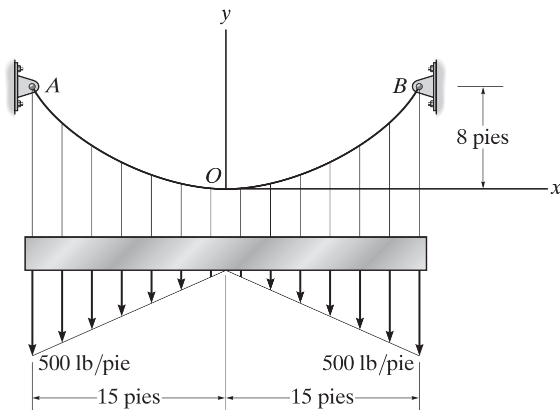
*__7-100.__ El cable soporta la carga uniforme distribuida de $w_0 = 600$ lb/pie. Determine la tensión en el cable en cada soporte $A$ y $B$.

•**7-101.** Determine la máxima carga uniforme distribuida $w_0$ que puede soportar el cable, si la tensión máxima que puede sostener es de 4000 lb.




**Prob. 7-101**

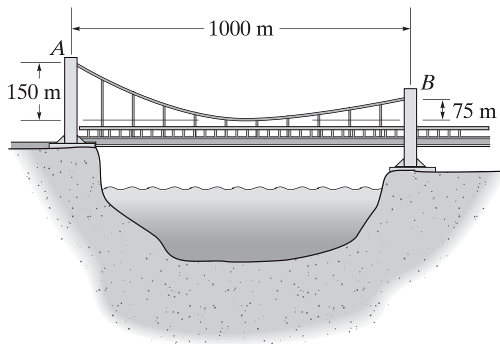
**7-102.** El cable está sometido a la carga triangular. Si la pendiente del cable en el punto $O$ es cero, determine la ecuación de la curva $y = f(x)$ que define la forma $OB$ del cable, y la tensión máxima desarrollada en éste.




**Prob. 7-102**

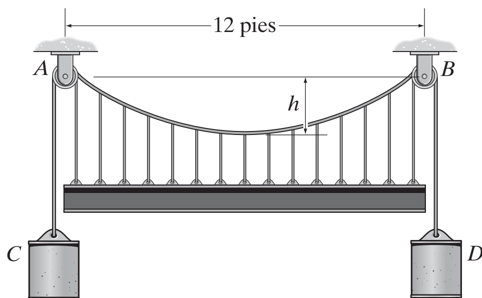
*__7-104.__ La plataforma del puente tiene un peso por unidad de longitud de 80 kN/m. Está sostenida en cada lado por un cable. Determine la tensión en cada cable en los pilotes $A$ y $B$.

•**7-105.** Si cada uno de los dos cables laterales que soportan la plataforma del cable puede sostener una tensión máxima de 50 MN, determine la carga uniforme distribuida disponible $w_0$ causada por el peso de la plataforma.



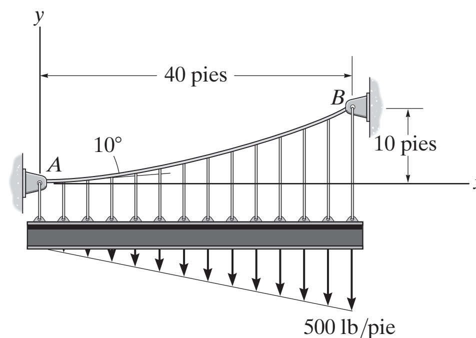

**Probs. 7-104/105**

**7-103.** Si los cilindros $C$ y $D$ pesan 900 lb cada uno, determine la flecha máxima $h$ y la longitud del cable entre las poleas lisas en $A$ y $B$. La viga tiene un peso por unidad de longitud de 100 lb/pie.




**Prob. 7-103**

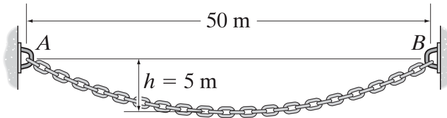
**7-106.** Si la pendiente del cable en el soporte $A$ es de 10°, determine la curva de deflexión $y = f(x)$ del cable y la tensión máxima desarrollada en el cable.




**Prob. 7-106**

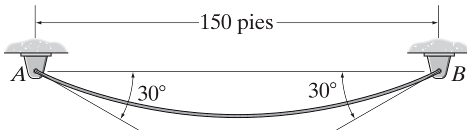
7

**7-107.** Si $h = 5$ m, determine la tensión máxima desarrollada en la cadena y su longitud. La cadena tiene una masa por unidad de longitud de 8 kg/m.



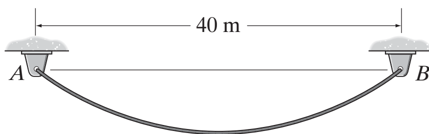

**Prob. 7-107**

***7-108.** Un cable que tiene un peso por unidad de longitud de 5 lb/pie se suspende entre los soportes $A$ y $B$. Determine la ecuación de la curva catenaria del cable y la longitud del cable.




**Prob. 7-108**

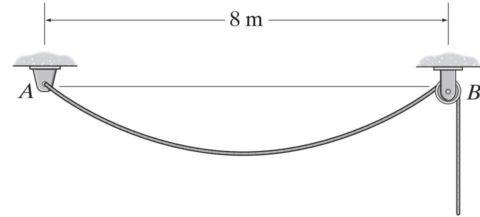
**•7-109.** Si el cable de 42 m de longitud tiene una masa por unidad de longitud de 5 kg/m, determine la ecuación de la curva catenaria del cable y la tensión máxima desarrollada en éste.




**Prob. 7-109**

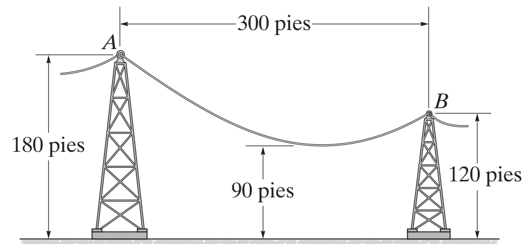
**7-110.** Demuestre que la curva de deflexión del cable analizado en el ejemplo 7-13 se reduce a la ecuación 4 del ejemplo 7-12 cuando la *función coseno hiperbólico* se expande en términos de una serie y sólo se retienen los dos primeros términos. (La respuesta indica que la *catenaria* puede reemplazarse por una parábola en la resolución de problemas donde la flecha es pequeña. En este caso, se supone que el peso del cable está distribuido de manera uniforme a lo largo de la horizontal).

**7-111.** El cable tiene una masa por unidad de longitud de 10 kg/m. Determine la longitud total $L$ más corta del cable que puede suspenderse en equilibrio.



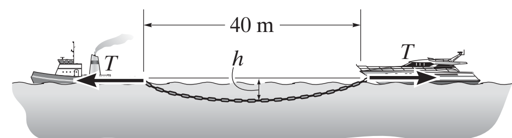

**Prob. 7-111**

***7-112.** El cable de transmisión eléctrica tiene un peso por unidad de longitud de 15 lb/pie. Si el punto más bajo del cable debe estar al menos 90 pies sobre el suelo, determine la tensión máxima desarrollada en el cable y la longitud del cable entre $A$ y $B$.




**Prob. 7-112**

**•7-113.** Si la fuerza de remolque horizontal es $T = 20$ kN y la cadena tiene una masa por unidad de longitud de 15 kg/m, determine la flecha máxima $h$. Pase por alto el efecto de flotación del agua sobre la cadena. Los barcos son estacionarios.

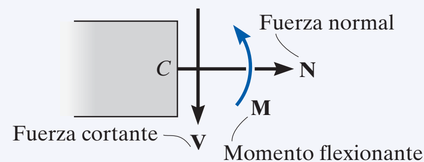



**Prob. 7-113**

# REPASO DEL CAPÍTULO

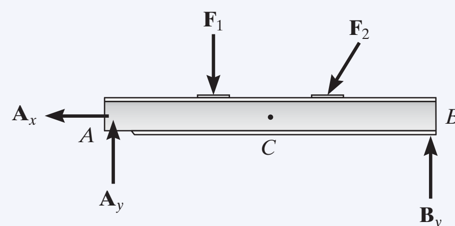
**Cargas internas**

Si un sistema coplanar de fuerzas actúa sobre un elemento, entonces en general actuarán una *fuerza normal* interna **N**, una *fuerza cortante* **V** y un *momento flexionante* **M** que resultan en cualquier sección transversal a lo largo del elemento. En la figura se muestran las direcciones positivas de estas cargas.



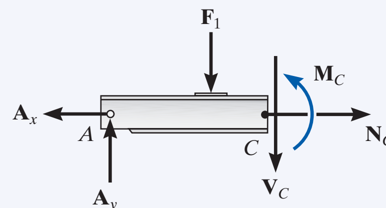

(a)

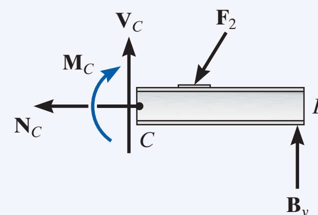
La fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante que resultan se determinan por el método de secciones. Para encontrarlas, el elemento se secciona en el punto $C$ donde se debe determinar la carga interna. Luego se traza un diagrama de cuerpo libre de una de las partes seccionadas y las cargas internas se muestran en sus direcciones positivas.



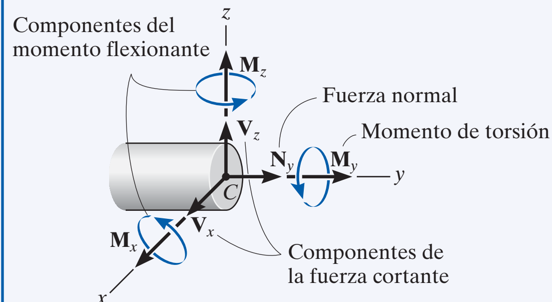

La fuerza normal se determina al sumar las fuerzas normales a la sección transversal. La fuerza cortante que resulta se encuentra al sumar las fuerzas tangentes a la sección transversal, y el momento flexionante se encuentra por la suma de momentos con respecto al centro geométrico o centroide del área de la sección transversal.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_C = 0$$



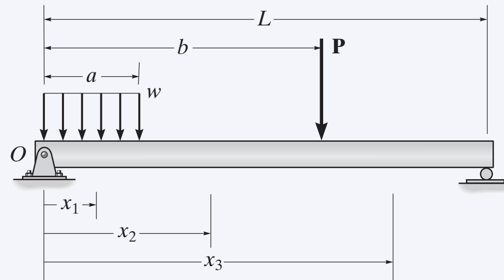




Si el elemento está sometido a una carga tridimensional, entonces, en general, un *momento de torsión* también actuará sobre la sección transversal. Esta carga se puede determinar por la suma de momentos con respecto a un eje perpendicular a la sección transversal que pasa por su centroide.



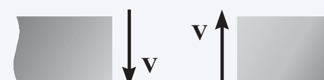
**Diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante**

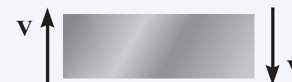
Para construir los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para un elemento, es necesario seccionar el elemento en un punto arbitrario, localizado a una distancia $x$ del extremo izquierdo.




Si la carga externa consta de cambios en la carga distribuida, o sobre el elemento actúa una serie de cargas concentradas y momentos de par, entonces deben determinarse diferentes expresiones para $V$ y $M$ dentro de las regiones entre cualesquier discontinuidades de carga.

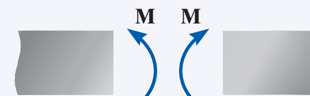
La fuerza cortante y el momento de par desconocidos se indican sobre la sección transversal en la dirección positiva de acuerdo con la convención de signos establecida, y después se determinan la fuerza cortante interna y el momento flexionante como funciones de $x$.




Fuerza cortante positiva

Entonces se grafica cada una de las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante para crear los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante.







Momento flexionante positivo

7

**Relaciones entre fuerza cortante y momento flexionante**

Es posible graficar rápidamente los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante mediante las relaciones diferenciales que existen entre la carga distribuida $w$ y $V$ y $M$.

La pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a la carga distribuida en cualquier punto. La pendiente es positiva si la carga distribuida actúa hacia arriba y viceversa.

$$\frac{dV}{dx} = w$$

La pendiente del diagrama de momento flexionante es igual a la fuerza cortante en cualquier punto. La pendiente es positiva si la fuerza cortante es positiva o viceversa.

$$\frac{dM}{dx} = V$$

El cambio en la fuerza cortante entre cualquiera de dos puntos es igual al área bajo la carga distribuida entre los puntos.

$$\Delta V = \int w\,dx$$

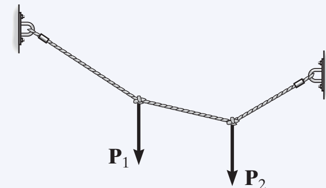
El cambio en el momento flexionante es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre los puntos.

$$\Delta M = \int V\,dx$$

7

**Cables**

Cuando un cable flexible e inextensible está sometido a una serie de fuerzas concentradas, el análisis puede realizarse mediante las ecuaciones de equilibrio aplicadas a los diagramas de cuerpo libre de segmentos, o bien, de puntos de aplicación de la carga.




Si deben considerarse cargas distribuidas externas o el peso del cable, entonces las fuerzas y la forma del cable deben determinarse al analizar primero las fuerzas sobre un segmento diferencial del cable e integrar después este resultado. Las dos constantes, digamos $C_1$ y $C_2$, resultantes de la integración se determinan al aplicar las condiciones de frontera para el cable.

$$y = \frac{1}{F_H}\int\left(\int w(x)\,dx\right)dx$$

Carga distribuida

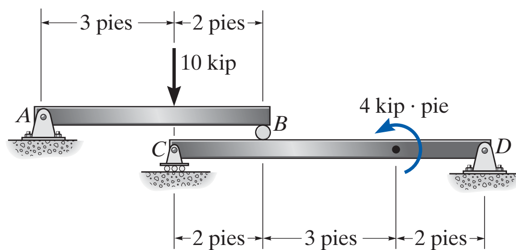
$$x = \int \frac{ds}{\left[1 + \frac{1}{F_H^2}\left(\int w(s)\,ds\right)^2\right]^{1/2}}$$

Peso del cable

# PROBLEMAS DE REPASO

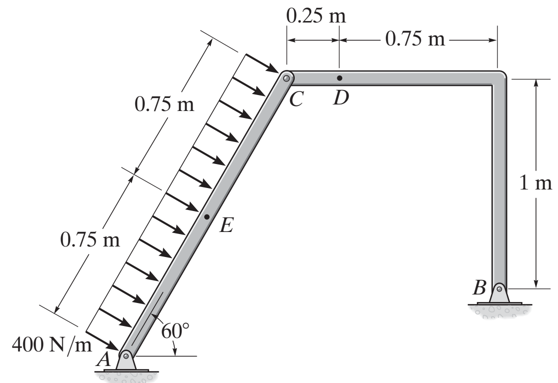
**7-114.** Un cable de 100 lb está unido entre dos puntos separados por una distancia de 50 pies con elevaciones iguales. Si la tensión máxima desarrollada en el cable es de 75 lb, determine la longitud del cable y la flecha.

**7-115.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga *CD*.




**Prob. 7-115**

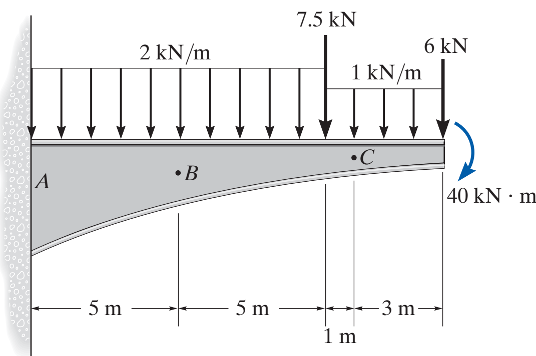
•**7-117.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *D* y *E* del bastidor.




**Prob. 7-117**

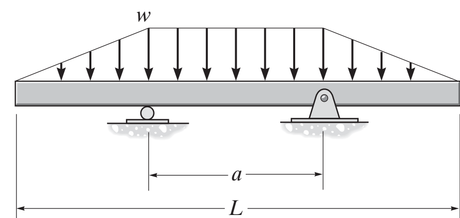


*__7-116.__ Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos *B* y *C* de la viga.




**Prob. 7-116**

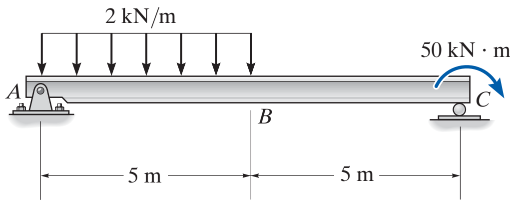
**7-118.** Determine la distancia *a* entre los soportes en términos de la longitud *L* de la viga de manera que el momento flexionante en la viga *simétrica* sea cero en el centro de la viga.




**Prob. 7-118**

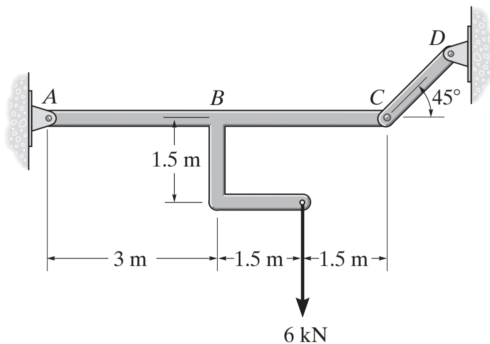
**7-119.** Una cadena está suspendida entre puntos con la misma elevación y separados por una distancia de 60 pies. Si la cadena tiene un peso por unidad de longitud de 0.5 lb/pie y la flecha es de 3 pies, determine la tensión máxima en la cadena.

***7-120.** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga.



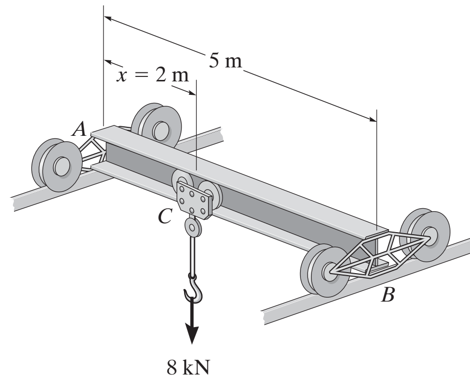

**Prob. 7-120**

**•7-121.** Determine la fuerza cortante interna y el momento flexionante en el elemento $ABC$ como una función de $x$, donde el origen para $x$ está en $A$.



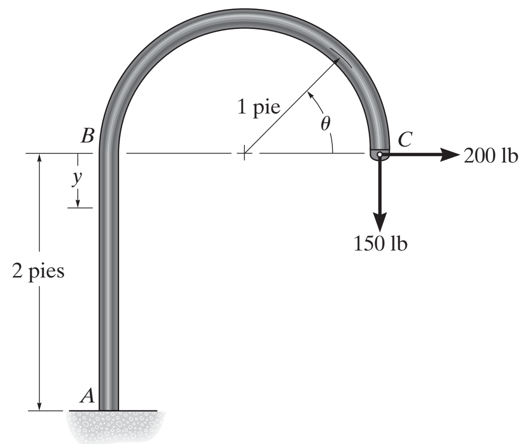

**Prob. 7-121**

**7-122.** La grúa móvil consiste en una viga de 5 m de largo cuya masa uniforme por unidad de longitud es de 20 kg/m. La cadena del malacate y su carga soportada ejercen una fuerza de 8 kN sobre la viga cuando $x = 2$ m. Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante para la viga. Las ruedas de guía en los extremos $A$ y $B$ ejercen sólo reacciones verticales sobre la viga. Ignore el tamaño del cargador en $C$.




**Prob. 7-122**

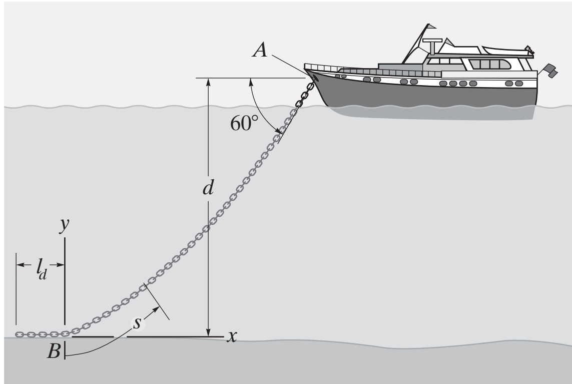
***7-123.** Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante como una función de $0° \leq \theta \leq 180°$ y $0 \leq y \leq 2$ pies para el elemento cargado como se muestra en la figura.




**Prob. 7-123**

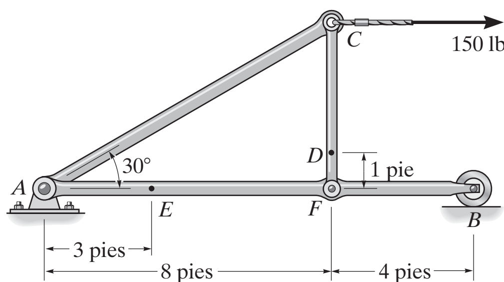
7

*7-124. El yate está anclado con una cadena cuya longitud total es de 40 m y una masa por unidad de longitud de 18 kg/m; la tensión de la cadena en $A$ es de 7 kN. Determine la longitud de la cadena $l_d$ que descansa en el fondo del mar. ¿Cuál es el valor de la distancia $d$? Suponga que se ignoran los efectos de la flotación del agua sobre la cadena. *Sugerencia:* establezca el origen del sistema de coordenadas en $B$ como se muestra, a fin de determinar la longitud $BA$ de la cadena.



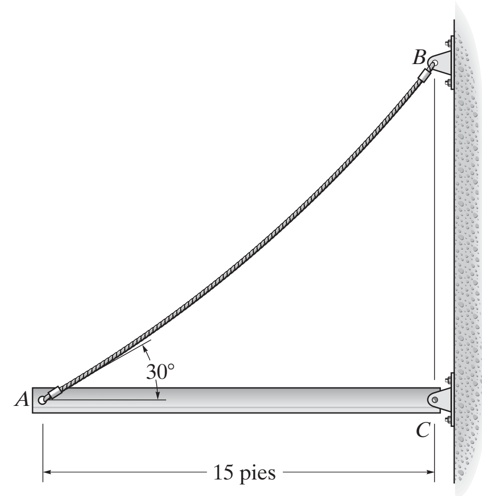

**Prob. 7-124**

•7-125. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento flexionante en los puntos $D$ y $E$ del bastidor.



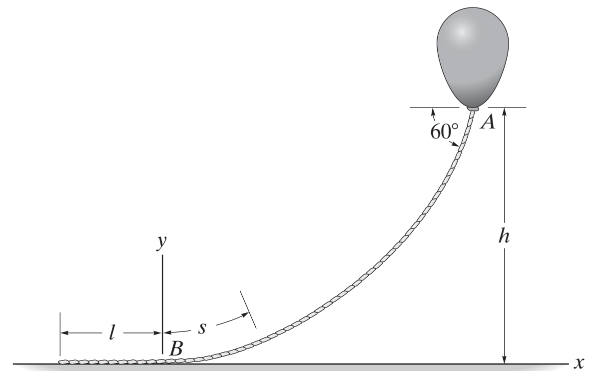

**Prob. 7-125**

7-126. La viga uniforme pesa 500 lb y se mantiene en posición horizontal por medio del cable $AB$, el cual tiene un peso de 5 lb/pie. Si la pendiente del cable en $A$ es de 30°, determine la longitud del cable.




**Prob. 7-126**

7-127. El globo se mantiene en posición por una cuerda de 400 pies que pesa 0.8 lb/pie y forma un ángulo de 60° con la horizontal. Si la tensión en la cuerda en el punto $A$ es de 150 lb, determine la longitud $l$ de la cuerda que está en el suelo y la altura $h$. *Sugerencia:* establezca el sistema de coordenadas en $B$ como se muestra.




**Prob. 7-127**



El diseño efectivo de un sistema de frenos, como el de esta bicicleta, requiere una capacidad eficiente del mecanismo para que pueda resistir las fuerzas de fricción. En este capítulo estudiaremos la naturaleza de la fricción y mostraremos cómo se consideran estas fuerzas de fricción en el análisis y el diseño de ingeniería.

# Fricción

8

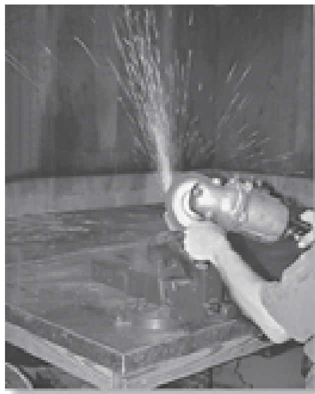
## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Introducir el concepto de fricción seca y mostrar cómo se analiza el equilibrio de los cuerpos rígidos sujetos a esta fuerza.
- Presentar aplicaciones específicas del análisis de fuerzas de fricción en cuñas, tornillos, bandas y chumaceras.
- Investigar el concepto de resistencia al rodamiento.

## 8.1 Características de la fricción seca

La *fricción* es una fuerza que resiste el movimiento de dos superficies en contacto que se deslizan relativamente entre sí. Esta fuerza actúa siempre *tangencialmente* a la superficie en los puntos de contacto y está dirigida en sentido opuesto al movimiento posible o existente entre las superficies.

En este capítulo estudiaremos los efectos de la *fricción seca*, que en ocasiones se denomina *fricción de Coulomb* ya que sus características fueron estudiadas de manera extensa por C. A. Coulomb en 1781. La fricción seca ocurre entre las superficies de cuerpos en contacto cuando no hay un fluido lubricante.*



El calor que genera la acción abrasiva de la fricción puede observarse cuando se usa esta esmeriladora para afilar una hoja metálica.

*Otro tipo de fricción, llamada fricción fluida, se estudia en la mecánica de fluidos.

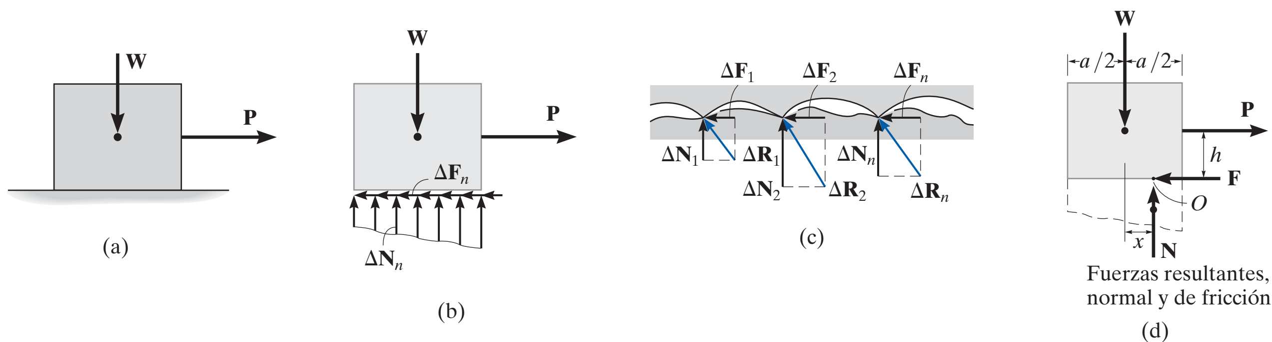
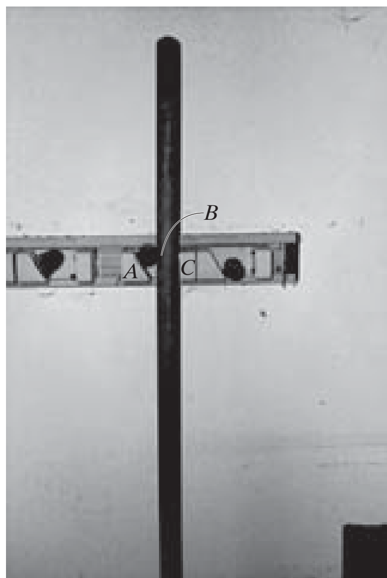



**Fig. 8-1**

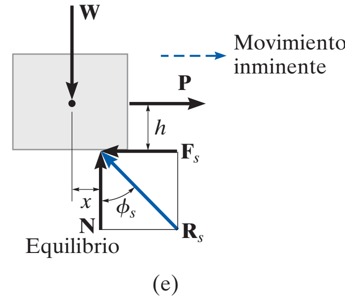



Sin importar el peso del rastrillo o la pala que se cuelgue, este dispositivo se diseñó para que el pequeño rodillo mantenga el mango en equilibrio debido a las fuerzas de fricción que se desarrollan en los puntos de contacto *A*, *B*, *C*.

**Teoría de la fricción seca.** La teoría de la fricción seca puede explicarse si se consideran los efectos que ocasiona jalar horizontalmente un bloque de peso uniforme **W** que descansa sobre una superficie horizontal rugosa que es *no rígida* o *deformable*, figura 8-1*a*. Sin embargo, la parte superior del bloque se puede considerar rígida. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 8-1*b*, el piso ejerce una *distribución* dispar de *fuerza normal* $\Delta \mathbf{N}_n$ y de *fuerza de fricción* $\Delta \mathbf{F}_n$ a lo largo de la superficie de contacto. Por equilibrio, las fuerzas normales deben actuar *hacia arriba* para equilibrar el peso **W** del bloque, y las fuerzas de fricción deben actuar hacia la izquierda para evitar que la fuerza aplicada **P** mueva el bloque hacia la derecha. Un examen preciso de las superficies en contacto entre el piso y el bloque revela cómo se desarrollan esas fuerzas de fricción y normales, figura 8-1*c*. Puede verse que existen muchas irregularidades microscópicas entre las dos superficies y, como resultado, se desarrollan fuerzas reactivas $\Delta \mathbf{R}_n$ en cada uno de los puntos de contacto.* Como se muestra, cada fuerza reactiva contribuye con una componente de fricción $\Delta \mathbf{F}_n$ y con una componente normal $\Delta \mathbf{N}_n$.

**Equilibrio.** El efecto de las cargas *distribuidas* normal y de fricción está indicado por sus *resultantes* **N** y **F**, las cuales se muestran en el diagrama de cuerpo libre, figura 8-1*d*. Observe que **N** actúa a una distancia *x* a la derecha de la línea de acción de **W**, figura 8-1*d*. Esta ubicación, que coincide con el centroide o centro geométrico de la distribución de fuerza normal en la figura 8-1*b*, es necesaria para equilibrar el "efecto de volteo" causado por **P**. Por ejemplo, si **P** se aplica a una altura *h* sobre la superficie, figura 8-1*d*, entonces el equilibrio de momento con respecto al punto *O* se satisface si $Wx = Ph$ o $x = Ph/W$.

*Además de las interacciones mecánicas explicadas aquí, que conforman lo que se denomina un enfoque clásico, un tratamiento detallado de la naturaleza de las fuerzas de fricción también debe incluir los efectos de temperatura, densidad, limpieza y atracción atómica o molecular entre las superficies de contacto. Vea J. Krim, *Scientific American*, octubre de 1996.



(e)

**Movimiento inminente.** En los casos donde las superficies de contacto son "resbalosas", la fuerza **F** de fricción puede *no* ser lo suficientemente grande como para equilibrar a **P** y, en consecuencia, el bloque tenderá a resbalar antes que a volcarse. En otras palabras, al incrementarse lentamente $P$, $F$ aumenta de manera correspondiente hasta que alcanza un cierto *valor máximo* $F_s$, llamado *fuerza límite de fricción estática*, figura 8-1*e*. Cuando se alcanza este valor, el bloque está en *equilibrio inestable* ya que cualquier incremento adicional en $P$ ocasionará que el bloque se mueva. De manera experimental, se ha determinado que la fuerza límite de fricción estática $F_s$ es *directamente proporcional* a la fuerza normal resultante $N$. Expresado en forma matemática,

$$F_s = \mu_s N \tag{8-1}$$

donde la constante de proporcionalidad, $\mu_s$ se llama *coeficiente de fricción estática*.

Así, cuando el bloque está *a punto de deslizarse*, la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción $\mathbf{F}_s$ se combinan para crear una resultante $\mathbf{R}_s$, figura 8-1*e*. El ángulo $\phi_s$ que forma $\mathbf{R}_s$ con **N** se llama *ángulo de fricción estática*. A partir de la figura,

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{F_s}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1}\mu_s$$

En la tabla 8-1 se proporcionan los valores típicos de $\mu_s$. Observe que estos valores pueden variar ya que los ensayos experimentales se hicieron bajo condiciones variables de rugosidad y limpieza de las superficies en contacto. Por lo tanto, en las aplicaciones es importante tener cuidado y buen juicio al seleccionar un coeficiente de fricción para un conjunto dado de condiciones. Cuando se requiere un cálculo más preciso de $F_s$ el coeficiente de fricción debe determinarse directamente por medio de un experimento que implique los dos materiales que se van a usar.

8

**TABLA 8-1**
**Valores típicos para $\mu_s$**

| Materiales en contacto | Coeficiente de fricción estática ($\mu_s$) |
|---|---|
| Metal sobre hielo | 0.03-0.05 |
| Madera sobre madera | 0.30-0.70 |
| Cuero sobre madera | 0.20-0.50 |
| Cuero sobre metal | 0.30-0.60 |
| Aluminio sobre aluminio | 1.10-1.70 |

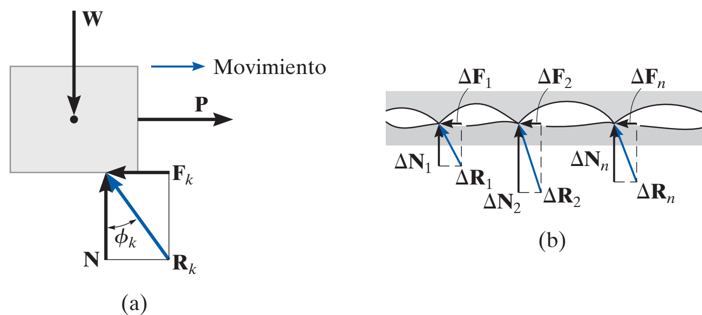



**Fig. 8-2**

**Movimiento.** Si la magnitud de **P** que actúa sobre el bloque se incrementa de manera que resulta mayor que $F_s$, la fuerza de fricción en las superficies de contacto cae a un valor menor $F_k$, llamada *fuerza de fricción cinética*. El bloque comenzará a deslizarse con rapidez creciente, figura 8-2*a*. Cuando ocurre esto, el bloque se "montará" en la parte superior de estos picos en los puntos de contacto, como se muestra en la figura 8-2*b*. El rompimiento continuo de la superficie es el mecanismo dominante que crea fricción cinética.

Los experimentos con bloques deslizantes indican que la magnitud de la fuerza de fricción cinética es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal resultante. Esto se puede expresar en forma matemática como

$$F_k = \mu_k N \tag{8-2}$$

Aquí la constante de proporcionalidad, $\mu_k$, se llama *coeficiente de fricción cinética*. Los valores típicos para $\mu_k$ son aproximadamente 25 por ciento *más pequeños* que los enunciados en la tabla 8-1 para $\mu_s$.

Como se muestra en la figura 8-2*a*, en este caso, la fuerza resultante en la superficie de contacto tiene una línea de acción definida por $\phi_k$. Este ángulo se denomina *ángulo de fricción cinética*, donde

$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{F_k}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_k N}{N}\right) = \tan^{-1}\mu_k$$

Por comparación, $\phi_s \geq \phi_k$.

8

Los efectos anteriores referentes a la fricción pueden resumirse con la referencia a la gráfica de la figura 8-3, el cual muestra la variación de la fuerza de fricción *F* contra la carga aplicada *P*. Aquí, la fuerza de fricción se clasifica de tres formas diferentes:

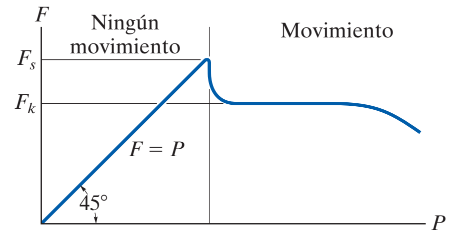



**Fig. 8-3**

- *F* es una *fuerza de fricción estática* si se mantiene el equilibrio.
- *F* es una *fuerza de fricción estática limitante* $F_s$, cuando alcanza un valor máximo necesario para mantener el equilibrio.
- *F* se llama *fuerza de fricción cinética* $F_k$ cuando ocurre el deslizamiento en la superficie de contacto.

Observe también en la gráfica que para valores muy grandes de *P* o para velocidades altas, los efectos aerodinámicos causarán que $F_k$ así como $\mu_k$ empiecen a disminuir.

**Características de la fricción seca.** Como resultado de *experimentos* que son pertinentes para el análisis anterior, podemos establecer las siguientes reglas aplicables a cuerpos sometidos a fricción seca.

- La fuerza de fricción actúa *tangencialmente* a las superficies de contacto en una dirección *opuesta* al *movimiento* o a la tendencia al movimiento de una superficie con respecto a otra.
- La fuerza de fricción estática máxima $F_s$ que puede desarrollarse es independiente del área de contacto, siempre que la presión normal no sea ni muy baja ni muy grande para deformar o aplastar severamente las superficies de contacto de los cuerpos.
- Por lo general, la fuerza de fricción estática máxima es mayor que la fuerza de fricción cinética para cualquiera de las dos superficies de contacto. Sin embargo, si uno de los cuerpos se está moviendo a *velocidad muy baja* sobre la superficie de otro cuerpo, $F_k$ se vuelve aproximadamente igual a $F_s$, es decir, $\mu_s \approx \mu_k$.
- Cuando en la superficie de contacto el *deslizamiento* está *a punto de ocurrir*, la fuerza de fricción estática máxima es proporcional a la fuerza normal, de manera que $F_s = \mu_s N$.
- Cuando está *ocurriendo* el *deslizamiento* en la superficie de contacto, la fuerza de fricción cinética es proporcional a la fuerza normal, de manera que $F_k = \mu_k N$.

8

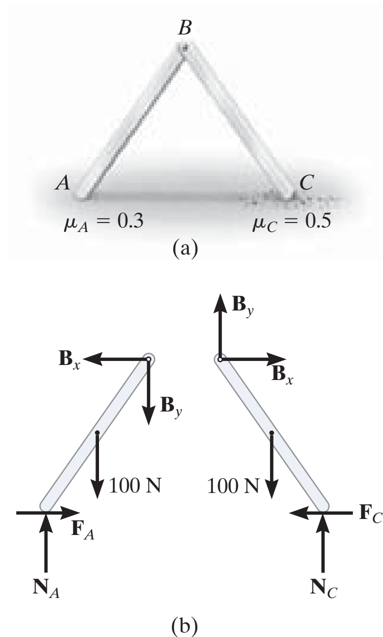



Fig. 8-4

## 8.2 Problemas que implican fricción seca

Si un cuerpo rígido está en equilibrio cuando se somete a un sistema de fuerzas que incluye el efecto de la fricción, el sistema de fuerzas debe satisfacer no sólo las ecuaciones de equilibrio sino *también* las leyes que gobiernan a las fuerzas de fricción.

**Tipos de problemas de fricción.** En general, hay tres tipos de problemas mecánicos que implican la fricción seca. Estos problemas pueden clasificarse fácilmente una vez que se trazan los diagramas de cuerpo libre y que se identifica el número total de incógnitas y se compara con el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles.

**Movimiento inminente no evidente.** Los problemas de este tipo son estrictamente problemas de equilibrio que requieren que el número total de incógnitas sea *igual* al número total de ecuaciones de equilibrio disponibles. Sin embargo, una vez determinadas las fuerzas de fricción por la solución, sus valores numéricos deben revisarse para garantizar que satisfacen la desigualdad $F \leq \mu_s N$; de otra manera, ocurrirá el deslizamiento y el cuerpo no permanecerá en equilibrio. En la figura 8-4*a*, se muestra un problema de este tipo. Aquí debemos determinar las fuerzas de fricción en $A$ y $C$ para verificar si se puede mantener la posición de equilibrio del bastidor de dos elementos. Si las barras son uniformes y tienen pesos conocidos de 100 N cada una, entonces los diagramas de cuerpo libre son como se muestra en la figura 8-4*b*. Se tienen seis componentes de fuerza que pueden determinarse *estrictamente* a partir de las seis ecuaciones de equilibrio (tres para cada elemento). Una vez que se determinan $F_A$, $N_A$, $F_C$ y $N_C$, las barras permanecerán en equilibrio si se cumple que $F_A \leq 0.3N_A$ y $F_C \leq 0.5N_C$.

8

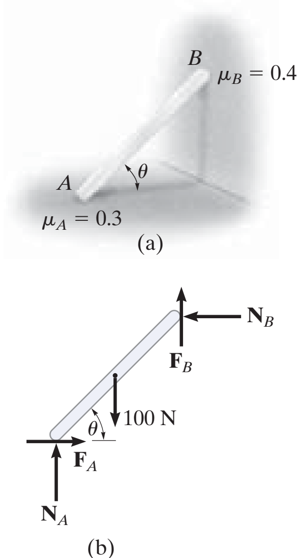



Fig. 8-5

**Movimiento inminente en todos los puntos de contacto.** En este caso, el número total de incógnitas será *igual* al número total de ecuaciones disponibles *más* el número total de ecuaciones de fricción, $F = \mu N$. Cuando *el movimiento es inminente* en los puntos de contacto, entonces $F_s = \mu_s N$; mientras que si el cuerpo se *desliza*, entonces $F_k = \mu_k N$. Por ejemplo, considere el problema de encontrar el ángulo $\theta$ más pequeño bajo el cual la barra de 100 N que se muestra en la figura 8-5*a* puede recargarse contra la pared sin que se deslice. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 8-5*b*. Aquí las *cinco* incógnitas se determinan a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio y de las *dos* ecuaciones de fricción que se aplican en *ambos* puntos de contacto, de manera que $F_A = 0.3N_A$ y $F_B = 0.4N_B$.

**Movimiento inminente en algunos puntos de contacto.** Aquí el número de incógnitas será *menor* que el de ecuaciones de equilibrio disponibles, más el número total de ecuaciones de fricción o ecuaciones condicionales para el volteo. Como resultado, existirán varias posibilidades para que se produzca el movimiento o el movimiento inminente y el problema implicará determinar qué tipo de movimiento ocurrirá realmente. Por ejemplo, considere el bastidor de dos elementos que se muestra en la figura 8-6*a*. En este problema queremos determinar la fuerza horizontal $P$ necesaria para ocasionar el movimiento. Si cada elemento tiene un peso de 100 N, entonces los diagramas de cuerpo libre son como se muestran en la figura 8-6*b*. Se tienen *siete* incógnitas. Para encontrar una solución única debemos satisfacer las *seis* ecuaciones de equilibrio (tres para cada elemento) y sólo *una* de dos posibles ecuaciones de fricción estática. Esto significa que conforme $P$ aumente causará deslizamiento en $A$ y ningún deslizamiento en $C$, de manera que $F_A = 0.3N_A$ y $F_C \leq 0.5N_C$; o bien ocurre deslizamiento en $C$ y ningún deslizamiento en $A$, en cuyo caso $F_C = 0.5N_C$ y $F_A \leq 0.3N_A$. La situación real puede determinarse al calcular $P$ en cada caso y al seleccionar después el caso para el cual $P$ es *más pequeña*. Si en ambos casos se calcula el *mismo valor* para $P$, lo que en la práctica sería altamente improbable, entonces el deslizamiento ocurre simultáneamente en ambos puntos; es decir, las *siete incógnitas* satisfacen *ocho ecuaciones*.

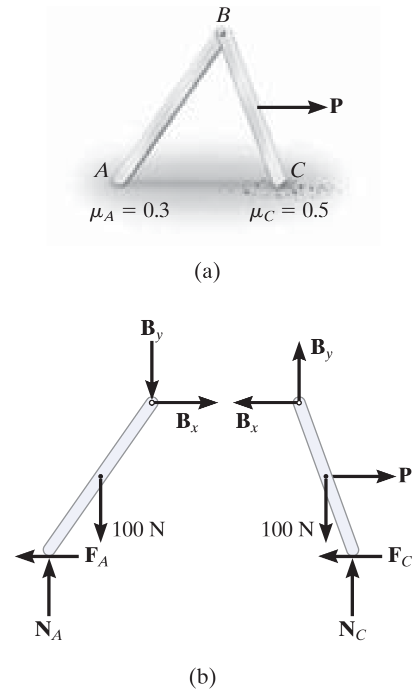
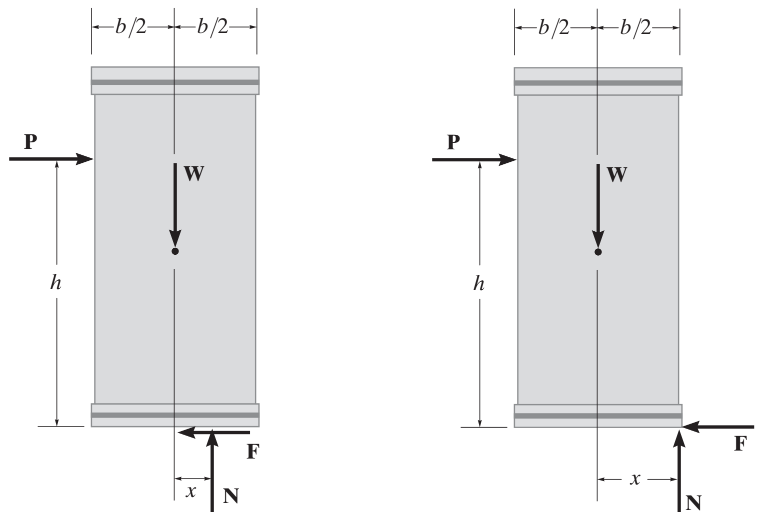
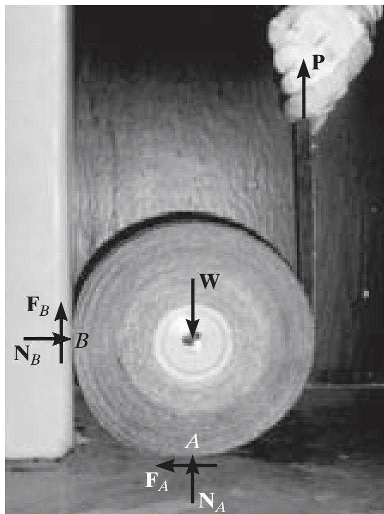



**Fig. 8-6**






Considere que se empuja el embalaje uniforme con peso $W$ y que descansa sobre una superficie rugosa. Como se muestra en el primer diagrama de cuerpo libre, si la magnitud de **P** es pequeña, el embalaje permanecerá en equilibrio. Cuando $P$ aumenta, el embalaje estará a punto de deslizarse sobre la superficie ($F = \mu_s N$), o si la superficie es muy rugosa ($\mu_s$ grande) entonces la fuerza normal resultante se moverá a la esquina, $x = b/2$, como se muestra en el segundo diagrama de cuerpo libre. En este punto el embalaje comenzará a volcarse; incluso, podrá volcarse más fácilmente si se aplica **P** a una mayor altura $h$ sobre la superficie, o si el ancho $b$ del embalaje es más pequeño.




La fuerza vertical **P** aplicada sobre este rollo debe ser lo bastante grande para vencer la resistencia de fricción en las superficies de contacto $A$ y $B$ a fin de causar la rotación.

### Ecuaciones de equilibrio contra ecuaciones de fricción.

Siempre que resolvamos problemas donde la fuerza de fricción $F$ debe ser una "fuerza de equilibrio" y satisface la desigualdad $F < \mu_s N$, podemos suponer el sentido de la dirección de $F$ en el diagrama de cuerpo libre. El sentido correcto se conoce *después* de obtener $F$ a partir de las ecuaciones de equilibrio. Si $F$ es un escalar negativo, el sentido de **F** es opuesto del que se supuso. Esta conveniencia de *suponer* el sentido de **F** es posible porque las ecuaciones de equilibrio igualan a cero las *componentes de los vectores* que actúan en la *misma dirección*. Sin embargo, en los casos en que la ecuación de fricción $F = \mu N$ se usa para resolver un problema, la conveniencia de *suponer* el sentido de **F** se *pierde*, como la ecuación de fricción relaciona sólo las *magnitudes* de dos vectores *perpendiculares*. En consecuencia, *siempre que* la ecuación de fricción se use para resolver un problema, **F** *debe* mostrarse actuando con su *sentido correcto* en el diagrama de cuerpo libre.

## Procedimiento para el análisis

Los problemas de equilibrio que implican fricción seca pueden resolverse con el siguiente procedimiento.

### Diagramas de cuerpo libre.

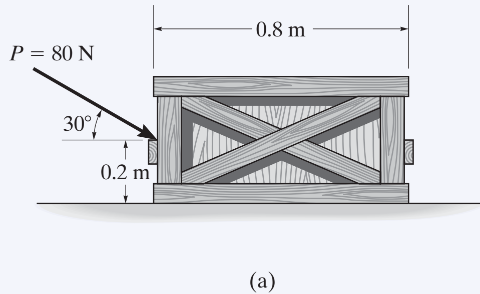
- Trace los diagramas de cuerpo libre necesarios, y a menos que se indique en el problema que el movimiento es inminente o que ocurre deslizamiento, muestre *siempre* las fuerzas de fricción como incógnitas (es decir, *no suponga* que $F = \mu N$).
- Determine el número de incógnitas y compárelo con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles.
- Si hay más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, será necesario aplicar la ecuación de fricción en algunos, si no es que en todos, los puntos de contacto para obtener las ecuaciones adicionales necesarias para una solución completa.
- Si ha de usarse la ecuación $F = \mu N$, será necesario mostrar que **F** actúa en la dirección correcta en el diagrama de cuerpo libre.

### Ecuaciones de equilibrio y de fricción.

- Aplique las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de fricción necesarias (o ecuaciones condicionales si es posible el volteo) y despeje las incógnitas.
- Si el problema implica un sistema tridimensional de fuerzas tal que resulta difícil obtener las componentes de fuerza o los brazos de momento necesarios, aplique las ecuaciones de equilibrio usando vectores cartesianos.

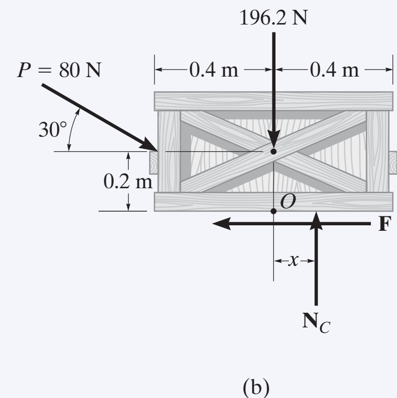
## EJEMPLO 8.1

El embalaje uniforme que se muestra en la figura 8-7*a* tiene una masa de 20 kg. Si una fuerza $P = 80$ N se aplica al embalaje, determine si éste permanece en equilibrio. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.




(a)

**Fig. 8-7**




(b)

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 8-7*b*, la fuerza normal *resultante* $\mathbf{N}_C$ debe actuar a una distancia $x$ de la línea central del embalaje para contrarrestar el efecto de volteo causado por **P**. Hay *tres incógnitas*, $F$, $N_C$ y $x$, que pueden determinarse estrictamente a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad 80 \cos 30° \text{ N} - F = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad -80 \text{ sen } 30° \text{ N} + N_C - 196.2 \text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_O = 0; \qquad 80 \text{ sen } 30° \text{ N}(0.4 \text{ m}) - 80 \cos 30° \text{ N}(0.2 \text{ m}) + N_C(x) = 0$$

Al resolver,

$$F = 69.3 \text{ N}$$

$$N_C = 236 \text{ N}$$

$$x = -0.00908 \text{ m} = -9.08 \text{ mm}$$

Como $x$ es negativa, eso indica que la fuerza normal *resultante* actúa (ligeramente) a la *izquierda* de la línea central del embalaje. No ocurrirá ningún vuelco, ya que $x < 0.4$ m. Además, la fuerza de fricción *máxima* que se puede desarrollar en la superficie de contacto es $F_{\text{máx}} = \mu_s N_C = 0.3(236 \text{ N}) = 70.8$ N. Como $F = 69.3 \text{ N} < 70.8$ N, el embalaje *no se deslizará*, aunque estará muy cerca de hacerlo.

8

## EJEMPLO 8.2

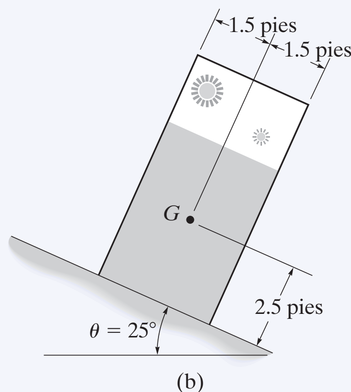


(a)

Se observa que cuando la caja del camión de volteo se eleva a un ángulo de $\theta = 25°$, las máquinas expendedoras comienzan a deslizarse fuera de la caja, figura 8-8*a*. Determine el coeficiente de fricción estática entre las máquinas y la superficie de la caja del camión.

### SOLUCIÓN

En la figura 8-8*b*, se muestra un modelo idealizado de una máquina expendedora que descansa sobre la caja del camión. Se han medido las dimensiones y se ha localizado el centro de gravedad. Supondremos que la máquina pesa $W$.




(b)

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en la figura 8-8*c*, la dimensión $x$ se usa para localizar la posición de la fuerza normal resultante **N**. Hay cuatro incógnitas, $N$, $F$, $\mu_s$ y $x$.

**Ecuaciones de equilibrio.**

$$+\searrow\Sigma F_x = 0; \qquad W \text{ sen } 25° - F = 0 \qquad (1)$$

$$+\nearrow\Sigma F_y = 0; \qquad N - W \cos 25° = 0 \qquad (2)$$

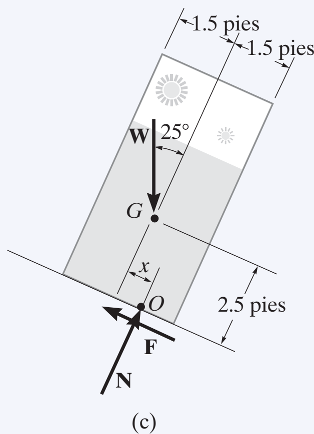
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0; \quad -W \text{ sen } 25°(2.5 \text{ pies}) + W \cos 25°(x) = 0 \qquad (3)$$

Como el movimiento es inminente en $\theta = 25°$, con las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$F_s = \mu_s N; \qquad W \text{ sen } 25° = \mu_s(W \cos 25°)$$

$$\mu_s = \tan 25° = 0.466 \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

El ángulo de $\theta = 25°$ se denomina *ángulo de reposo*, y por comparación, es igual al ángulo de fricción estática, $\theta = \phi_s$. Observe a partir de los cálculos que $\theta$ es independiente del peso de la máquina expendedora, por lo que si se conoce $\theta$ se tiene un método conveniente para determinar el coeficiente de fricción estática.




(c)

**Fig. 8-8**

**NOTA:** a partir de la ecuación 3, encontramos $x = 1.17$ pies. Como 1.17 pies < 1.5 pies, la máquina expendedora se desliza antes de que pueda volcarse, como se observa en la figura 8-8*a*.

8

## EJEMPLO 8.3

La escalera uniforme de 10 kg que se muestra en la figura 8-9*a*, está recargada contra la pared lisa en $B$, y el extremo $A$ descansa sobre el plano horizontal rugoso cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$. Determine el ángulo de inclinación $\theta$ y la reacción normal en $B$ si la escalera está a punto de deslizarse.

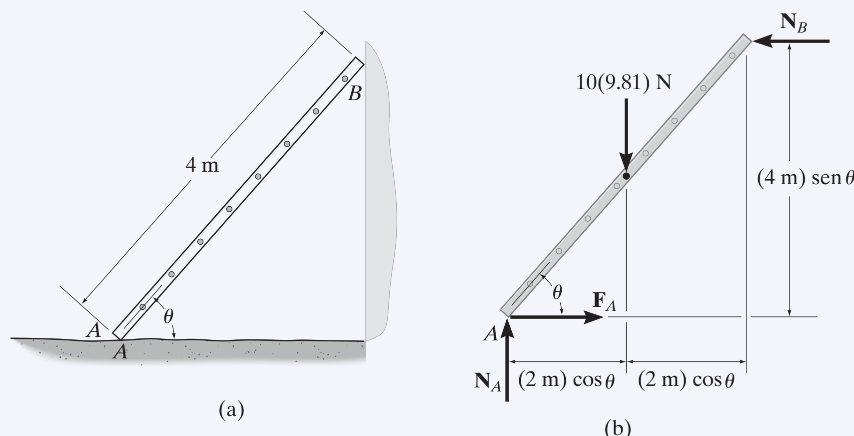



**Fig. 8-9**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 8-9*b*, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ debe actuar hacia la derecha ya que el movimiento inminente en $A$ es hacia la izquierda.

**Ecuaciones de equilibrio y de fricción.** Como la escalera está a punto de deslizarse, entonces $F_A = \mu_s N_A = 0.3N_A$. Por inspección, $N_A$ se puede obtener directamente.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A - 10(9.81)\text{ N} = 0 \qquad N_A = 98.1\text{ N}$$

Con este resultado, $F_A = 0.3(98.1\text{ N}) = 29.43\text{ N}$. Ahora se puede encontrar $N_B$.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 29.43\text{ N} - N_B = 0$$

$$N_B = 29.43\text{ N} = 29.4\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Por último, el ángulo $\theta$ puede determinarse al sumar momentos con respecto al punto $A$.

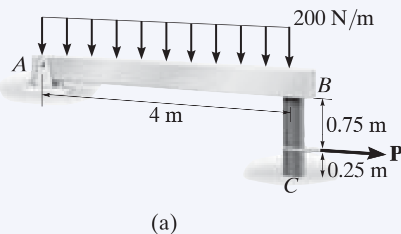
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad (29.43\text{ N})(4\text{ m})\,\text{sen}\,\theta - [10(9.81)\text{ N}](2\text{ m})\cos\theta = 0$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = 1.6667$$

$$\theta = 59.04^\circ = 59.0^\circ \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

8

## EJEMPLO 8.4




(a)

La viga $AB$ está sometida a una carga uniforme de 200 N/m y está sostenida en $B$ mediante el poste $BC$, figura 8-10*a*. Si los coeficientes de fricción estática en $B$ y $C$ son $\mu_B = 0.2$ y $\mu_C = 0.5$, determine la fuerza $\mathbf{P}$ necesaria para jalar el poste por debajo de la viga. Ignore el peso de los elementos y el espesor de la viga.

### SOLUCIÓN

**Diagramas de cuerpo libre.** En la figura 8-10*b*, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. Al aplicar $\Sigma M_A = 0$, obtenemos $N_B = 400$ N. Este resultado se muestra en el diagrama de cuerpo libre del poste, figura 8-10*c*. Con referencia a este elemento, las *cuatro* incógnitas $F_B$, $P$, $F_C$ y $N_C$ se determinan a partir de las *tres* ecuaciones de equilibrio y *una* ecuación de fricción aplicada en $B$ o en $C$.

800 N
$\mathbf{A}_x$ A $F_B$
$\mathbf{A}_y$ 2 m 2 m $N_B = 400$ N

(b)

**Ecuaciones de equilibrio y fricción.**

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad P - F_B - F_C = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 400 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -P(0.25 \text{ m}) + F_B(1 \text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

**(El poste se desliza en *B* y gira alrededor de *C*.)** Esto requiere que $F_C \leq \mu_C N_C$ y

$$F_B = \mu_B N_B; \qquad F_B = 0.2(400 \text{ N}) = 80 \text{ N}$$

Al usar este resultado y resolver las ecuaciones 1 a 3, obtenemos

$$P = 320 \text{ N}$$
$$F_C = 240 \text{ N}$$
$$N_C = 400 \text{ N}$$

Como $F_C = 240 \text{ N} > \mu_C N_C = 0.5(400 \text{ N}) = 200$ N, ocurre deslizamiento en $C$. Por consiguiente, debe estudiarse el otro caso de deslizamiento.

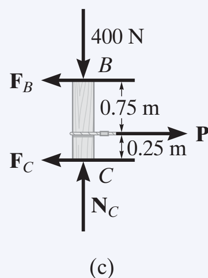
**(El poste se desliza en *C* y gira alrededor de *B*.)** Aquí $F_B \leq \mu_B N_B$ y

$$F_C = \mu_C N_C; \qquad F_C = 0.5 N_C \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones 1 a 4 se obtiene

$$P = 267 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$N_C = 400 \text{ N}$$
$$F_C = 200 \text{ N}$$
$$F_B = 66.7 \text{ N}$$

Resulta obvio que este caso se presenta primero ya que requiere un valor *menor* para $P$.

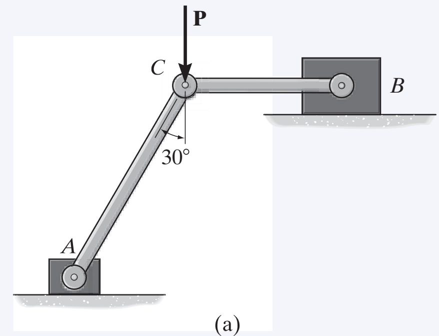



(c)

**Fig. 8-10**

## EJEMPLO 8.5

Los bloques $A$ y $B$ tienen una masa de 3 kg y 9 kg, respectivamente, y están conectados a las articulaciones sin peso que se muestran en la figura 8-11$a$. Determine la fuerza vertical **P** más grande que puede aplicarse en el pasador $C$ sin causar ningún movimiento. El coeficiente de fricción estática entre los bloques y las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$.



(a)

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Las articulaciones son elementos de dos fuerzas, como lo muestran los diagramas de cuerpo libre del pasador $C$ y de los bloques $A$ y $B$ en la figura 8-11$b$. Como la componente horizontal de $\mathbf{F}_{AC}$ tiende a mover el bloque $A$ hacia la izquierda, $\mathbf{F}_A$ debe actuar hacia la derecha. Del mismo modo, $\mathbf{F}_B$ debe actuar hacia la izquierda para oponerse a la tendencia de movimiento del bloque $B$ hacia la derecha, causada por $\mathbf{F}_{BC}$. Hay siete incógnitas y seis ecuaciones de equilibrio de fuerzas disponibles, dos para el pasador y dos para cada bloque, de manera que *sólo* se necesita *una* ecuación de fricción.

**Ecuaciones de equilibrio y fricción.** La fuerza en las articulaciones $AC$ y $BC$ pueden relacionarse con $P$ al considerar el equilibrio del pasador $C$.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AC}\cos 30° - P = 0; \qquad F_{AC} = 1.155P$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad 1.155P \text{ sen } 30° - F_{BC} = 0; \qquad F_{BC} = 0.5774P$$

Con el resultado de $F_{AC}$ para el bloque $A$,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad F_A - 1.155P \text{ sen } 30° = 0; \qquad F_A = 0.5774P \qquad (1)$$

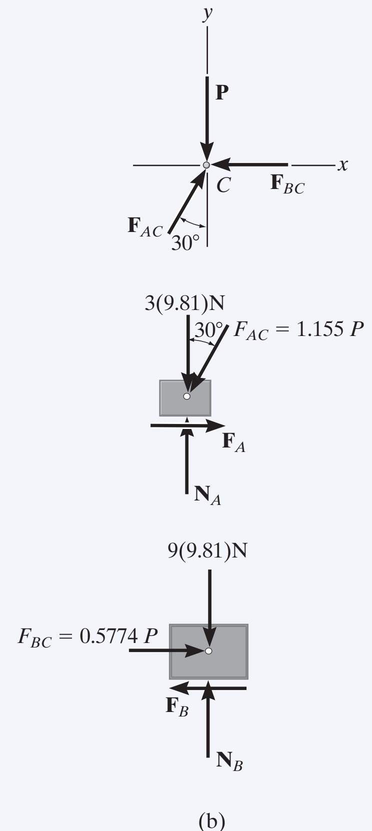
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_A - 1.155P\cos 30° - 3(9.81\text{ N}) = 0; \qquad (2)$$

$$N_A = P + 29.43\text{ N}$$

Con el resultado de $F_{BC}$, para el bloque $B$,

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad (0.5774P) - F_B = 0; \qquad F_B = 0.5774P \qquad (3)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_B - 9(9.81)\text{ N} = 0; \qquad N_B = 88.29\text{ N}$$



(b)

**Fig. 8-11**

El movimiento del sistema puede estar causado *o bien* por el deslizamiento inicial del bloque $A$ o por el del bloque $B$. Si suponemos que el bloque $A$ se desliza primero, entonces

$$F_A = \mu_s N_A = 0.3\,N_A \qquad (4)$$

Al sustituir las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 4,

$$0.5774P = 0.3(P + 29.43)$$

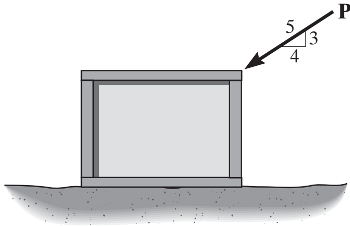
$$P = 31.8\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación 3, obtenemos $F_B = 18.4$ N. Como la fuerza de fricción estática máxima en $B$ es $(F_B)_{\text{máx}} = \mu_s N_B = 0.3(88.29\text{ N}) = 26.5\text{ N} > F_B$, el bloque $B$ no se deslizará. Por lo tanto, el supuesto anterior es correcto. Observe que si la desigualdad no se satisficiera, tendríamos que suponer deslizamiento del bloque $B$ y después despejar $P$.

8

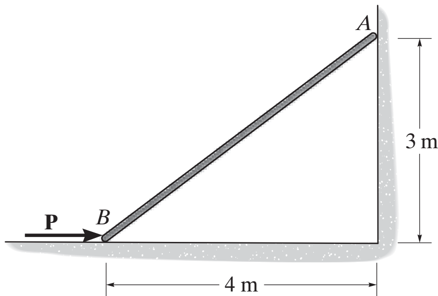
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F8-1.** Si $P = 200$ N, determine la fricción desarrollada entre el embalaje de 50 kg y el suelo. El coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.3$.



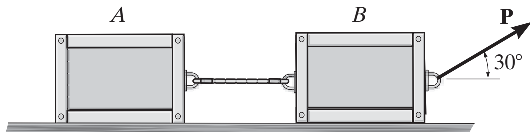

**F8-1**

**F8-2.** Determine la fuerza mínima $P$ para evitar que la barra $AB$ de 30 kg se deslice. La superficie de contacto en $B$ es lisa, mientras que el coeficiente de fricción estática entre la barra y la pared en $A$ es $\mu_s = 0.2$.



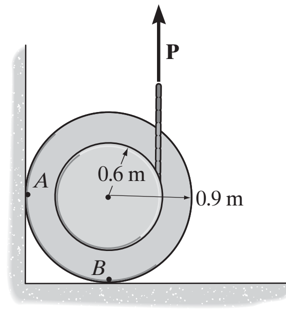

**F8-2**

**F8-3.** Determine la fuerza $P$ máxima que puede aplicarse sin hacer que los dos embalajes de 50 kg se muevan. El coeficiente de fricción estática entre cada embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.25$.



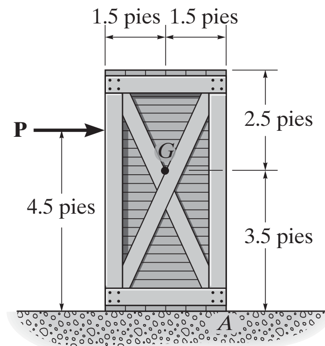

**F8-3**

**F8-4.** Si el coeficiente de fricción estática en los puntos de contacto $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.3$, determine la fuerza $P$ máxima que puede aplicarse sin que el carrete de 100 kg se mueva.




**F8-4**

**F8-5.** Determine la fuerza $P$ mínima que puede aplicarse sin causar el movimiento del embalaje de 250 lb, el cual tiene un centro de gravedad en $G$. El coeficiente de fricción estática en el piso es $\mu_s = 0.4$.



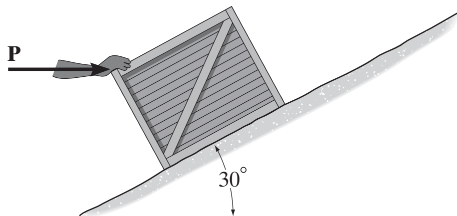

**F8-5**

## PROBLEMAS

•**8-1.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima necesaria para evitar que el embalaje se deslice hacia abajo sobre el plano inclinado. El embalaje tiene una masa de 50 kg y el coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el plano es $\mu_s = 0.25$.

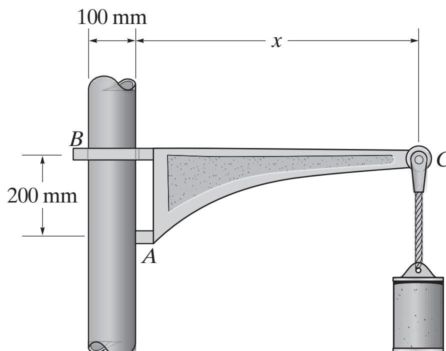
**8-2.** Determine la fuerza $P$ mínima necesaria para empujar el embalaje hacia arriba sobre el plano inclinado. La masa del embalaje es de 50 kg y el coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el plano es $\mu_s = 0.25$.

**8-3.** Una fuerza horizontal de $P = 100$ N es justo la necesaria para evitar que el embalaje se deslice hacia abajo sobre el plano, y se requiere una fuerza horizontal de $P = 350$ N para comenzar a empujar el embalaje hacia arriba sobre el plano. Determine el coeficiente de fricción estática entre el plano y el embalaje, y encuentre la masa del embalaje.




**Probs. 8-1/2/3**

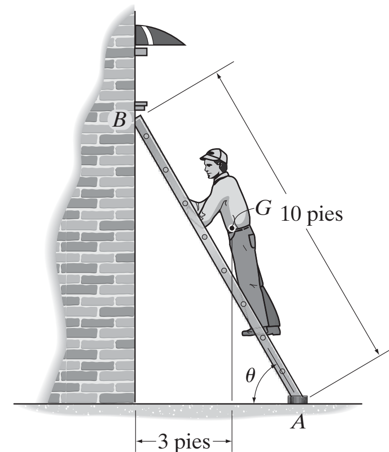
*****8-4.** Si el coeficiente de fricción estática en $A$ es $\mu_s = 0.4$ y el collarín en $B$ es liso, de manera que sólo ejerce una fuerza horizontal sobre el tubo, determine la distancia mínima $x$ para que la ménsula pueda soportar el cilindro de cualquier masa sin deslizarse. Ignore la masa de la ménsula.




**Prob. 8-4**

•**8-5.** El hombre de 180 lb sube por la escalera y se detiene en la posición que se muestra después de sentir que la escalera está a punto de deslizarse. Determine la inclinación $\theta$ de la escalera si el coeficiente de fricción estática entre la almohadilla de fricción $A$ y el suelo es $\mu_s = 0.4$. Suponga que la pared en $B$ es lisa. El centro de gravedad para el hombre está en $G$. Ignore el peso de la escalera.

**8-6.** El hombre de 180 lb sube por la escalera y se detiene en la posición mostrada después de sentir que la escalera está a punto de deslizarse. Determine el coeficiente de fricción estática entre la almohadilla de fricción $A$ y el suelo si la inclinación de la escalera es $\theta = 60°$ y la pared en $B$ es lisa. El centro de gravedad para el hombre está en $G$. Ignore el peso de la escalera.

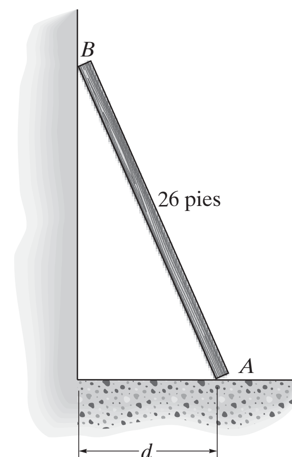



**Probs. 8-5/6**

**8-7.** El peso del poste uniforme y delgado es de 30 lb y su longitud de 26 pies. Si se le coloca contra la pared lisa y sobre el piso rugoso en la posición $d = 10$ pies, ¿permanecerá en esa posición cuando se libere? El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$.

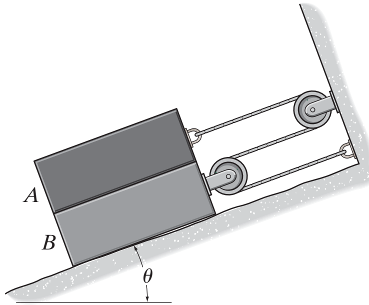
*****8-8.** El peso del poste uniforme es de 30 lb y su longitud de 26 pies. Determine la distancia $d$ máxima a la que puede colocarse de la pared lisa sin deslizarse. El coeficiente de fricción estática entre el piso y el poste es $\mu_s = 0.3$.

8




**Probs. 8-7/8**

**•8-9.** Si el coeficiente de fricción estática de todas las superficies en contacto es $\mu_s$, determine la inclinación $\theta$ a la cual los bloques idénticos, cada uno de peso $W$, comienzan a deslizarse.

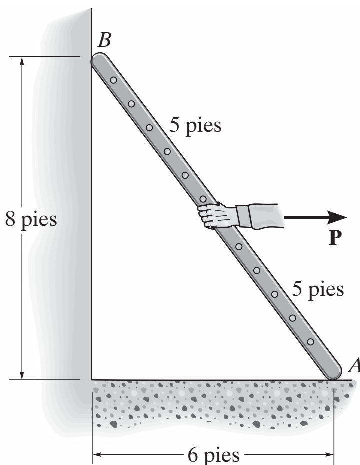



**Prob. 8-9**

**8-10.** La escalera uniforme de 20 lb descansa sobre el piso rugoso, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.8$, y contra la pared lisa en $B$. Determine la fuerza horizontal $P$ que debe ejercer el hombre sobre la escalera para que ésta se mueva.

**8-11.** La escalera uniforme de 20 lb descansa sobre el piso rugoso, cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$, y contra la pared lisa en $B$. Determine la fuerza horizontal $P$ que debe ejercer el hombre sobre la escalera para que ésta se mueva.

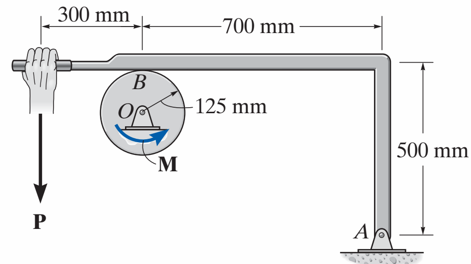





**Probs. 8-10/11**

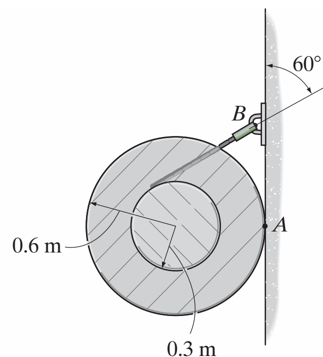
***8-12.** Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el tambor y la barra de frenado son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente. Si $M = 50$ N · m y $P = 85$ N, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $O$. Ignore el peso y el espesor del freno. El tambor tiene una masa de 25 kg.

**•8-13.** El coeficiente de fricción estática entre el tambor y la barra de frenado es $\mu_s = 0.4$. Si el momento $M = 35$ N · m, determine la fuerza $P$ más pequeña que debe aplicarse a la barra de frenado a fin de evitar que el tambor gire. Además, determine las componentes horizontal y vertical correspondientes de la reacción en el pasador $O$. Ignore el peso y el espesor de la barra de frenado. El tambor tiene una masa de 25 kg.



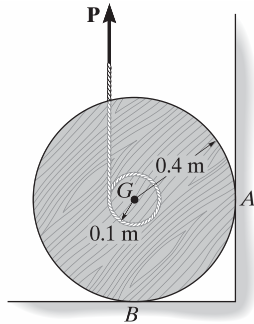

**Probs. 8-12/13**

**8-14.** Determine el coeficiente de fricción estática mínimo entre el carrete uniforme de 50 kg y la pared, de modo que el carrete no se deslice.



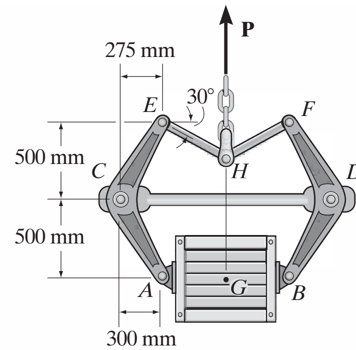

**Prob. 8-14**

**8-15.** El carrete tiene una masa de 200 kg y descansa contra la pared y sobre el piso. Si el coeficiente de fricción estática en $B$ es $(\mu_s)_B = 0.3$, el coeficiente de fricción cinética es $(\mu_k)_B = 0.2$, y la pared es lisa, determine la fuerza de fricción desarrollada en $B$ cuando la fuerza vertical aplicada al cable es $P = 800$ N.




**Prob. 8-15**

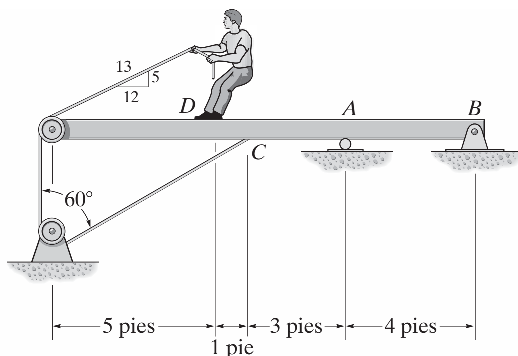
**8-18.** Las tenazas se usan para elevar el embalaje de 150 kg, cuyo centro de masa está en $G$. Determine el menor coeficiente de fricción estática en los bloques de pivote, de manera que el embalaje se pueda levantar.




**Prob. 8-18**

*__8-16.__ El muchacho de 80 lb está de pie sobre la viga y jala la cuerda con tanta fuerza que lo hace resbalar. Si el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y la viga es $(\mu_s)_D = 0.4$, determine las reacciones en $A$ y $B$. La viga es uniforme y pesa 100 lb. Ignore el tamaño de las poleas y el espesor de la viga.

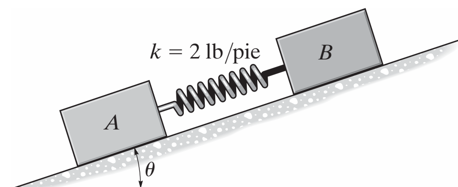
•**8-17.** El muchacho de 80 lb está de pie sobre la viga y jala con una fuerza de 40 lb. Si $(\mu_s)_D = 0.4$, determine la fuerza de fricción entre sus zapatos y la viga y las reacciones en $A$ y $B$. La viga es uniforme y pesa 100 lb. Ignore el tamaño de las poleas y el espesor de la viga.




**Probs. 8-16/17**

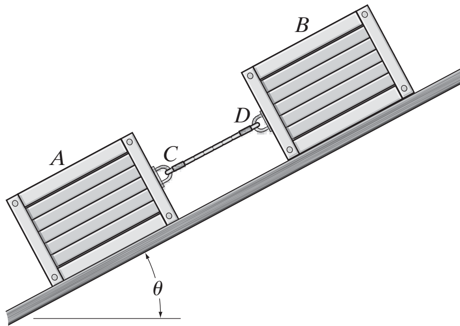
**8-19.** Dos bloques $A$ y $B$ tienen un peso de 10 lb y 6 lb, respectivamente. Descansan sobre el plano inclinado cuyos coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.15$ y $\mu_B = 0.25$. Determine el ángulo de inclinación $\theta$ para el cual ambos bloques empiezan a resbalar. Encuentre además el alargamiento o la compresión requerida en el resorte que los conecta para que esto ocurra. El resorte tiene rigidez de $k = 2$ lb/pie.

*__8-20.__ Dos bloques $A$ y $B$ tienen un peso de 10 lb y 6 lb, respectivamente. Descansan sobre el plano inclinado para el cual los coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.15$ y $\mu_B = 0.25$. Determine el ángulo $\theta$ que ocasionará el movimiento de uno de los bloques. ¿Cuál será la fuerza de fricción bajo cada uno de los bloques cuando esto ocurra? La rigidez del resorte es $k = 2$ lb/pie y en un principio no está alargado.



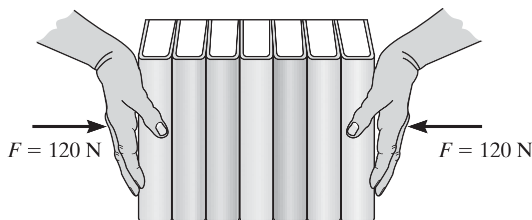

**Probs. 8-19/20**

**•8-21.** Los embalajes $A$ y $B$ pesan 200 lb y 150 lb, respectivamente. Están conectados entre sí con un cable y se colocan sobre el plano inclinado. Si el ángulo $\theta$ se aumenta de manera gradual, determine $\theta$ cuando los embalajes comienzan a deslizarse. Los coeficientes de fricción estática entre los embalajes y el plano son $\mu_A = 0.25$ y $\mu_B = 0.35$.



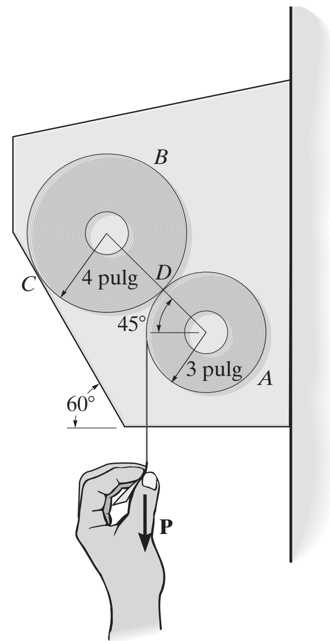

**Prob. 8-21**

**8-22.** Un hombre intenta sostener una pila de libros de manera horizontal al aplicar con sus manos una fuerza compresiva de $F = 120$ N sobre los extremos de la pila. Si cada libro tiene una masa de 0.95 kg, determine el número máximo de libros que puede sostener en la pila. El coeficiente de fricción estática entre las manos del hombre y un libro es $(\mu_s)_h = 0.6$ y entre dos libros $(\mu_s)_b = 0.4$.




**Prob. 8-22**

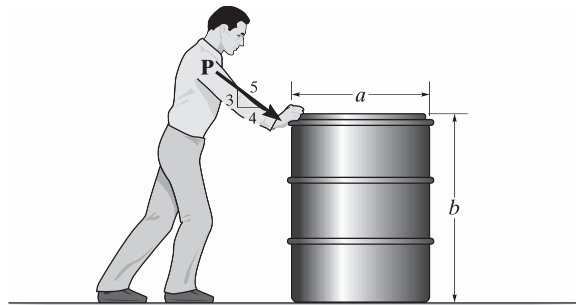
**8-23.** El dispensador de toallas contiene dos rollos de papel. El que está en uso se llama rollo de consumo $A$ y el otro es el rollo completo $B$. Pesan 2 lb y 5 lb, respectivamente. Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto $C$ y $D$ son $(\mu_s)_C = 0.2$ y $(\mu_s)_D = 0.5$, determine la fuerza vertical inicial $P$ que debe aplicarse al papel sobre el rollo de consumo para jalar una hoja. El rollo de consumo tiene un pasador en el centro, mientras que el rollo completo no lo tiene. Ignore la fricción en el pasador.




**Prob. 8-23**

***8-24.** El tambor tiene un peso de 100 lb y descansa sobre el piso cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$. Si $a = 2$ pies y $b = 3$ pies, determine la magnitud más pequeña de la fuerza $P$ que causará el movimiento inminente del tambor.

**•8-25.** El tambor tiene un peso de 100 lb y descansa sobre el piso cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si $a = 3$ pies y $b = 4$ pies, determine la magnitud más pequeña de la fuerza $P$ que causará el movimiento inminente del tambor.

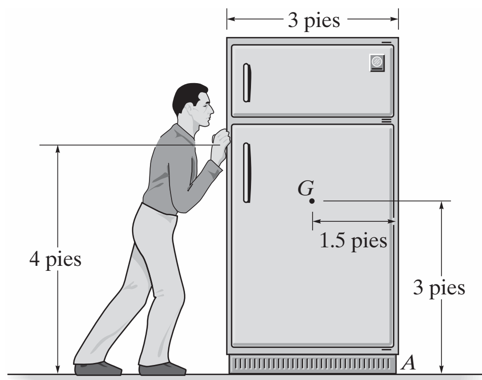



**Probs. 8-24/25**

8

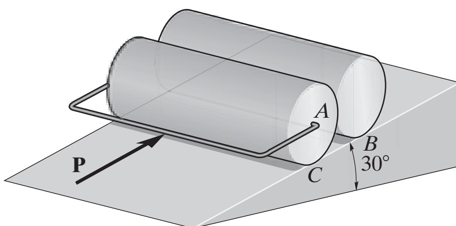
**8-26.** El refrigerador tiene un peso de 180 lb y descansa sobre un piso de mosaicos para el cual $\mu_s = 0.25$. Si el hombre empuja horizontalmente sobre el refrigerador en la dirección que se muestra, determine la magnitud de la fuerza horizontal necesaria para moverlo. Además, si el hombre tiene un peso de 150 lb, determine el coeficiente de fricción más pequeño entre sus zapatos y el piso para que no resbale.

**8-27.** El refrigerador tiene un peso de 180 lb y descansa sobre un piso de mosaicos para el cual $\mu_s = 0.25$. Además, el hombre tiene un peso de 150 lb y el coeficiente de fricción estática entre el piso y sus zapatos es $\mu_s = 0.6$. Si empuja horizontalmente sobre el refrigerador, determine si puede moverlo. De ser así, ¿el refrigerador se deslizará o se volcará?



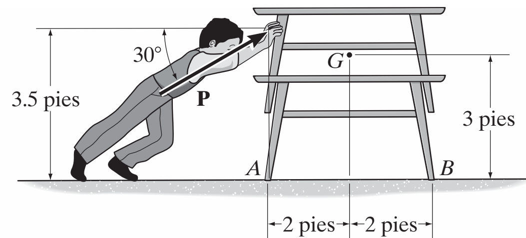

**Probs. 8-26/27**

*__8-28.__ Determine la fuerza mínima $P$ necesaria para empujar los dos cilindros de 75 kg hacia arriba sobre la pendiente. La fuerza actúa en forma paralela al plano y los coeficientes de fricción estática de las superficies en contacto son $\mu_A = 0.3$, $\mu_B = 0.25$ y $\mu_C = 0.4$. Cada cilindro tiene un radio de 150 mm.




**Prob. 8-28**

•**8-29.** Si el centro de gravedad de las mesas apiladas está en $G$, y la pila pesa 100 lb, determine la fuerza $P$ mínima que debe aplicar el niño sobre la pila para ocasionar un movimiento. El coeficiente de fricción estática en $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.3$. Las mesas están aseguradas entre sí.

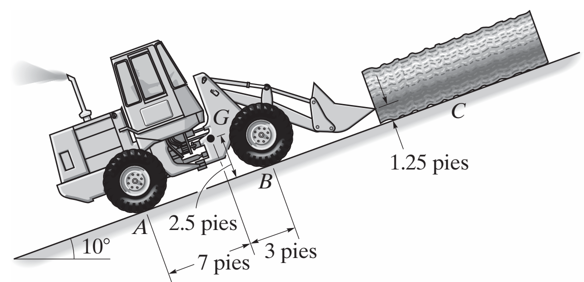



**Prob. 8-29**

**8-30.** El tractor tiene un peso de 8000 lb con centro de gravedad en $G$. Determine si puede empujar el tronco de 550 lb hacia arriba sobre la pendiente. El coeficiente de fricción estática entre el tronco y el suelo es $\mu_s = 0.5$, y entre las ruedas traseras del tractor y el suelo $\mu'_s = 0.8$. Las ruedas delanteras del tractor pueden girar libremente. Suponga que el motor puede desarrollar suficiente par de torsión para hacer que las ruedas traseras resbalen.

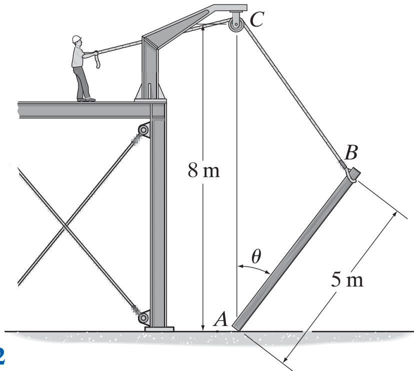
**8-31.** El tractor tiene un peso de 8000 lb con centro de gravedad en $G$. Determine el peso más grande del tronco que pueda empujarse hacia arriba sobre la pendiente. El coeficiente de fricción estática entre el tronco y el suelo es $\mu_s = 0.5$, y entre las ruedas traseras del tractor y el suelo $\mu'_s = 0.7$. Las ruedas delanteras del tractor pueden girar libremente. Suponga que el motor puede desarrollar suficiente par de torsión para hacer que las ruedas traseras resbalen.

8



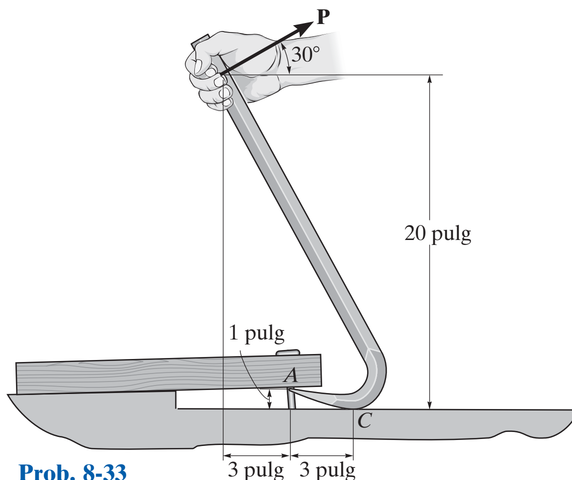

**Probs. 8-30/31**

***8-32.** El poste uniforme de 50 kg está a punto de deslizarse en $A$ cuando $\theta = 45°$. Determine el coeficiente de fricción estática en $A$.



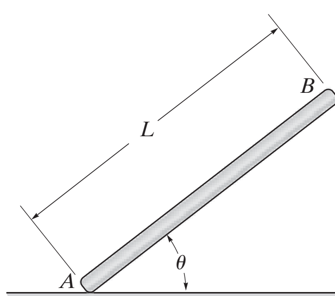

Prob. 8-32

**•8-33.** Se aplica una fuerza $P = 20$ lb en forma perpendicular al mango de la barra cuello de ganso que se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y la madera es $\mu_s = 0.5$, determine la fuerza normal de los dientes en $A$ sobre la tabla superior. Suponga que la superficie en $C$ es lisa.




Prob. 8-33

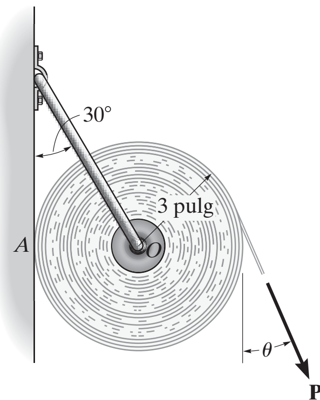
**8-34.** La barra delgada tiene un peso $W$ y descansa contra el piso y la pared, los cuales tienen coeficientes de fricción estática de $\mu_A$ y $\mu_B$, respectivamente. Determine el valor mínimo de $\theta$ para el cual la barra no se moverá.




Prob. 8-34

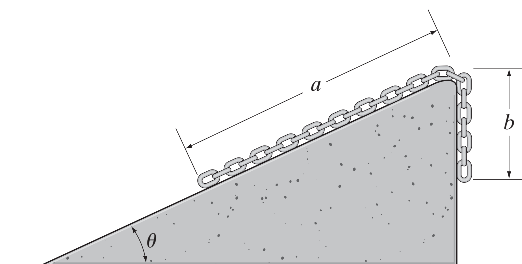
**8-35.** Un rollo de papel tiene un peso uniforme de 0.75 lb y está colgado de un gancho de alambre de manera que descansa sobre la pared. Si no se toma en cuenta el peso del gancho y la chumacera en $O$ puede considerarse sin fricción, determine la fuerza $P$ necesaria para empezar a girar el rollo si $\theta = 30°$. El coeficiente de fricción estática entre la pared y el papel es $\mu_s = 0.25$.

***8-36.** Un rollo de papel tiene un peso uniforme de 0.75 lb y está colgado de un gancho de alambre de manera que descansa sobre la pared. Si no se toma en cuenta el peso del gancho y la chumacera en $O$ puede considerarse sin fricción, determine la fuerza $P$ mínima y el ángulo asociado $\theta$ necesarios para empezar a girar el rollo. El coeficiente de fricción estática entre la pared y el papel es $\mu_s = 0.25$.



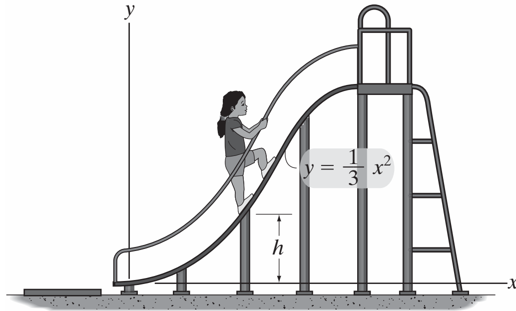

Probs. 8-35/36

**•8-37.** Si el coeficiente de fricción estática entre la cadena y el plano inclinado es $\mu_s = \tan\theta$, determine la longitud colgante $b$ de manera que la cadena esté a punto de resbalar hacia arriba sobre el plano inclinado. La cadena pesa $w$ por unidad de longitud.



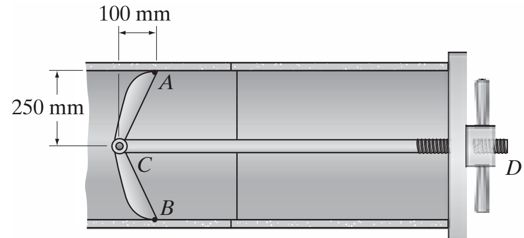

Prob. 8-37

**8-38.** Determine la altura máxima $h$ en metros hasta donde puede subir la niña sobre la resbaladilla sin sostenerse en los rieles o sobre su pierna izquierda. El coeficiente de fricción estática entre los zapatos de la niña y la resbaladilla es $\mu_s = 0.8$.




Prob. 8-38

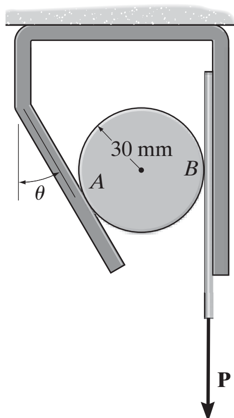
**•8-41.** La abrazadera se usa para apretar la conexión entre dos tubos de drenaje de concreto. Determine el menor coeficiente de fricción estática en $A$ y $B$ de manera que la abrazadera no se deslice sin importar la fuerza en el eje $CD$.




Prob. 8-41

**8-39.** Si el coeficiente de fricción estática en $B$ es $\mu_s = 0.3$, determine el máximo ángulo $\theta$ y el mínimo coeficiente de fricción estática en $A$ para que el rodillo permanezca autobloqueado, sin importar la magnitud de la fuerza **P** aplicada a la banda. Ignore el peso del rodillo y la fricción entre la banda y la superficie vertical.

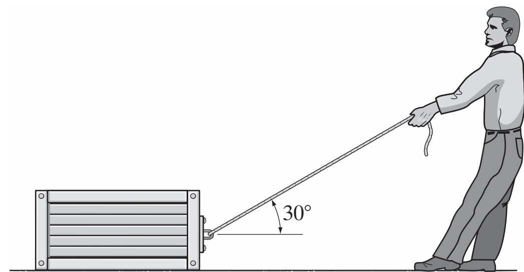
*__8-40.__ Si $\theta = 30°$, determine el mínimo coeficiente de fricción estática en $A$ y en $B$ para que el rodillo permanezca autobloqueado, sin importar la magnitud de la fuerza **P** aplicada a la banda. Ignore el peso del rodillo y la fricción entre la banda y la superficie vertical.




Probs. 8-39/40

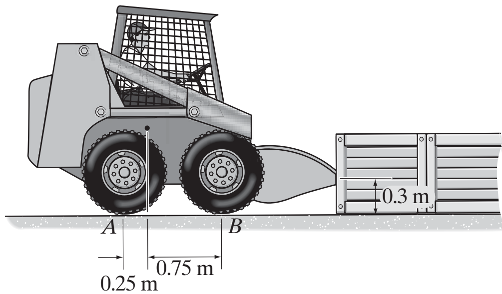
**8-42.** El coeficiente de fricción estática entre el embalaje de 150 kg y el suelo es $\mu_s = 0.3$, mientras que el coeficiente de fricción estática entre los zapatos del hombre de 80 kg y el suelo es $\mu'_s = 0.4$. Determine si el hombre puede mover el embalaje.

**8-43.** Si el coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.3$, determine el coeficiente de fricción estática mínimo entre los zapatos del hombre y el suelo, de manera que el hombre pueda mover el embalaje.




Probs. 8-42/43

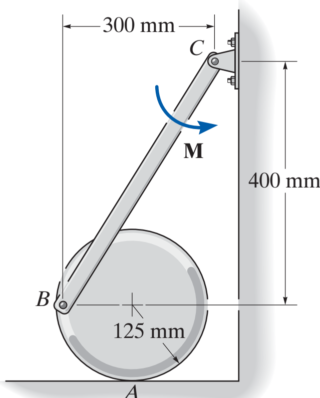
***8-44.** El cargador por deslizamiento de 3 Mg tiene tracción trasera y el centro de masa en *G*. Determine el máximo de embalajes que el cargador puede empujar si cada embalaje tiene una masa de 500 kg. El coeficiente de fricción estática entre un embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.3$, y el coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras del cargador y el suelo es $\mu'_s = 0.5$. Las ruedas delanteras giran libremente. Suponga que el motor del cargador tiene suficiente potencia para generar un par de torsión que ocasione el deslizamiento de las ruedas traseras.




**Prob. 8-44**

**•8-45.** El disco de 45 kg descansa sobre la superficie cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_A = 0.2$. Determine el momento de par *M* más grande que puede aplicarse a la barra sin producir movimiento.

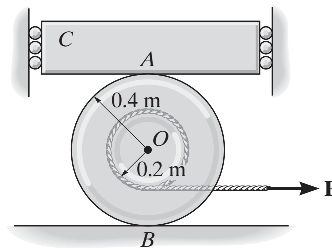
**8-46.** El disco de 45 kg descansa sobre la superficie cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_A = 0.15$. Si $M = 50\ \text{N}\cdot\text{m}$, determine la fuerza de fricción en *A*.




**Probs. 8-45/46**

**8-47.** El bloque *C* tiene masa de 50 kg y está confinado entre dos paredes mediante rodillos lisos. Si este bloque descansa sobre un carrete de 40 kg, determine la fuerza *P* mínima necesaria en el cable para mover el carrete. El cable está enrollado alrededor del núcleo central del carrete. Los coeficientes de fricción estática en *A* y *B* son $\mu_A = 0.3$ y $\mu_B = 0.6$.

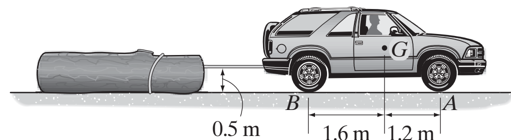
***8-48.** El bloque *C* tiene masa de 50 kg y está confinado entre dos paredes mediante rodillos lisos. Si este bloque descansa sobre un carrete de 40 kg, determine los coeficientes de fricción estática necesarios en *A* y *B* de modo que el carrete se deslice en *A* y en *B* cuando la magnitud de la fuerza aplicada se aumenta a $P = 300$ N.




**Probs. 8-47/48**

**•8-49.** La camioneta (SUV) de 3 Mg, con tracción en las cuatro ruedas, tiene un centro de masa en *G*. Determine la masa máxima del tronco que puede remolcar la camioneta. El coeficiente de fricción estática entre el tronco y el suelo es $\mu_s = 0.8$, y el coeficiente de fricción estática entre las ruedas de la camioneta y el suelo es $\mu'_s = 0.4$. Suponga que el motor de la camioneta tiene la suficiente potencia para generar un par de torsión que ocasionará que todas las ruedas patinen.

**8-50.** La camioneta (SUV) de 3 Mg, con tracción en las cuatro ruedas, tiene un centro de masa en *G*. Determine la masa máxima del tronco que puede remolcar la camioneta. El coeficiente de fricción estática entre el tronco y el suelo es $\mu_s = 0.8$, y el coeficiente de fricción estática entre las ruedas delanteras de la camioneta y el suelo es $\mu'_s = 0.4$. Las ruedas traseras pueden girar libremente. Suponga que el motor de la camioneta tiene la suficiente potencia para generar un par de torsión que ocasionará que las ruedas delanteras patinen.

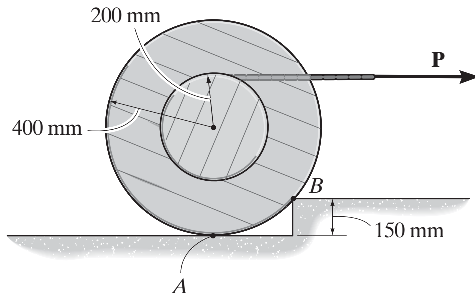



**Probs. 8-49/50**

8

**8-51.** Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto $A$ y $B$ son $\mu_s = 0.3$ y $\mu'_s = 0.4$ respectivamente, determine la fuerza $P$ mínima que ocasionará un movimiento inminente en el carrete de 150 kg.

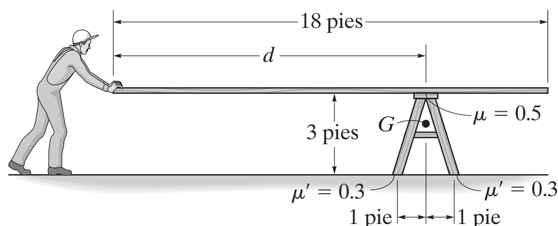
***8-52.** Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto $A$ y $B$ son $\mu_s = 0.4$ y $\mu'_s = 0.2$ respectivamente, determine la fuerza $P$ mínima que ocasionará un movimiento inminente en el carrete de 150 kg.




**Probs. 8-51/52**

**•8-53.** El carpintero empuja lenta y horizontalmente la tabla uniforme sobre la parte superior de la mesa de trabajo. La tabla tiene un peso uniforme de 3 lb/pie, la mesa de trabajo tiene un peso de 15 lb y un centro de gravedad en $G$. Determine si la mesa permanecerá en posición, resbalará, o se volteará si se empuja la tabla hacia delante cuando $d = 10$ pies. Los coeficientes de fricción estática se muestran en la figura.

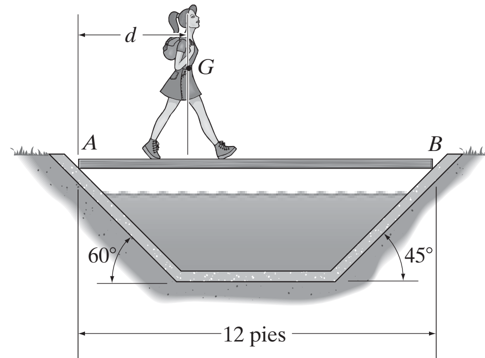
**8-54.** El carpintero empuja lenta y horizontalmente la tabla uniforme sobre la parte superior de la mesa de trabajo. La tabla tiene un peso uniforme de 3 lb/pie, la mesa de trabajo tiene un peso de 15 lb y un centro de gravedad en $G$. Determine si la mesa permanecerá en posición, resbalará o se volteará si se empuja la tabla hacia delante cuando $d = 14$ pies. Los coeficientes de fricción estática se muestran en la figura.




**Probs. 8-53/54**

**8-55.** Si la joven de 75 lb está en la posición $d = 4$ pies, determine el coeficiente de fricción estática $\mu_s$ mínimo en los puntos de contacto $A$ y $B$ de modo que el tablón de madera no se deslice. Ignore el peso del tablón.

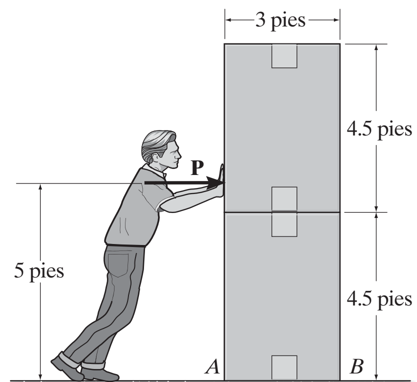
***8-56.** Si el coeficiente de fricción estática en los puntos de contacto $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.4$, determine la distancia $d$ mínima donde puede pararse la joven de 75 lb sobre el tablón sin que éste se deslice. Ignore el peso del tablón.




**Probs. 8-55/56**

**•8-57.** Si cada caja pesa 150 lb, determine la fuerza horizontal $P$ mínima que debe ejercer el hombre sobre la caja superior a fin de causar movimiento. El coeficiente de fricción estática entre las cajas es $\mu_s = 0.5$ y el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es $\mu'_s = 0.2$.

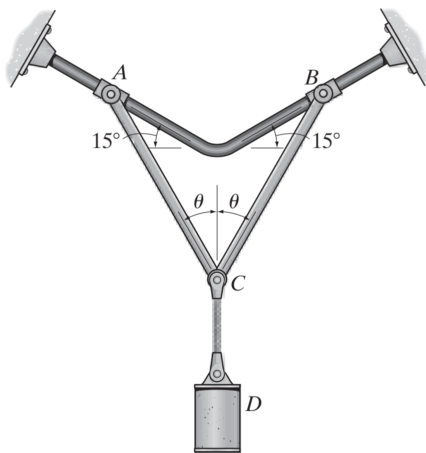
**8-58.** Si cada caja pesa 150 lb, determine la fuerza horizontal $P$ mínima que debe ejercer el hombre sobre la caja superior a fin de causar movimiento. El coeficiente de fricción estática entre las cajas es $\mu_s = 0.65$ y el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es $\mu'_s = 0.35$.




**Probs. 8-57/58**

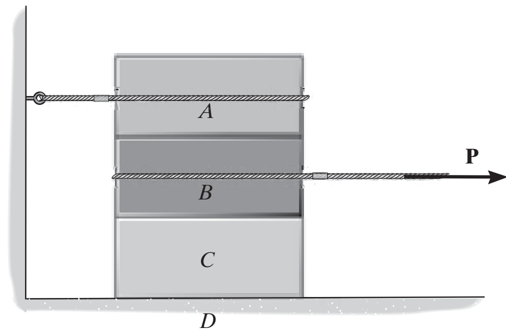
**8-59.** Si el coeficiente de fricción estática entre los collarines $A$ y $B$ y la barra es $\mu_s = 0.6$, determine el ángulo máximo $\theta$ para que el sistema permanezca en equilibrio, sin importar el peso del cilindro $D$. Las articulaciones $AC$ y $BC$ tienen un peso insignificante y se conectan entre sí en $C$ mediante un pasador.

***8-60.** Si $\theta = 15°$, determine el coeficiente de fricción estática mínimo entre los collarines $A$ y $B$ y la barra que se requiere para que el sistema permanezca en equilibrio, sin importar el peso del cilindro $D$. El peso de las articulaciones $AC$ y $BC$ se puede omitir y se conectan entre sí en $C$ mediante un pasador.




**Probs. 8-59/60**

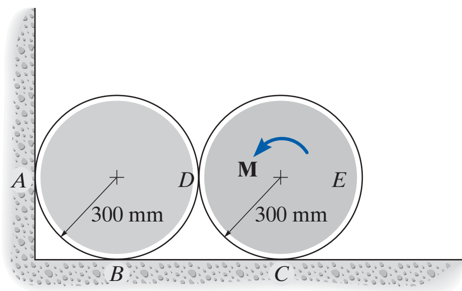
**8-62.** Los bloques $A$, $B$ y $C$ tienen pesos de 50 lb, 25 lb y 15 lb, respectivamente. Determine la fuerza horizontal $P$ mínima que causará un movimiento inminente. El coeficiente de fricción estática entre $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.3$, entre $B$ y $C$, $\mu'_s = 0.4$ y entre el bloque $C$ y el suelo, $\mu''_s = 0.35$.




**Prob. 8-62**

8

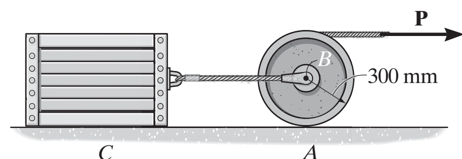
**•8-61.** Cada uno de los cilindros tiene una masa de 50 kg. Si los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto son $\mu_A = 0.5$, $\mu_B = 0.5$, $\mu_C = 0.5$ y $\mu_D = 0.6$, determine el momento de par $M$ necesario para hacer girar el cilindro $E$.




**Prob. 8-61**

**8-63.** Determine la fuerza $P$ mínima que ocasionará un movimiento inminente. El embalaje y la rueda tienen masas de 50 kg y 25 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.2$, y entre la rueda y el suelo es $\mu'_s = 0.5$.

***8-64.** Determine la fuerza $P$ mínima que ocasionará un movimiento inminente. El embalaje y la rueda tienen masas de 50 kg y 25 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el embalaje y el suelo es $\mu_s = 0.5$, y entre la rueda y el suelo es $\mu'_s = 0.3$.




**Probs. 8-63/64**

## PROBLEMAS CONCEPTUALES

**P8-1.** ¿Es más efectivo mover la carga hacia delante a velocidad constante con el brazo completamente extendido, o debería estar totalmente contraído? La potencia se suministra en las ruedas traseras. Las ruedas delanteras giran libremente. Haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.



**P8-1**

**P8-2.** La tuerca de una rueda que puede girar libremente debe quitarse con la llave de torsión. ¿Cuál es la forma más efectiva de aplicar fuerza a la llave? Además, ¿por qué resulta mejor mantener la rueda del automóvil sobre el suelo en vez de primero levantarla? Explique sus respuestas con un análisis de equilibrio.





**P8-2**

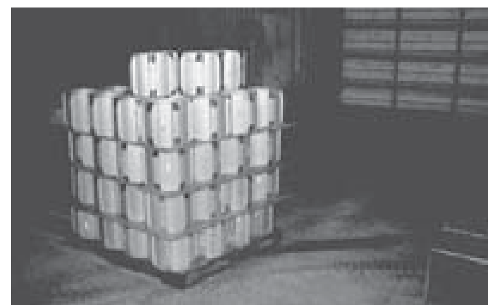
**P8-3.** Se usa una cuerda para remolcar el refrigerador. ¿Qué es mejor: jalar la cuerda ligeramente hacia arriba como se muestra en la fotografía, jalar horizontalmente o jalar un poco hacia abajo? Además, ¿lo mejor es atar la cuerda en una posición alta como se muestra, o en una posición más baja? Haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.

**P8-4.** Se usa una cuerda para remolcar el refrigerador. Para evitar que se resbale al remolcar el refrigerador, ¿es mejor jalar como se muestra, jalar horizontalmente o jalar hacia abajo con la cuerda? Haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.



**P8-3/4**

**P8-5.** ¿Resulta más fácil jalar la carga al aplicar una fuerza a lo largo de la barra cuando está en una posición casi horizontal como se muestra, o es mejor jalar la barra cuando tiene una pendiente más pronunciada? Haga un análisis de equilibrio para explicar su respuesta.



**P8-5**

## 8.3 Cuñas



Las cuñas se usan a menudo para ajustar la elevación de partes estructurales o mecánicas. También proporcionan estabilidad a objetos como este tubo.

Una *cuña* es una máquina simple que se usa a menudo para transformar una fuerza aplicada en fuerzas mucho más grandes, dirigidas aproximadamente en ángulo recto con respecto a la fuerza aplicada. Las cuñas también pueden utilizarse para hacer desplazamientos pequeños o ajustes en cargas pesadas.

Por ejemplo, considere la cuña de la figura 8-12*a*, la cual se usa para *levantar* el bloque al aplicar una fuerza a la cuña. Los diagramas de cuerpo libre de bloque y cuña se muestran en la figura 8-12*b*. Aquí hemos excluido el peso de la cuña ya que usualmente es *pequeño* comparado con el peso **W** del bloque. Además, observe que las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben oponerse al movimiento de la cuña. De la misma manera, la fuerza de fricción $\mathbf{F}_3$ de la pared sobre el bloque debe actuar hacia abajo para oponerse al movimiento hacia arriba del bloque. Las posiciones de las fuerzas normales resultantes no tienen importancia en el análisis de fuerzas ya que ni el bloque ni la cuña se "volcarán". Por consiguiente, las ecuaciones de equilibrio de momento no se considerarán. Hay siete incógnitas que consisten en la fuerza aplicada **P**, necesaria para generar el movimiento de la cuña, y las seis fuerzas normales y de fricción. Las siete ecuaciones disponibles consisten en cuatro ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ aplicadas a la cuña y al bloque y tres ecuaciones de fricción, $F = \mu N$, aplicadas en la superficie de contacto.

Si el bloque debe *descender*, entonces las fuerzas de fricción actuarán en sentido opuesto al que se muestra en la figura 8-12*b*. Si el coeficiente de fricción es muy *pequeño* o si el ángulo $\theta$ de la cuña es *grande*, la fuerza aplicada **P** debe actuar hacia la derecha para sostener el bloque. De otra manera, **P** puede tener el sentido inverso de dirección para *jalar* la cuña y retirarla. Si **P** *no se aplica* y las fuerzas de fricción mantienen el bloque en su lugar, entonces se dice que la cuña es *autobloqueante*.

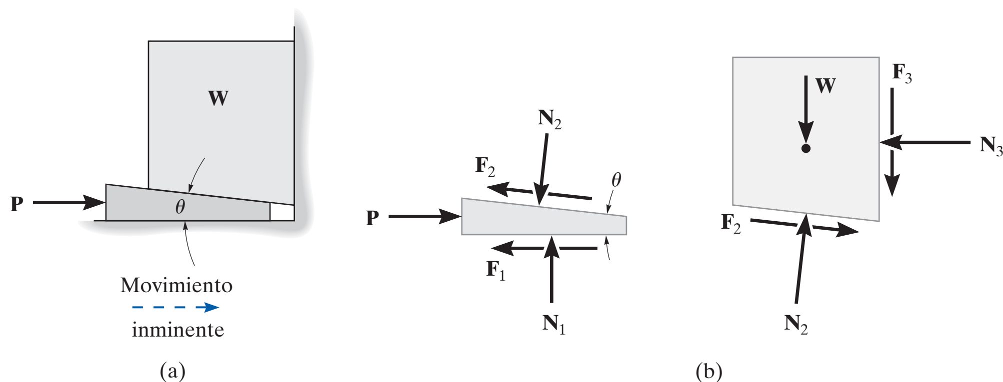



**Fig. 8-12**

## EJEMPLO 8.6

La piedra uniforme que se muestra en la figura 8-13*a* tiene una masa de 500 kg y se mantiene en posición horizontal con una cuña en *B*. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, en las superficies de contacto, determine la fuerza *P* mínima necesaria para retirar la cuña. Suponga que la piedra no se desliza en *A*.

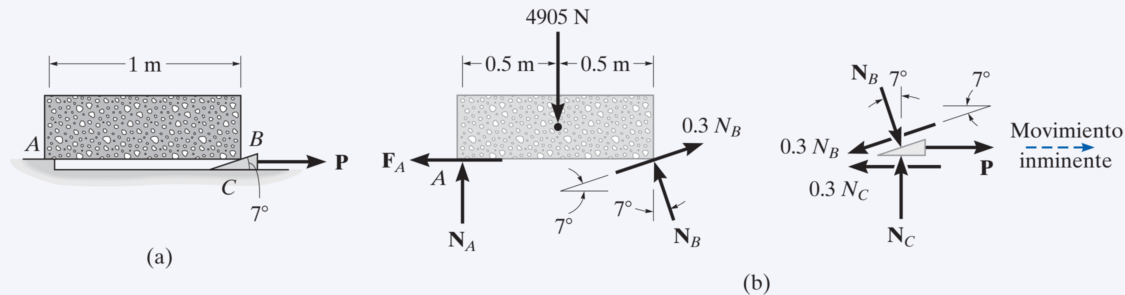



**Fig. 8-13**

### SOLUCIÓN

La fuerza *P* mínima requiere que $F = \mu_s N$ en las superficies de contacto con la cuña. Los diagramas de cuerpo libre de la piedra y la cuña se muestran en la figura 8-13*b*. Sobre la cuña, la fuerza de fricción se opone al movimiento, y sobre la piedra en *A*, $F_A \leq \mu_s N_A$, ya que el deslizamiento no ocurre ahí. Hay cinco incógnitas. Para encontrar la solución se dispone de tres ecuaciones de equilibrio para la piedra y de dos para la cuña. A partir del diagrama de cuerpo libre de la piedra,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -4905 \text{ N}(0.5 \text{ m}) + (N_B \cos 7° \text{ N})(1 \text{ m}) + (0.3 N_B \operatorname{sen} 7° \text{ N})(1 \text{ m}) = 0$$

$$N_B = 2383.1 \text{ N}$$

Con este resultado para la cuña, tenemos

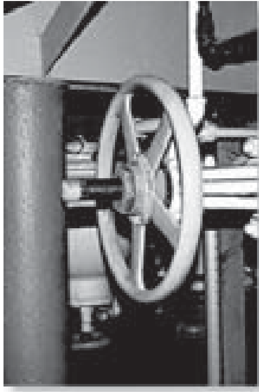
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad N_C - 2383.1 \cos 7° \text{ N} - 0.3(2383.1 \operatorname{sen} 7° \text{ N}) = 0$$

$$N_C = 2452.5 \text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 2383.1 \operatorname{sen} 7° \text{ N} - 0.3(2383.1 \cos 7° \text{ N}) + P - 0.3(2452.5 \text{ N}) = 0$$

$$P = 1154.9 \text{ N} = 1.15 \text{ kN}$$ ***Resp.***

**NOTA:** como *P* es positiva, habrá que retirar la cuña. Si *P* fuese cero, la cuña permanecería en su lugar (autobloqueante) y las fuerzas de fricción desarrolladas en *B* y *C* podrían satisfacer $F_B < \mu_s N_B$ y $F_C < \mu_s N_C$.



Los tornillos de rosca cuadrada tienen aplicaciones en válvulas, gatos y prensas, donde particularmente deben desarrollarse grandes fuerzas a lo largo del eje del tornillo.

## 8.4 Fuerzas de fricción sobre tornillos

En la mayoría de los casos los tornillos se usan como sujetadores; sin embargo, en muchos tipos de máquinas se incorporan para transmitir potencia o movimiento desde una parte de una máquina a otra. Un *tornillo de rosca cuadrada* se usa comúnmente para este último propósito, sobre todo cuando se aplican grandes fuerzas a lo largo de su eje. En esta sección analizaremos las fuerzas que actúan sobre los tornillos de rosca cuadrada. El análisis de otros tipos de tornillos, como el de rosca en V, se basa en los mismos principios.

Para el análisis, un tornillo de rosca cuadrada, como el de la figura 8-14, puede considerarse un cilindro que tiene un filo cuadrado inclinado o una *rosca* enrollada alrededor de él. Si se desenrolla la rosca una revolución, como se muestra en la figura 8-14*b*, la pendiente o el *ángulo de paso* $\theta$ se determina a partir de $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r)$. Aquí $l$ y $2\pi r$ son las distancias vertical y horizontal entre $A$ y $B$, donde $r$ es el radio medio de la rosca. La distancia $l$ se llama *paso* del tornillo y es equivalente a la distancia que avanza el tornillo cuando gira una revolución.

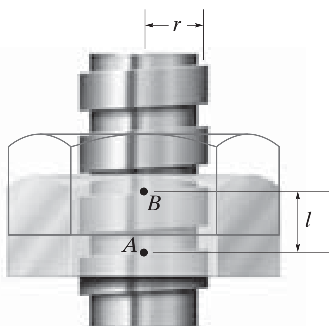
**Movimiento inminente hacia arriba.** Consideremos ahora el caso de un tornillo de rosca cuadrada que está sometido a un movimiento inminente hacia arriba causado por el momento de torsión **M** aplicado, figura 8-15.* Un diagrama de cuerpo libre de la *rosca completa desenrollada* puede representarse como un bloque, figura 8-14*a*. La fuerza **W** es la fuerza vertical que actúa sobre la rosca o la fuerza axial aplicada a la flecha, figura 8-15, y $M/r$ es la fuerza horizontal resultante producida por el momento de par $M$ con respecto al eje de la flecha. La reacción **R** de la muesca sobre la rosca tiene componentes de fricción y normales, donde $F = \mu_s N$. El ángulo de fricción estática es $\phi_s = \tan^{-1}(F/N) = \tan^{-1}\mu_s$. Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas al bloque, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad M/r - R \operatorname{sen}(\phi_s + \theta) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad R\cos(\phi_s + \theta) - W = 0$$

Al eliminar $R$ de estas ecuaciones, obtenemos

$$M = rW \tan(\phi_s + \theta) \qquad (8\text{-}3)$$



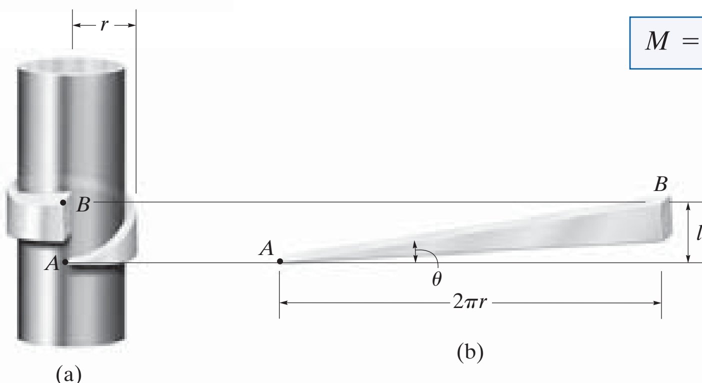




**Fig. 8-14**

*Para aplicaciones, **M** se desarrolla mediante una fuerza horizontal **P** en ángulo recto al extremo de una palanca que se debería fijar al tornillo.

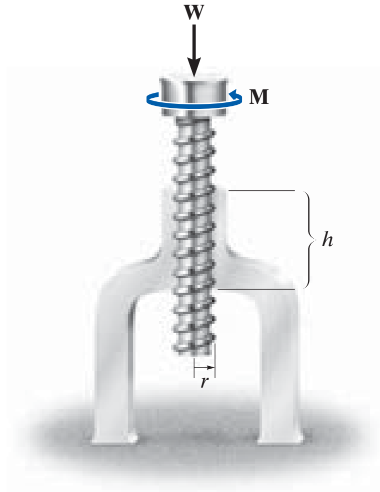
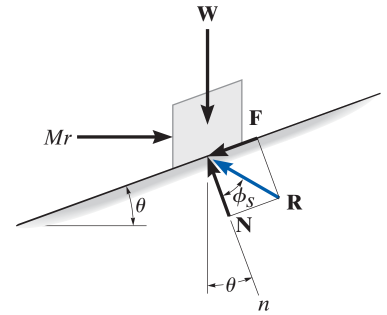
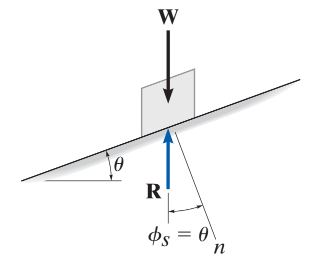


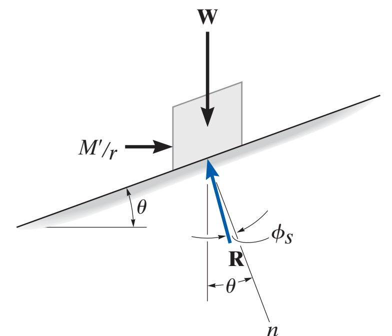

Fig. 8-15



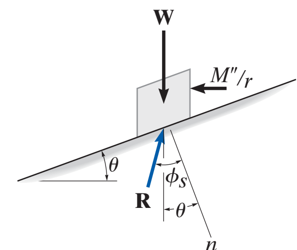

Movimiento del tornillo hacia arriba
(a)




Tornillo autobloqueante ($\theta = \phi_s$)
(a punto de girar hacia abajo)
(b)




Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta > \phi_s$)
(c)




Movimiento del tornillo hacia abajo ($\theta < \phi_s$)
(d)

Fig. 8-16

**Tornillo autobloqueante.** Se dice que un tornillo es *autobloqueante* si permanece en su lugar bajo cualquier carga axial **W** cuando el momento **M** se retira. Para que esto ocurra, la dirección de la fuerza de fricción debe invertirse de manera que **R** actúe sobre el otro lado de **N**. Aquí el ángulo de fricción estática $\phi_s$ es mayor o igual que $\theta$, figura 8-16*d*. Si $\phi_s = \theta$, figura 8-16*b*, entonces **R** actuará verticalmente para equilibrar **W**, y el tornillo estará a punto de girar hacia abajo.

**Movimiento inminente hacia abajo.** ($\phi_s > \theta$). Si un tornillo es autobloqueante, debe aplicarse un momento de par **M**′ al tornillo en la dirección opuesta al movimiento del tornillo hacia abajo ($\phi_s > \theta$). Esto ocasiona una fuerza horizontal inversa $M'/r$ que empuja la rosca hacia abajo como se indica en la figura 8-16*c*. Con el mismo procedimiento anterior, obtenemos

$$M' = rW \tan(\theta - \phi_s) \qquad (8\text{-}4)$$

**Movimiento inminente hacia abajo.** ($\phi_s < \theta$). Si el tornillo no es autobloqueante, es necesario aplicar un momento **M**″ para evitar que el tornillo gire hacia abajo ($\phi_s < \theta$). Aquí, se requiere que una fuerza horizontal $M''/r$ empuje contra la rosca para evitar que ésta se deslice hacia abajo por el plano, figura 8-16*d*. Por lo tanto, la magnitud del momento **M**″ para evitar este giro es

$$M'' = Wr \tan(\phi_s - \theta) \qquad (8\text{-}5)$$

Si ocurre *movimiento del tornillo*, pueden aplicarse las ecuaciones 8-3, 8-4 y 8-5 con sólo reemplazar $\phi_s$ por $\phi_k$.

8

## EJEMPLO 8.7

El tensor que se muestra en la figura 8-17 tiene una rosca cuadrada con radio medio de 5 mm y paso de 2 mm. Si el coeficiente de fricción estática entre el tornillo y el tensor es $\mu_s = 0.25$, determine el momento **M** que debe aplicarse para acercar los extremos de los tornillos.



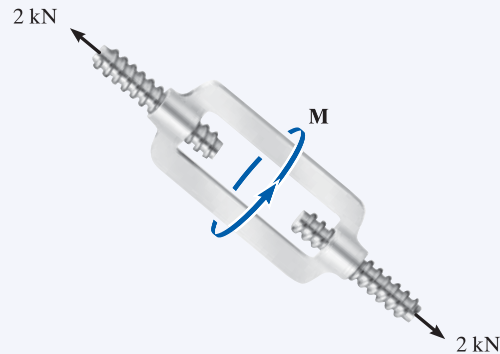



**Fig. 8-17**

### SOLUCIÓN

El momento se puede obtener con la ecuación 8-3. Como se debe vencer la fricción en *dos tornillos*, esto requiere

$$M = 2[Wr\tan(\theta + \phi)] \qquad (1)$$

Aquí $W = 2000$ N, $r = 5$ mm, $\phi_s = \tan^{-1}\mu_s = \tan^{-1}(0.25) = 14.04°$ y $\theta = \tan^{-1}(l/2\pi r) = \tan^{-1}(2\text{ mm}/[2\pi(5\text{ mm})]) = 3.64°$. Al sustituir estos valores en la ecuación 1 y resolver se obtiene

$$M = 2[(2000\text{ N})(5\text{ mm})\tan(14.04° + 3.64°)]$$

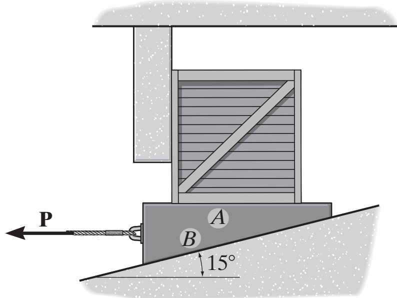
$$= 6374.7\text{ N}\cdot\text{mm} = 6.37\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** cuando se *retire* el momento, el tensor será autobloqueante; es decir, no se desatornillará, ya que $\phi_s > 0$.

8

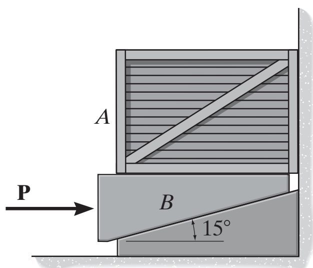
## PROBLEMAS

**•8-65.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima requerida para sacar la cuña $A$. El embalaje tiene un peso de 300 lb y el coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$. Ignore el peso de la cuña.



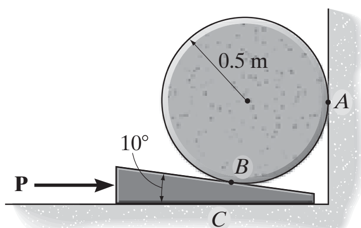

Prob. 8-65

**8-66.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima requerida para elevar el embalaje de 200 kg. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$. Ignore la masa de la cuña.



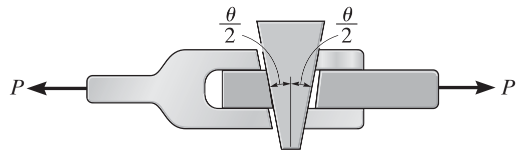

Prob. 8-66

**8-67.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima requerida para elevar el cilindro de 100 kg. Los coeficientes de fricción estática en los puntos de contacto $A$ y $B$ son $(\mu_s)_A = 0.6$ y $(\mu_s)_B = 0.2$, respectivamente; y el coeficiente de fricción estática entre la cuña y el suelo es $\mu_s = 0.3$.



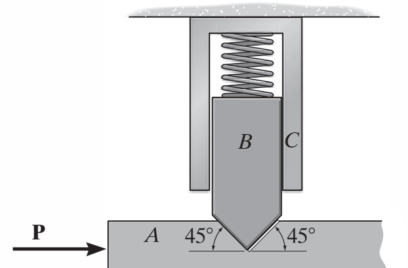

Prob. 8-67

***8-68.** La cuña tiene peso insignificante y un coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.35$ con todas las superficies en contacto. Determine el ángulo $\theta$ más grande posible de manera que sea "autobloqueante". Esto no implica deslizamiento alguno para cualquier magnitud de la fuerza **P** aplicada a la junta.



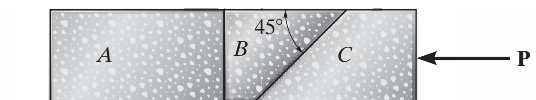

Prob. 8-68

**•8-69.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima requerida para comenzar a mover el bloque hacia la derecha si la fuerza del resorte es de 600 N y el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto sobre $A$ es $\mu_s = 0.3$. El casquillo en $C$ es liso. Ignore la masa de $A$ y $B$.




Prob. 8-69

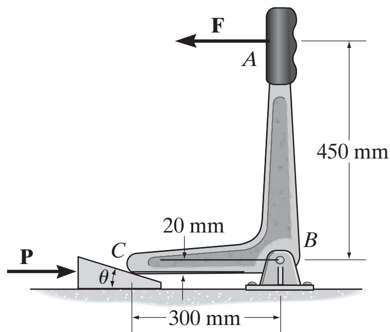
**8-70.** Los tres bloques de piedra tienen pesos de $W_A = 600$ lb, $W_B = 150$ lb y $W_C = 500$ lb. Determine la fuerza horizontal $P$ mínima que debe aplicarse al bloque $C$ a fin de mover este bloque. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es $\mu_s = 0.3$ y entre el piso y cada bloque $\mu'_s = 0.5$.




Prob. 8-70

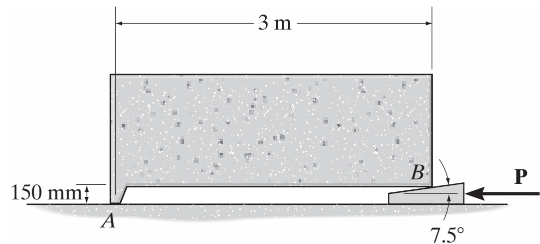
**8-71.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima requerida para mover la cuña hacia la derecha. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$. Considere que $\theta = 15°$ y $F = 400$ N. Ignore el peso de la cuña.

***8-72.** Si se retira la fuerza horizontal **P**, determine el ángulo $\theta$ máximo que ocasionará que la cuña sea autobloqueante sin importar la magnitud de la fuerza **F** aplicada al mango. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$.




**Probs. 8-71/72**

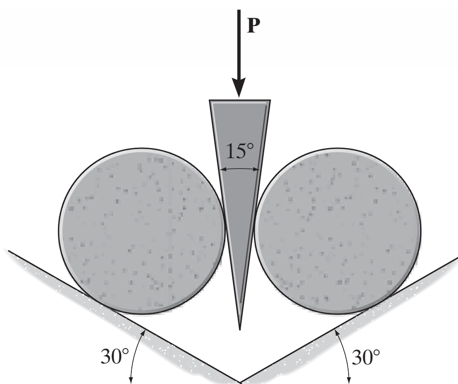
**8-75.** Si el bloque de concreto uniforme tiene una masa de 500 kg, determine la fuerza horizontal $P$ mínima para mover la cuña hacia la izquierda. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el concreto, y la cuña y el piso es $\mu_s = 0.3$. El coeficiente de fricción estática entre el concreto y el piso es $\mu'_s = 0.5$.




**Prob. 8-75**

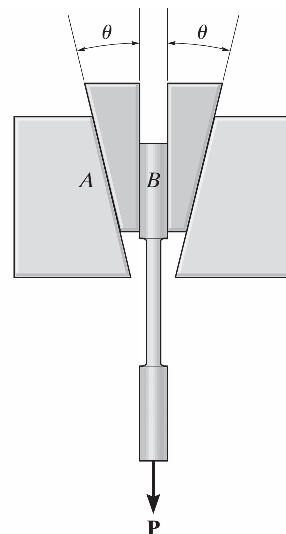
•**8-73.** Determine la fuerza vertical $P$ mínima requerida para mantener la cuña entre los dos cilindros idénticos, cada uno de los cuales tiene un peso de $W$. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.1$.

**8-74.** Determine la fuerza vertical $P$ mínima requerida para mantener la cuña entre los dos cilindros idénticos, cada uno de los cuales tiene un peso de $W$. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies en contacto es $\mu_s = 0.3$.




**Probs. 8-73/74**

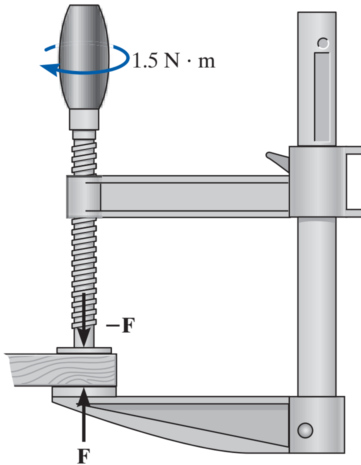
***8-76.** Los bloques de cuña se usan para sostener la probeta en una máquina de pruebas a tensión. Determine el máximo ángulo $\theta$ de diseño de las cuñas de manera que la probeta no se deslice cualquiera que sea la carga aplicada. Los coeficientes de fricción estática son $\mu_A = 0.1$ en $A$ y $\mu_B = 0.6$ en $B$. Ignore el peso de los bloques.




**Prob. 8-76**

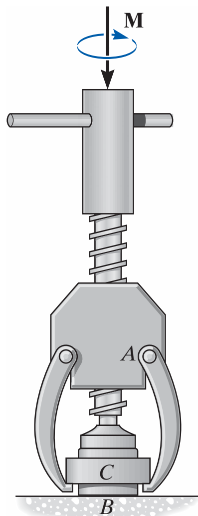
8

•**8-77.** El tornillo de rosca cuadrada de la prensa tiene un diámetro medio de 14 mm y paso de 6 mm. Si $\mu_s = 0.2$ para las roscas, y el par de torsión aplicado a la manija es de 1.5 N · m, determine la fuerza de compresión *F* sobre el bloque.



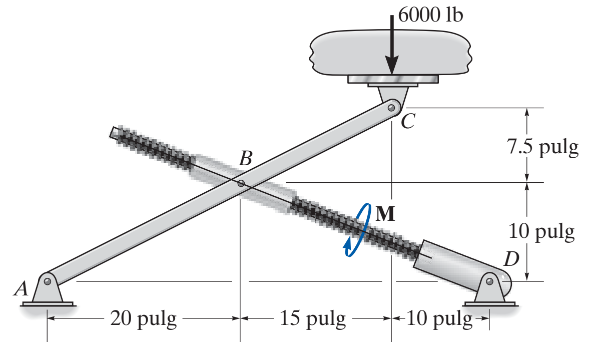

**Prob. 8-77**

**8-78.** El dispositivo se usa para extraer la terminal del cable de batería *C* del poste de una batería. Si la fuerza de extracción requerida es de 85 lb, determine el par de torsión *M* que debe aplicarse a la manija localizada sobre el tornillo para apretarlo. El tornillo tiene roscas cuadradas, diámetro medio de 0.2 pulg, paso de 0.08 pulg y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$.




**Prob. 8-78**

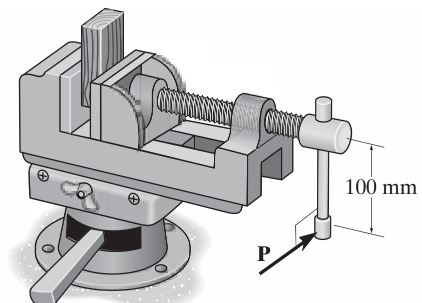
**8-79.** El mecanismo del gato consiste en una articulación que tiene un tornillo de rosca cuadrada con diámetro medio de 0.5 pulg, paso de 0.20 pulg y coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.4$. Determine el par de torsión *M* que debe aplicarse al tornillo para que comience a levantar la carga de 6000 lb que actúa en el extremo del elemento *ABC*.




**Prob. 8-79**

*__8-80.__ Determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse a la palanca de la prensa de banco a fin de producir una fuerza de apriete de 600 N sobre el bloque. El tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 7.5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.25$.

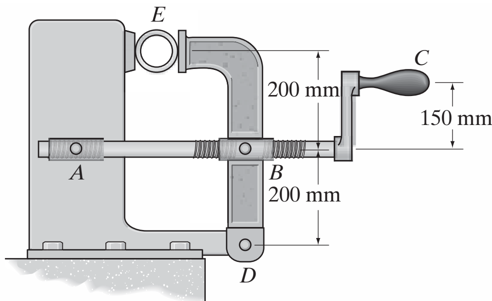
•**8-81.** Determine la fuerza de apriete ejercida sobre el bloque si se aplica una fuerza de $P = 30$ N sobre la palanca de la prensa de banco. El tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 7.5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.25$.




**Probs. 8-80/81**

**8-82.** Determine la fuerza horizontal requerida que debe aplicarse en forma perpendicular a la manija a fin de desarrollar una fuerza de apriete de 900 N sobre el tubo. El tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. *Nota:* el tornillo es un elemento de dos fuerzas, puesto que se encuentra contenido dentro de collarines articulados en *A* y *B*.

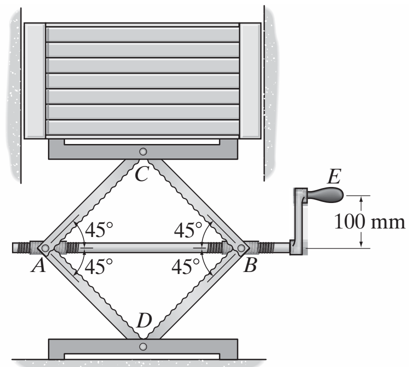
**8-83.** Si la fuerza de apriete sobre el tubo es de 900 N, determine la fuerza horizontal requerida que debe aplicarse en forma perpendicular a la manija a fin de aflojar el tornillo. El tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. *Nota:* el tornillo es un elemento de dos fuerzas puesto que se encuentra contenido dentro de collarines articulados en *A* y *B*.




**Probs. 8-82/83**

**•8-85.** Si el gato soporta el embalaje de 200 kg, determine la fuerza horizontal que debe aplicarse en forma perpendicular a la manija en *E* para bajarlo. Cada tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 7.5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.25$.

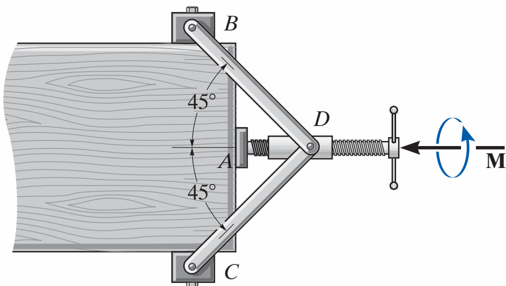
**8-86.** Si es necesario usar el gato para elevar el embalaje de 200 kg, determine la fuerza horizontal que debe aplicarse en forma perpendicular a la manija en *E*. Cada tornillo de rosca cuadrada tiene un diámetro medio de 25 mm y un paso de 7.5 mm. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.25$.




**Probs. 8-85/86**

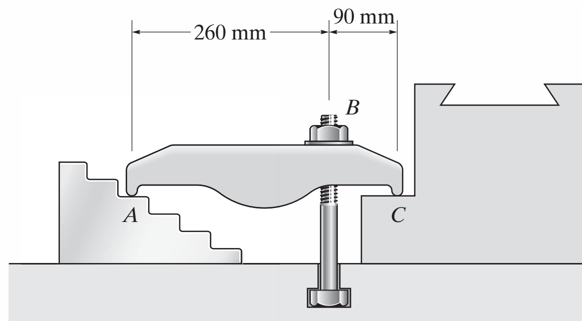
***8-84.** La prensa proporciona presión desde varias direcciones sobre los bordes de la tabla. Si el tornillo de rosca cuadrada tiene un paso de 3 mm, radio de 10 mm, y su coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$, determine la fuerza horizontal desarrollada sobre la tabla en *A* y las fuerzas verticales desarrolladas en *B* y *C* cuando se aplica un par de torsión de $M = 1.5$ N · m a la manija para apretarla más aún. Los bloques en *B* y *C* están conectados a la tabla mediante pasadores.

8




**Prob. 8-84**

**8-87.** La parte de máquina se mantiene en su lugar con la prensa de doble sujeción. El perno en *B* tiene roscas cuadradas con un radio medio de 4 mm y un paso de 2 mm, y el coeficiente de fricción estática con la tuerca es $\mu_s = 0.5$. Si se aplica un par de torsión de $M = 0.4$ N · m a la tuerca para apretarla, determine la fuerza normal de la prensa en los contactos lisos *A* y *C*.

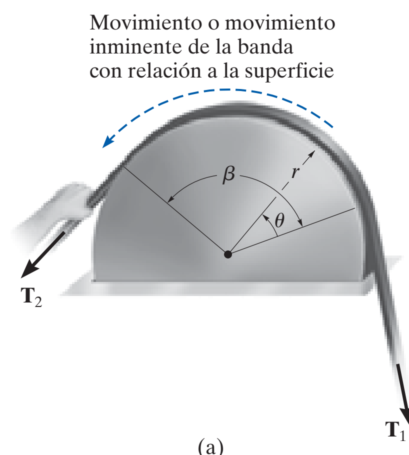



**Prob. 8-87**

## 8.5 Fuerzas de fricción sobre bandas planas

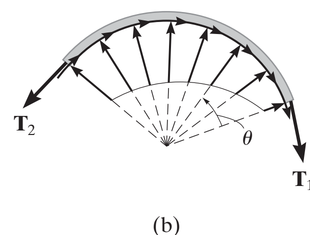
Cuando se diseñan bandas impulsoras o de frenado, es necesario determinar las fuerzas de fricción desarrolladas entre la banda y su superficie de contacto. En esta sección analizaremos las fuerzas de fricción que actúan sobre una banda plana, aunque el análisis de otros tipos de banda como la banda V, se basa en principios semejantes.

Considere la banda plana que se ilustra en la figura 8-18*a*, la cual pasa sobre una superficie curva fija, de manera que el ángulo total de contacto entre la banda y la superficie es $\beta$ en radianes y el coeficiente de fricción entre las dos superficies es $\mu$. Deseamos determinar la tensión $T_2$ que es necesaria en la banda para jalarla en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre la superficie, y así vencer las fuerzas de fricción en la superficie de contacto y la tensión $T_1$ en el otro extremo de la banda. Obviamente, $T_2 > T_1$.



(a)

**Análisis de fricción.** En la figura 8-18*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre del segmento de banda que está en contacto con la superficie. Como se muestra, la fuerza normal y las fuerzas de fricción, que actúan en puntos diferentes a lo largo de la banda, variarán en magnitud y dirección. Debido a esta distribución *desconocida*, el análisis del problema requerirá primero un estudio de las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial de la banda.



(b)

En la figura 8-18*c* se muestra un diagrama de cuerpo libre de un elemento con longitud *ds*. Si se supone movimiento inminente o movimiento de la banda, la magnitud de la fuerza de fricción es $dF = \mu\, dN$. Esta fuerza se opone al movimiento deslizante de la banda, de modo que aumenta la magnitud de la fuerza de tensión que actúa en la banda mediante $dT$. Al aplicar las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, tenemos

$$\searrow + \Sigma F_x = 0; \qquad T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu\, dN - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \qquad dN - (T + dT)\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

Como $d\theta$ es de *tamaño infinitesimal*, $\operatorname{sen}(d\theta/2) = d\theta/2$ y $\cos(d\theta/2) = 1$. Además, el *producto* de las dos infinitesimales $dT$ y $d\theta/2$ puede ser ignorado al compararlo con infinitesimales de primer orden. Como resultado, las dos ecuaciones anteriores se convierten en

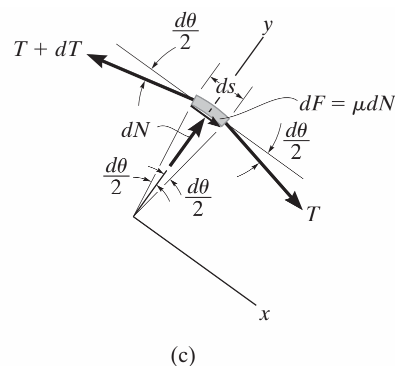
$$\mu\, dN = dT$$

y

$$dN = T\, d\theta$$

Al eliminar $dN$ resulta

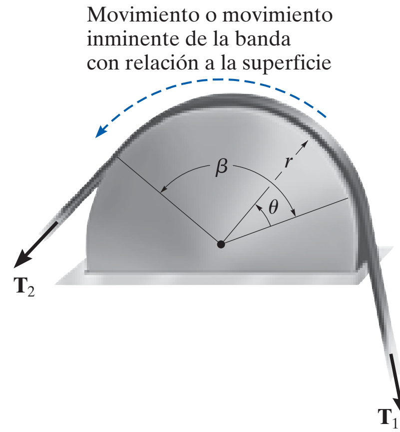
$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\theta$$



(c)

**Fig. 8-18**

8






Las bandas planas o en V se usan para transmitir el par de torsión desarrollado por un motor hacia una rueda unida a una bomba, un ventilador o un compresor.

8

Al integrar esta ecuación entre todos los puntos de contacto de la banda con el tambor, y observar que $T = T_1$ en $\theta = 0$ y $T = T_2$ en $\theta = \beta$, resulta

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\beta} d\theta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

Al despejar $T_2$, obtenemos

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \tag{8-6}$$

donde

$T_2, T_1$ = tensiones en la banda; $T_1$ se opone a la dirección del movimiento (o movimiento inminente) de la banda medido con relación a la superficie, mientras que $T_2$ actúa en la dirección del movimiento relativo de la banda (o movimiento inminente); debido a la fricción, $T_2 > T_1$.

$\mu$ = coeficiente de fricción estática o cinética entre la banda y la superficie de contacto.

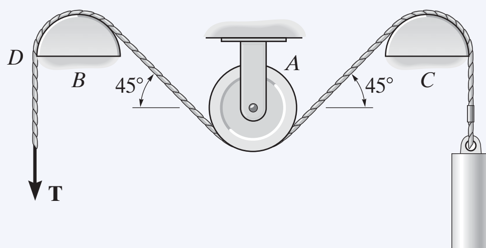
$\beta$ = ángulo entre la banda y la superficie de contacto, medido en radianes.

$e$ = 2.718…, base del logaritmo natural.

Observe que $T_2$ es *independiente* del *radio* del tambor y que más bien es una función del ángulo de contacto entre la banda y la superficie de contacto, $\beta$. Como resultado, esta ecuación es válida para bandas planas que pasan sobre cualquier superficie de contacto curva.

## EJEMPLO 8.8

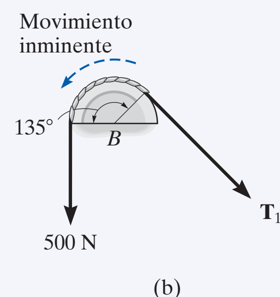
La tensión máxima que puede desarrollarse en la cuerda que se muestra en la figura 8-19*a* es de 500 N. Si la polea en *A* puede girar libremente y el coeficiente de fricción estática en los tambores fijos *B* y *C* es $\mu_s = 0.25$, determine la masa más grande que puede tener el cilindro y aún ser levantado por la cuerda.




(a)

### SOLUCIÓN

Levantar el cilindro, que tiene un peso $W = mg$, ocasiona que la cuerda se mueva en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre los tambores localizados en *B* y *C*; por lo tanto, la tensión máxima $T_2$ en la cuerda ocurre en *D*. Así, $F = T_2 = 500$ N. Una sección de la cuerda que pasa sobre el tambor en *B* se muestra en la figura 8-19*b*. Como $180° = \pi$ rad, el ángulo de contacto entre el tambor y la cuerda es $\beta = (135°/180°)\pi = 3\pi/4$ rad. Si usamos la ecuación 8-6, tenemos




(b)

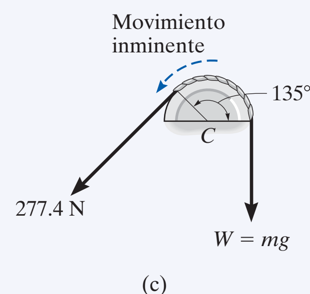
$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \qquad 500 \text{ N} = T_1 e^{0.25[(3/4)\pi]}$$

Por consiguiente,

$$T_1 = \frac{500 \text{ N}}{e^{0.25[(3/4)\pi]}} = \frac{500 \text{ N}}{1.80} = 277.4 \text{ N}$$

Como la polea en *A* puede girar libremente, el equilibrio requiere que la tensión en la cuerda permanezca *igual* en ambos lados de la polea.

La sección de la cuerda que pasa sobre el tambor en *C* se muestra en la figura 8-19*c*. El peso $W < 277.4$ N. ¿Por qué? Al aplicar la ecuación 8-6, obtenemos




(c)

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}; \qquad 277.4 \text{ N} = W e^{0.25[(3/4)\pi]}$$

$$W = 153.9 \text{ N}$$

de modo que

$$m = \frac{W}{g} = \frac{153.9 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2}$$

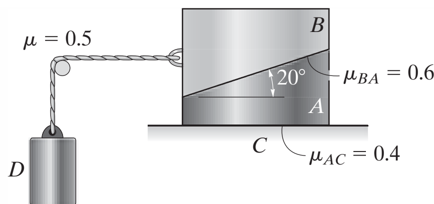
$$= 15.7 \text{ kg}$$ ***Resp.***

**Fig. 8-19**

## PROBLEMAS

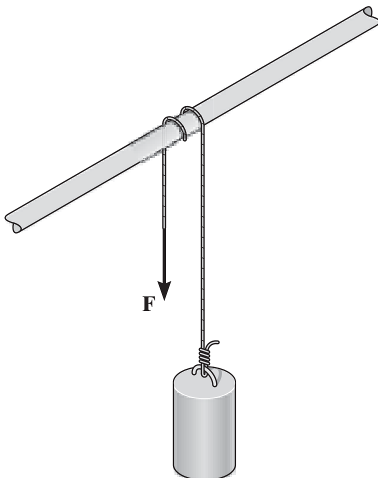
***8-88.** Los bloques *A* y *B* pesan 50 lb y 30 lb, respectivamente. Con los coeficientes de fricción estática indicados, determine el peso más grande del bloque *D* que no genere movimiento.

**•8-89.** Los bloques *A* y *B* pesan 75 lb cada uno, y *D* pesa 30 lb. Con los coeficientes de fricción estática indicados, determine la fuerza de fricción entre los bloques *A* y *B*, y entre el bloque *A* y el piso *C*.



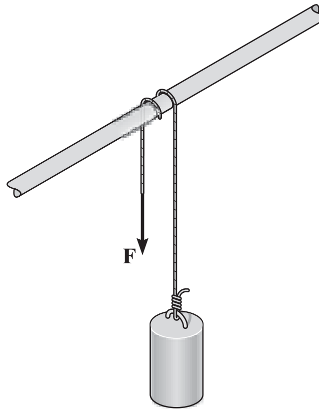

**Probs. 8-88/89**

**8-90.** La cuerda que se enrolla sobre el tubo sostendrá un cilindro con masa de 250 kg. Determine la fuerza vertical *F* más pequeña necesaria para soportar la carga si la cuerda pasa (*a*) una vez sobre el tubo, $\beta$ = 180°, y (*b*) dos veces sobre el tubo, $\beta$ = 540°. Considere $\mu_s$ = 0.2.



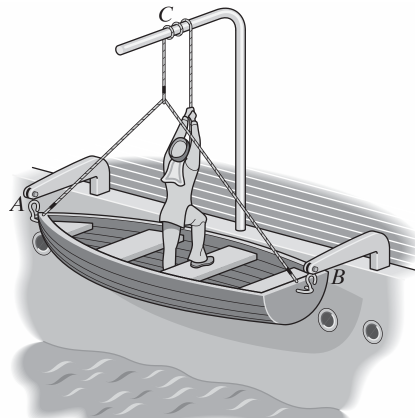

**Prob. 8-90**

**8-91.** Una cuerda que se enrolla sobre el tubo soportará un cilindro con masa de 250 kg. Determine la fuerza vertical *F* más grande que puede aplicarse a la cuerda sin que el cilindro se mueva. La cuerda pasa (*a*) una vez sobre el tubo, $\beta$ = 180°, y (*b*) dos veces sobre el tubo, $\beta$ = 540°. Considere $\mu_s$ = 0.2.




**Prob. 8-91**

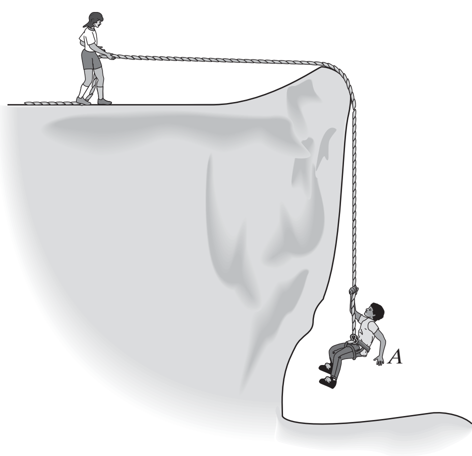
***8-92.** El bote tiene un peso de 500 lb y se mantiene en posición a un lado del barco mediante los pescantes situados en *A* y *B*. Un hombre con peso de 130 lb, y que está de pie en el bote, enrolla una cuerda alrededor de un aguilón situado en lo alto en el punto *C* y lo une al extremo del bote como se muestra. Si el bote se desconecta de los pescantes, determine el *número mínimo de medias vueltas* que la cuerda debe tener alrededor del aguilón para que el bote pueda ser bajado con seguridad al agua a velocidad constante. Además, ¿cuál es la fuerza normal entre el bote y el hombre? El coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y el aguilón es $\mu_s$ = 0.15. *Sugerencia:* el problema requiere que la fuerza normal entre los pies del hombre y el bote sea lo más pequeña posible.




**Prob. 8-92**

**•8-93.** El niño de 100 lb ubicado en *A* está suspendido del cable que pasa sobre la saliente rocosa con forma de un cuarto de círculo. Determine si es posible que la mujer de 185 lb lo suba; y si esto es posible, ¿cuál es la fuerza más pequeña que debe ejercer sobre el cable horizontal? El coeficiente de fricción estática entre el cable y la roca es $\mu_s = 0.2$ y entre los zapatos de la mujer y el suelo es $\mu'_s = 0.8$.

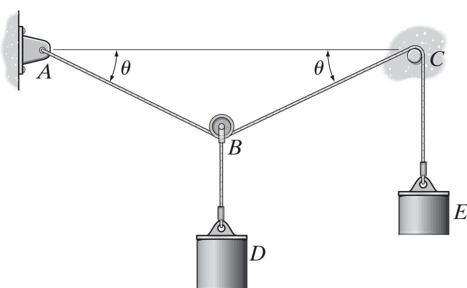
**8-94.** El niño de 100 lb ubicado en *A* está suspendido del cable que pasa sobre la saliente rocosa con forma de un cuarto de círculo. ¿Cuál es la fuerza horizontal que debe ejercer la mujer en *A* sobre el cable a fin de que el niño descienda a velocidad constante? Los coeficientes de fricción estática y de fricción cinética entre el cable y la roca son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.35$, respectivamente.




**Probs. 8-93/94**

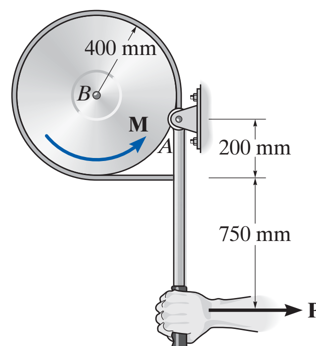
**8-95.** Un cilindro *D* de 10 kg, que se encuentra unido a una pequeña polea *B*, se coloca sobre la cuerda como se muestra en la figura. Determine el ángulo $\theta$ más pequeño de modo que la cuerda no se deslice sobre la clavija en *C*. El cilindro en *E* tiene una masa de 10 kg, y el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija es $\mu_s = 0.1$.

***8-96.** Un cilindro *D* de 10 kg, que se encuentra unido a una pequeña polea *B*, se coloca sobre la cuerda como se muestra en la figura. Determine el ángulo $\theta$ más grande de modo que la cuerda no se deslice sobre la clavija en *C*. El cilindro en *E* tiene una masa de 10 kg, y el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija es $\mu_s = 0.1$.



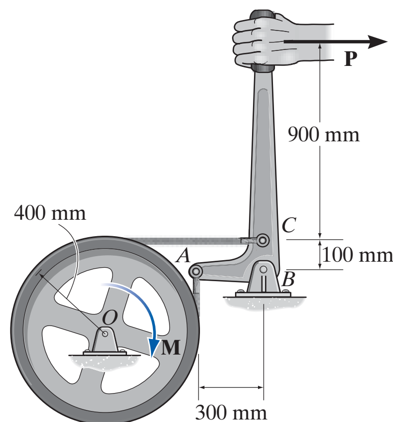

**Probs. 8-95/96**

**•8-97.** Determine la fuerza *P* más pequeña que es necesaria en la palanca para impedir que la rueda gire cuando está sometida a un par de torsión $M = 250$ N · m. El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda es $\mu_s = 0.3$. La rueda está conectada mediante un pasador en su centro, *B*.




**Prob. 8-97**

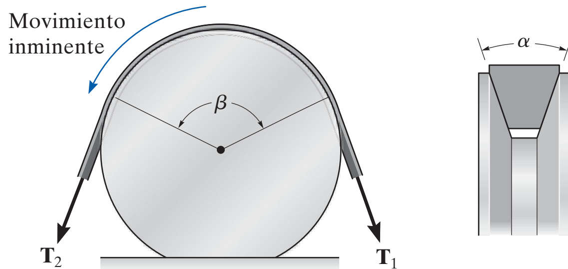
**8-98.** Si se aplica una fuerza de $P = 200$ N sobre el mango de la manivela de campana, determine el par de torsión *M* máximo que puede resistirse de modo que el volante no esté a punto de girar en el sentido de las manecillas del reloj. El coeficiente de fricción estática entre el freno de banda y el aro de la rueda es $\mu_s = 0.3$.




**Prob. 8-98**

8

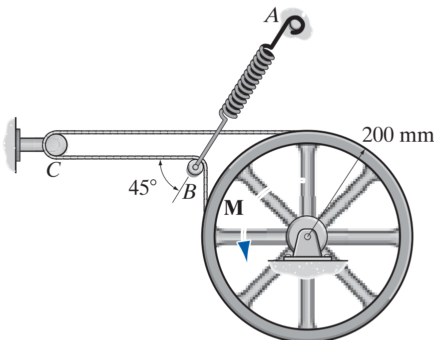
**8-99.** Demuestre que la relación de fricción entre las tensiones en la banda, el coeficiente de fricción $\mu$ y los contactos angulares $\alpha$ y $\beta$ para la banda en V es $T_2 = T_1 e^{\mu\beta/\text{sen}(\alpha/2)}$.




Prob. 8-99

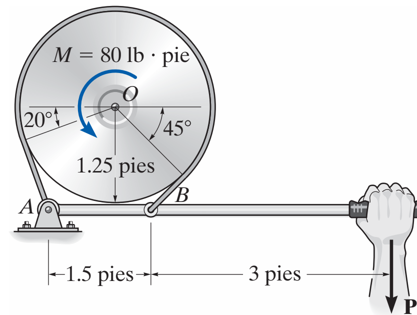
*8-100. Determine la fuerza desarrollada en el resorte $AB$ a fin de evitar que la rueda gire cuando está sometida a un momento de par de $M = 200$ N · m. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el aro de la rueda es $\mu_s = 0.2$, y entre la banda y la clavija $C$, $\mu'_s = 0.4$. La polea en $B$ puede girar libremente.

•8-101. Si la tensión en el resorte es $F_{AB} = 2.5$ kN, determine el momento de par más grande que puede aplicarse a la rueda sin causar que ésta gire. El coeficiente de fricción estática entre la banda y el aro de la rueda es $\mu_s = 0.2$, y entre la banda y la clavija $C$, $\mu'_s = 0.4$. La polea en $B$ puede girar libremente.




Probs. 8-100/101

**8-102.** El freno simple de banda está construido de manera que los extremos de la banda de fricción se conectan al pasador en $A$ y al brazo de palanca en $B$. Si la rueda está sometida a un par de torsión de $M = 80$ lb · pie, determine la fuerza $P$ más pequeña aplicada a la palanca que se requiere para mantener la rueda estacionaria. El coeficiente de fricción estática entre la banda y la rueda es $\mu_s = 0.5$.




Prob. 8-102

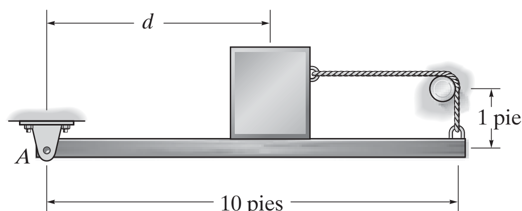
**8-103.** Un granjero de 180 lb trata de evitar que la vaca escape al enrollar la cuerda dos vueltas alrededor del tronco del árbol, como se muestra en la figura. Si la vaca ejerce una fuerza de 250 lb sobre la cuerda, determine si el granjero puede detener de manera exitosa a la vaca. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el tronco es $\mu_s = 0.15$ y entre los zapatos del granjero y el suelo $\mu'_s = 0.3$.



Prob. 8-103

8

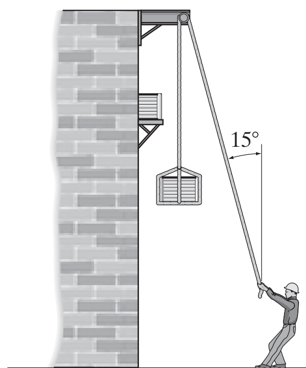
*8-104. La viga uniforme de 50 lb está sostenida por la cuerda que se encuentra unida al extremo de la viga, se enrolla sobre la clavija rugosa y después se conecta al bloque de 100 kg. Si el coeficiente de fricción estática entre la viga y el bloque, y entre la cuerda y la clavija, es $\mu_s = 0.4$, determine la distancia máxima desde $A$ a la que puede colocarse el bloque y aún permanecer en equilibrio. Suponga que el bloque no se volcará.




Prob. 8-104

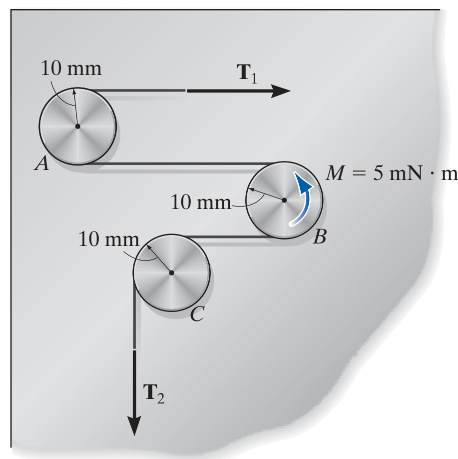
•8-105. El hombre de 80 kg trata de bajar el embalaje de 150 kg con una cuerda que pasa sobre la clavija rugosa. Determine el menor número de vueltas completas además del enrollamiento básico (165°) alrededor de la clavija para realizar el trabajo. Los coeficientes de fricción estática entre la cuerda y la clavija y entre los zapatos del hombre y el suelo son $\mu_s = 0.1$ y $\mu'_s = 0.4$, respectivamente.

8-106. Si la cuerda se enrolla tres vueltas completas además del enrollamiento básico (165°) alrededor de la clavija, determine si el hombre de 80 kg puede evitar que el embalaje de 300 kg se mueva. Los coeficientes de fricción estática entre la cuerda y la clavija, y entre los zapatos del hombre y el suelo son $\mu_s = 0.1$ y $\mu'_s = 0.4$, respectivamente.



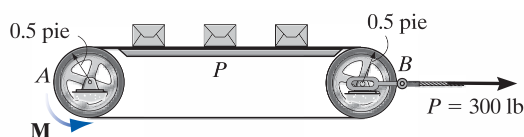

Probs. 8-105/106

8-107. La polea impulsora $B$ en una videograbadora está a punto de deslizarse cuando se somete a un par de torsión de $M = 0.005$ N · m. Si el coeficiente de fricción estática entre la cinta y la polea impulsora y entre la cinta y las flechas fijas $A$ y $C$ es $\mu_s = 0.1$, determine las tensiones $T_1$ y $T_2$ desarrolladas en la cinta para lograr el equilibrio.




Prob. 8-107

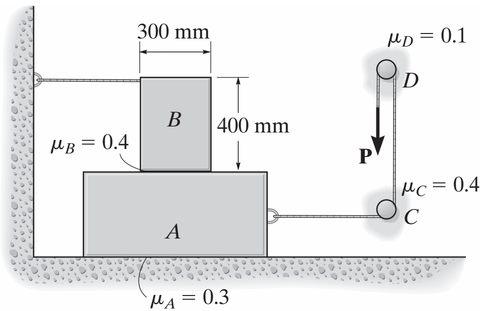
*8-108. Determine el número máximo de paquetes de 50 lb que puede colocarse sobre la banda sin hacer que ésta resbale en la rueda impulsora $A$ que gira con una velocidad angular constante. La rueda $B$ puede girar libremente. Además, encuentre el momento de torsión **M** correspondiente que debe proporcionarse a la rueda $A$. La banda transportadora se tensa previamente con la fuerza horizontal de 300 lb. El coeficiente de fricción cinética entre la banda y la plataforma $P$ es $\mu_k = 0.2$, y el coeficiente de fricción estática entre la banda y el aro de cada rueda es $\mu_s = 0.35$.




Prob. 8-108

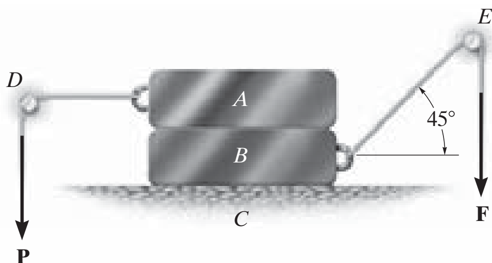
8

**•8-109.** Los bloques *A* y *B* tienen masas de 7 kg y 10 kg, respectivamente. Con los coeficientes de fricción estática indicados, determine la fuerza *P* vertical máxima que puede aplicarse a la cuerda sin generar movimiento.



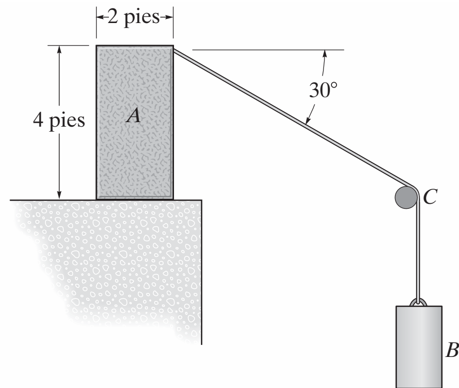

**Prob. 8-109**

**8-110.** Los bloques *A* y *B* tienen masas de 100 kg y 150 kg, respectivamente. Si el coeficiente de fricción estática entre *A* y *B*, y entre *B* y *C* es $\mu_s = 0.25$, y entre las cuerdas y las clavijas *D* y *E* es $\mu'_s = 0.5$, determine la fuerza *F* mínima necesaria para generar el movimiento del bloque *B* si $P = 30$ N.




**Prob. 8-110**

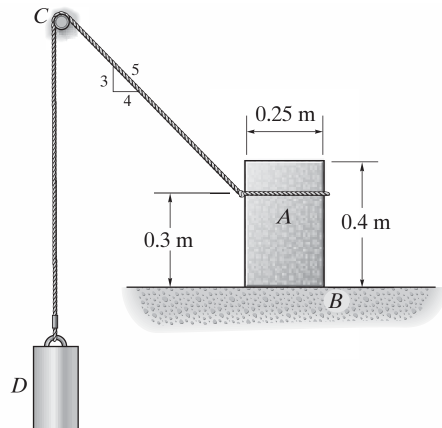
***8-111.** El bloque *A* tiene un peso de 100 lb y descansa sobre una superficie cuyo $\mu_s = 0.25$. Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija fija en *C* es $\mu_s = 0.3$, determine el peso más grande del cilindro *B* suspendido que no genere movimiento.




**Prob. 8-111**

***8-112.** El bloque *A* tiene una masa de 50 kg y descansa sobre una superficie *B* cuya $\mu_s = 0.25$. Si el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija fija en *C* es $\mu'_s = 0.3$, determine la masa más grande del cilindro *D* suspendido que no genere movimiento.

**•8-113.** El bloque *A* tiene una masa de 50 kg y descansa sobre una superficie *B* cuya $\mu_s = 0.25$. Si la masa del cilindro *D* suspendido es 4 kg, determine la fuerza de fricción que actúa en *A* y verifique si ocurre movimiento. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la clavija fija en *C* es $\mu'_s = 0.3$.




**Probs. 8-112/113**

8

# *8.6 Fuerzas de fricción en chumaceras de collarín, chumaceras de pivote y discos

Las *chumaceras de pivote* y *de collarín* se usan comúnmente en máquinas para soportar una *carga axial* sobre una flecha en rotación. En la figura 8-20 se muestran ejemplos típicos. Siempre que las chumaceras no estén lubricadas o cuando lo estén sólo parcialmente, pueden aplicarse las leyes de la fricción seca para determinar el momento necesario para girar la flecha cuando ésta soporte una carga axial.

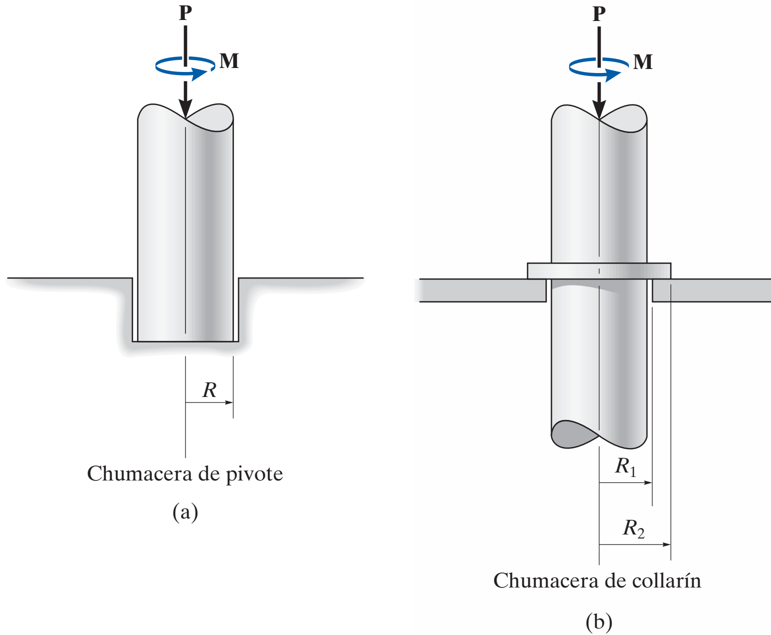



Fig. 8-20



## Análisis de fricción.

La chumacera de collarín que se utiliza en la flecha de la figura 8-21 está sometida a una fuerza axial **P** y tiene un área total de contacto o de apoyo $\pi(R_2^2 - R_1^2)$. Siempre que la chumacera sea nueva y soportada uniformemente, la presión normal $p$ sobre la chumacera será *uniformemente distribuida* sobre esta área. Como $\Sigma F_z = 0$, entonces $p$, medida como una fuerza por unidad de área, es $p = P/\pi(R_2^2 - R_1^2)$.

El momento necesario para causar una rotación inminente de la flecha puede ser determinado a partir del equilibrio de momentos con respecto al eje $z$. Un elemento diferencial de área $dA = (r\,d\theta)(dr)$, mostrado en la figura 8-21, está sometido a una fuerza normal $dN = p\,dA$ y una fuerza de fricción asociada,

$$dF = \mu_s\,dN = \mu_s p\,dA = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}dA$$

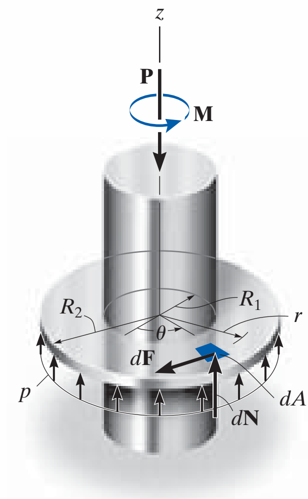



Fig. 8-21

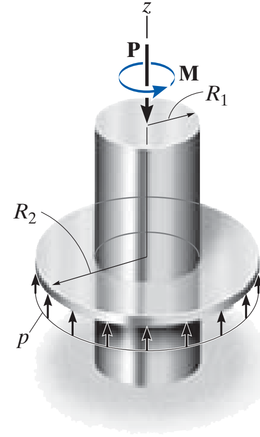



Fig. 8-21 (repetida)

La fuerza normal no genera un momento con respecto al eje $z$ de la flecha; sin embargo, la fuerza de fricción sí lo hace y es $dM = r\ dF$. La integración es necesaria para calcular el momento aplicado **M** necesario para vencer todas las fuerzas de fricción. Por lo tanto, para un movimiento rotacional inminente,

$$\Sigma M_z = 0; \qquad M - \int_A r\ dF = 0$$

Al sustituir para $dF$ y $dA$ e integrar sobre toda el área de apoyo resulta

$$M = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} r\left[\frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\right](r\ d\theta\ dr) = \frac{\mu_s P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\int_{R_1}^{R_2} r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

o bien,

$$M = \frac{2}{3}\mu_s P\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}\right) \tag{8-7}$$

El momento desarrollado en el extremo de la flecha, al *girar* ésta con rapidez constante, puede encontrarse al sustituir $\mu_k$ por $\mu_s$ en la ecuación 8-7.

En el caso de una chumacera de pivote, figura 8-20*a*, entonces $R_2 = R$ y $R_1 = 0$, y la ecuación 8-7 se reduce a

$$M = \frac{2}{3}\mu_s PR \tag{8-8}$$

Recuerde que tanto la ecuación 8-7 como la 8-8 se aplican sólo a superficies de apoyo sometidas a *presión constante*. Si la presión no es uniforme, debe determinarse una variación de la presión como una función del área de apoyo antes de integrar para obtener el momento. El siguiente ejemplo ilustra este concepto.

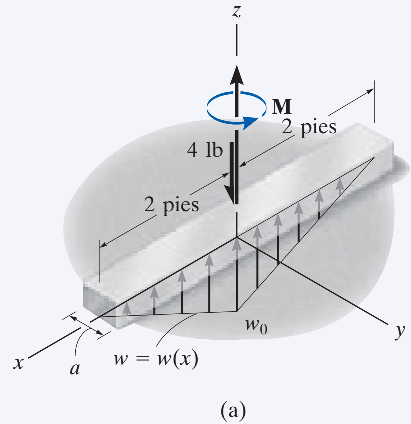
8



El motor que hace girar el disco de esta pulidora desarrolla un par de torsión que debe vencer las fuerzas de fricción que actúan sobre el disco.

## EJEMPLO 8.9

La barra uniforme que se muestra en la figura 8-22*a* tiene un peso de 4 lb. Si se supone que la presión normal que actúa en la superficie de contacto varía linealmente a lo largo de la longitud de la barra como se muestra, determine el momento de par **M** requerido para girar la barra. Suponga que el ancho de la barra es insignificante en comparación con su longitud. El coeficiente de fricción estática es igual a $\mu_s = 0.3$.




(a)

### SOLUCIÓN

En la figura 8-22*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de la barra. La intensidad $w_0$ de la carga distribuida en el centro ($x = 0$) se determina a partir del equilibrio de fuerzas verticales, figura 8-22*a*.

$$+\uparrow \Sigma F_z = 0; \qquad -4 \text{ lb} + 2\left[\frac{1}{2}(2 \text{ pies})w_0\right] = 0 \qquad w_0 = 2 \text{ lb/pie}$$

Como $w = 0$ en $x = 2$ pies, la carga distribuida expresada como una función de $x$ es

$$w = (2 \text{ lb/pie})\left(1 - \frac{x}{2 \text{ pies}}\right) = 2 - x$$

La magnitud de la fuerza normal que actúa sobre un segmento diferencial de área con longitud $dx$ es entonces

$$dN = w\,dx = (2 - x)dx$$

La magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el mismo elemento de área es

$$dF = \mu_s\,dN = 0.3(2 - x)dx$$

Por lo tanto, el momento generado por esta fuerza con respecto al eje $z$ es

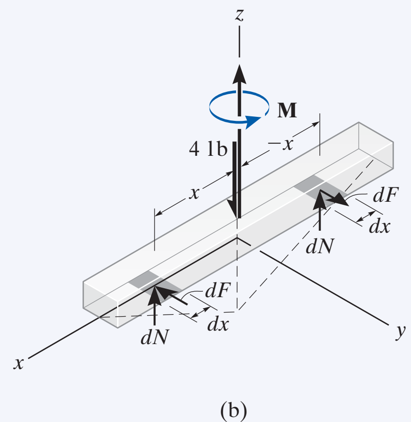
$$dM = x\,dF = 0.3(2x - x^2)dx$$

La sumatoria de momentos con respecto al eje $z$ de la barra se determina por integración, de donde se obtiene

$$\Sigma M_z = 0; \qquad M - 2\int_0^2 (0.3)(2x - x^2)\,dx = 0$$

$$M = 0.6\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2$$

$$M = 0.8 \text{ lb} \cdot \text{pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$




(b)

**Fig. 8-22**

8

## 8.7 Fuerzas de fricción en chumaceras lisas



Desenrollar el cable de este carrete requiere vencer la fricción de la flecha de soporte.

Cuando una flecha o un eje están sometidos a cargas laterales, comúnmente se usa una *chumacera lisa* como soporte. Si la chumacera no está lubricada, o lo está sólo en parte, un análisis razonable de la resistencia a la fricción puede basarse en las leyes de la fricción seca.

**Análisis de fricción.** En la figura 8-23*a* se muestra un soporte típico de chumacera lisa. Cuando la flecha gira, el punto de contacto se mueve hacia arriba sobre la pared de la chumacera hasta algún punto *A* donde ocurre el deslizamiento. Si la carga vertical que actúa en el extremo de la flecha es **P**, entonces la fuerza reactiva de apoyo **R** que actúa en *A* será igual y opuesta a **P**, figura 8-23*b*. El momento necesario para mantener la rotación constante de la flecha se puede encontrar sumando momentos con respecto al eje *z* de la flecha; es decir,

$$\Sigma M_z = 0; \qquad M - (R \operatorname{sen} \phi_k) r = 0$$

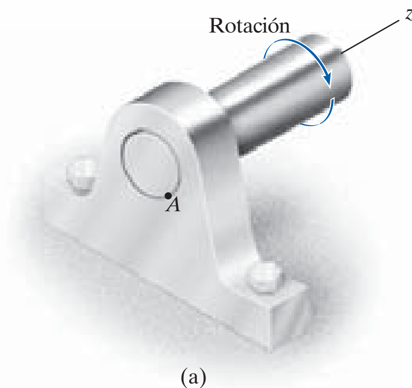
o bien

$$M = Rr \operatorname{sen} \phi_k \qquad (8\text{-}9)$$

donde $\phi_k$ es el ángulo de fricción cinética definido por $\tan \phi_k = F/N = \mu_k N/N = \mu_k$. En la figura 8-23*c*, se ve que $r \operatorname{sen} \phi_k = r_f$. El círculo de líneas discontinuas y de radio $r_f$ se llama *círculo de fricción*, y conforme la flecha gira, la reacción **R** será siempre tangente a él. Si la chumacera está parcialmente lubricada, $\mu_k$ es pequeña y, por lo tanto, $\operatorname{sen} \phi_k \approx \tan \phi_k \approx \mu_k$. En estas condiciones, una aproximación razonable al momento necesario para vencer la resistencia a la fricción se convierte en

$$M \approx Rr\mu_k \qquad (8\text{-}10)$$

En la práctica, este tipo de chumacera lisa no es adecuado para servicio de larga duración ya que la fricción entre la flecha y la chumacera desgastará las superficies. En vez de esta chumacera, los diseñadores incorporan "chumaceras de bola" o "rodillos" para minimizar las pérdidas de fricción.



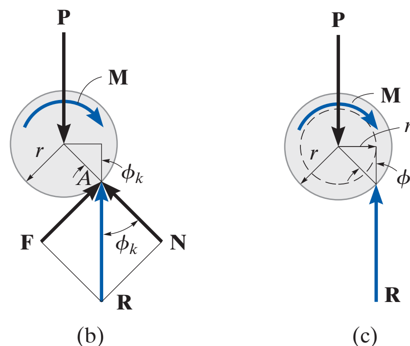
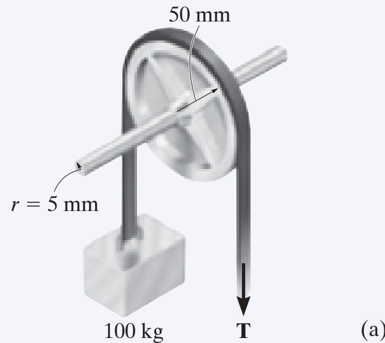




**Fig. 8-23**

8

# EJEMPLO 8.10

La polea de 100 mm de diámetro que se muestra en la figura 8-24*a* cabe holgadamente en una flecha de 10 mm de diámetro cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. Determine la tensión $T$ mínima necesaria en la banda para (*a*) elevar el bloque de 100 kg y (*b*) bajar el bloque. Suponga que no ocurre deslizamiento entre la banda y la polea e ignore el peso de la polea.




## SOLUCIÓN

**Parte (a).** En la figura 8-24*b* se muestra un diagrama de cuerpo libre de la polea. Cuando la polea está sometida a tensiones de la banda de 981 N cada una, hace contacto con la flecha localizada en el punto $P_1$. Conforme la tensión $T$ se *incremente*, el punto de contacto se moverá alrededor de la flecha hasta el punto $P_2$ antes de que el movimiento sea inminente. Conforme a la figura, el círculo de fricción tiene un radio $r_f = r \operatorname{sen} \phi_s$. Con la simplificación $\operatorname{sen} \phi_s \approx \tan \phi_s \approx \mu_s$, entonces $r_f \approx r\mu_s = (5 \text{ mm})(0.4) = 2$ mm, por lo que al sumar momentos con respecto a $P_2$ se obtiene

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{P_2} = 0; \qquad 981 \text{ N}(52 \text{ mm}) - T(48 \text{ mm}) = 0$$

$$T = 1063 \text{ N} = 1.06 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

Si se usa un análisis más exacto, entonces $\phi_s = \tan^{-1} 0.4 = 21.8°$. Así, el radio del círculo de fricción sería $r_f = r \operatorname{sen} \phi_s = 5 \operatorname{sen} 21.8° = 1.86$ mm. Por lo tanto,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{P_2} = 0;$$

$$981 \text{ N}(50 \text{ mm} + 1.86 \text{ mm}) - T(50 \text{ mm} - 1.86 \text{ mm}) = 0$$

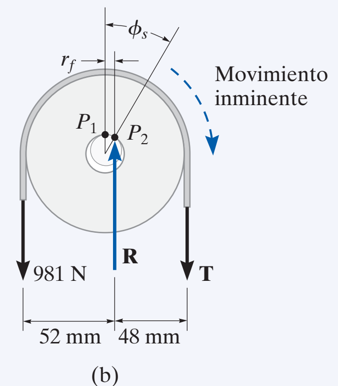
$$T = 1057 \text{ N} = 1.06 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

**Parte (b).** Cuando el bloque se baja, la fuerza resultante **R** que actúa sobre la flecha pasa por el punto que se muestra en la figura 8-24*c*. Al sumar momentos con respecto a este punto resulta

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{P_3} = 0; \quad 981 \text{ N}(48 \text{ mm}) - T(52 \text{ mm}) = 0$$

$$T = 906 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** por lo tanto, la diferencia entre subir y bajar el bloque es 157 N.



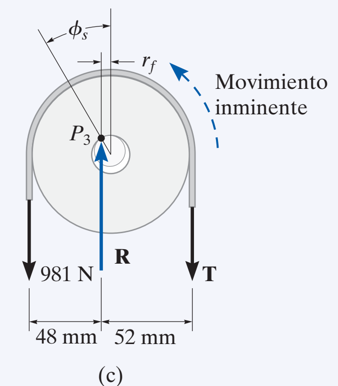
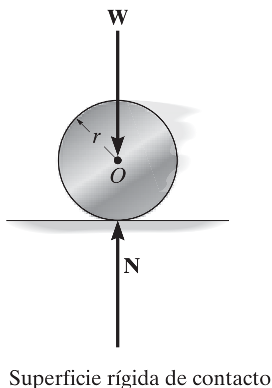
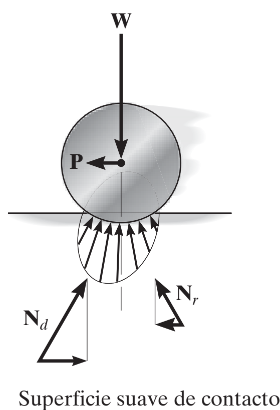




**Fig. 8-24**



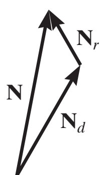

Superficie rígida de contacto

(a)

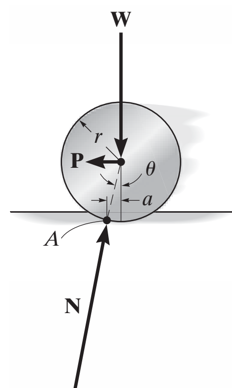



Superficie suave de contacto

(b)




(c)




(d)

**Fig. 8-25**

## *8.8 Resistencia al rodamiento

Cuando un cilindro *rígido* rueda a velocidad constante a lo largo de una superficie *rígida*, la fuerza normal ejercida en el cilindro por la superficie actúa perpendicularmente a la tangente en el punto de contacto, como se muestra en la figura 8-25*a*. Sin embargo, en la realidad no existen los materiales perfectamente rígidos y, por lo tanto, la reacción de la superficie en el cilindro consiste en una distribución de presión normal. Por ejemplo, considere que el cilindro está hecho de un material muy duro y que la superficie sobre la cual rueda es relativamente suave. Debido a su peso, el cilindro comprime la superficie que está debajo de él, figura 8-25*b*. Cuando el cilindro rueda, el material de la superficie frente al cilindro *retarda* el movimiento ya que se *deforma*, en tanto que el material en la parte posterior se *restaura* del estado deformado y por ello tiende a *empujar* al cilindro hacia delante. Las presiones normales que actúan de esta manera sobre el cilindro están representadas en la figura 8-25*b* mediante sus fuerzas resultantes $\mathbf{N}_d$ y $\mathbf{N}_r$. Como la magnitud de la fuerza de *deformación*, $\mathbf{N}_d$, y su componente horizontal es *siempre mayor* que la de *restauración*, $\mathbf{N}_r$, en consecuencia se debe aplicar una fuerza impulsora horizontal **P** al cilindro para mantener el movimiento, figura 8-25*b*.*

La resistencia al rodamiento es causada principalmente por este efecto, aunque es también, en menor grado, el resultado de la adhesión superficial y el microdeslizamiento relativo entre las superficies de contacto. Como la fuerza real **P** necesaria para vencer esos efectos es difícil de determinar, desarrollaremos aquí un método simplificado para explicar una manera en que los ingenieros han analizado este fenómeno. Para hacer esto, consideraremos la resultante de *toda* la presión normal, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \mathbf{N}_r$, que actúa sobre el cilindro, figura 8-25*c*. Como se muestra en la figura 8-25*d*, esta fuerza actúa a un ángulo $\theta$ con la vertical. Para mantener el cilindro en equilibrio, esto es, que ruede con una rapidez constante, es necesario que **N** sea *concurrente* con la fuerza impulsora **P** y el peso **W**. Al sumar momentos con respecto al punto $A$ se obtiene $Wa = P(r \cos \theta)$. Puesto que por lo general las deformaciones son muy pequeñas en relación con el radio del cilindro, $\cos \theta \approx 1$; por consiguiente,

$$Wa \approx Pr$$

o bien,

$$P \approx \frac{Wa}{r} \tag{8-11}$$

La distancia $a$ se denomina *coeficiente de resistencia al rodamiento*, la cual tiene la dimensión de longitud. Por ejemplo, $a \approx 0.5$ mm para una rueda que gira sobre un riel, ambos hechos de acero dulce. Para cojinetes

---

*En realidad, la fuerza de deformación $\mathbf{N}_d$ ocasiona que se almacene *energía* en el material cuando su magnitud aumenta, mientras que la fuerza restauradora $\mathbf{N}_r$, cuando su magnitud disminuye, permite que parte de esta energía sea liberada. La energía restante se *pierde* ya que se usa para calentar la superficie, y si el peso del cilindro es muy grande, eso explica la deformación permanente de la superficie. Para compensar esta pérdida, la fuerza horizontal **P** debe realizar su trabajo.

de bolas de acero endurecido, $a \approx 0.1$ mm. Sin embargo, experimentalmente este factor es difícil de medir, ya que depende de parámetros como la velocidad de rotación del cilindro y las propiedades elásticas de las superficies de contacto, así como del acabado de la superficie. Por esta razón, a los datos para la determinación de $a$ se les concede poca confianza. De cualquier manera, el análisis presentado aquí indica por qué, en las mismas condiciones, una carga pesada ($W$) ofrece mayor resistencia al movimiento ($P$) que una carga ligera. Además, como $Wa/r$ es generalmente muy pequeña comparada con $\mu_k W$, la fuerza necesaria para hacer *rodar* el cilindro sobre la superficie será mucho menor que la requerida para *deslizarlo* sobre la misma superficie. Por esta razón, con frecuencia se usan los rodillos o los cojinetes de bolas para minimizar la resistencia a la fricción entre partes móviles.

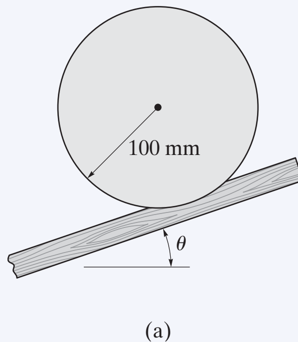




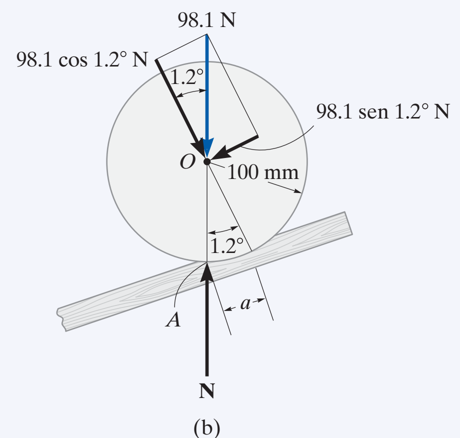
La resistencia al rodamiento de las ruedas de ferrocarril sobre los rieles es pequeña ya que el acero es muy rígido. Por comparación, la resistencia al rodamiento de las ruedas de un tractor en un campo mojado es muy grande.

## EJEMPLO 8.11

La rueda de acero de 10 kg que se muestra en la figura 8-26*a* tiene un radio de 100 mm y descansa sobre un plano inclinado hecho de madera. Si $\theta$ se incrementa de manera que la rueda comienza a girar con velocidad constante cuando $\theta = 1.2°$, determine el coeficiente de resistencia al rodamiento.




(a)




(b)

**Fig. 8-26**

### SOLUCIÓN

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 8-26*b*, cuando la rueda está a punto de moverse, la reacción normal **N** actúa en el punto $A$ definido por la dimensión $a$. Al resolver el peso en las componentes paralela y perpendicular al plano inclinado, y sumar momentos con respecto al punto $A$, se obtiene

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$

$$-(98.1 \cos 1.2° \text{ N})(a) + (98.1 \text{ sen } 1.2° \text{ N})(100 \cos 1.2° \text{ mm}) = 0$$

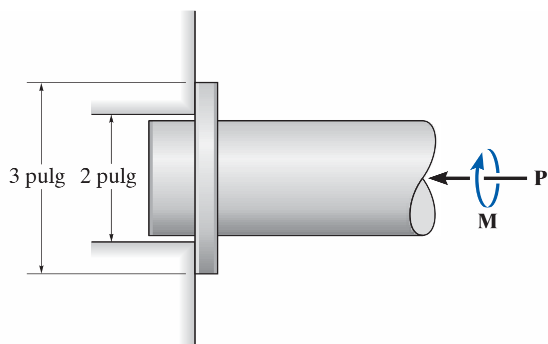
Al despejar, obtenemos

$$a = 2.09 \text{ mm}$$ ***Resp.***

## PROBLEMAS

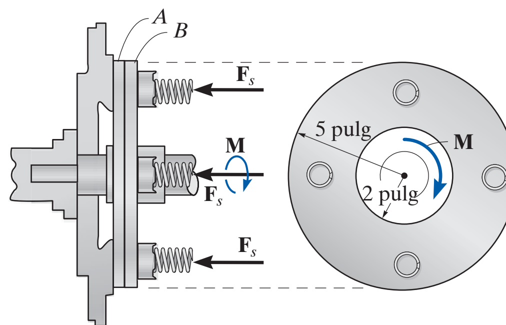
**8-114.** La chumacera de collarín soporta de manera uniforme una fuerza axial de $P = 800$ lb. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$, determine el par $M$ requerido para vencer la fricción.

**8-115.** La chumacera de collarín soporta de manera uniforme una fuerza axial de $P = 500$ lb. Si se aplica un par de torsión de $M = 3$ lb · pie a la flecha y la hace girar a velocidad constante, determine el coeficiente de fricción cinética en la superficie de contacto.



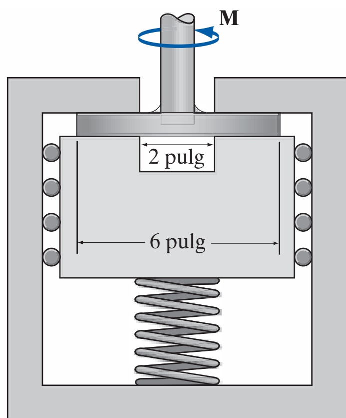

Probs. 8-114/115

•**8-117.** El *embrague de disco* se usa en las transmisiones manuales de los automóviles. Si se usan cuatro resortes para forzar las dos placas $A$ y $B$ una contra la otra, determine la fuerza en cada resorte requerida para transmitir un momento de $M = 600$ lb · pie a través de las placas. El coeficiente de fricción estática entre $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.3$.



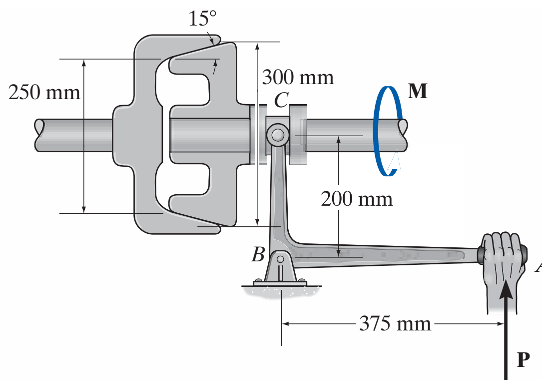

Prob. 8-117

*__8-116.__ Si el resorte ejerce una fuerza de 900 lb sobre el bloque, determine el par de torsión requerido para girar la flecha. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es $\mu_s = 0.3$.



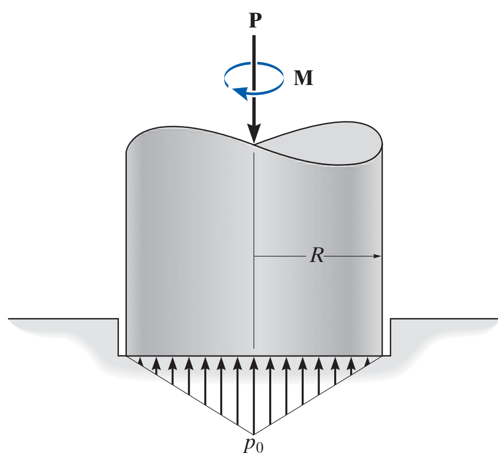

Prob. 8-116

**8-118.** Si se aplica $P = 900$ N a la manija de la manivela de campana, determine el máximo par de torsión $M$ que puede transmitir el embrague de cono. El coeficiente de fricción estática en la superficie de contacto es $\mu_s = 0.3$.



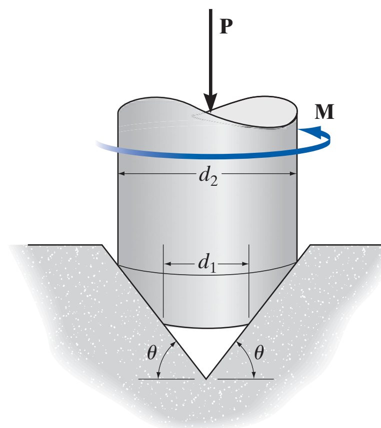

Prob. 8-118

**8-119.** Debido al desgaste en los bordes, la chumacera de pivote está sometida a una distribución de presión cónica en su superficie de contacto. Determine el par de torsión $M$ requerido para vencer la fricción y girar la flecha, la cual soporta una fuerza axial **P**. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s$. Para la solución, es necesario determinar la presión pico $p_0$ en términos de $P$ y del radio $R$ de la chumacera.



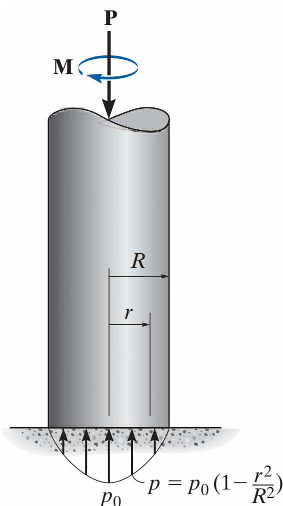

**Prob. 8-119**

**•8-121.** La flecha está sometida a una fuerza axial **P**. Si la presión reactiva sobre la chumacera cónica es uniforme, determine el par $M$ que sólo es suficiente para girar la flecha. El coeficiente de fricción estática en la superficie de contacto es $\mu_s$.



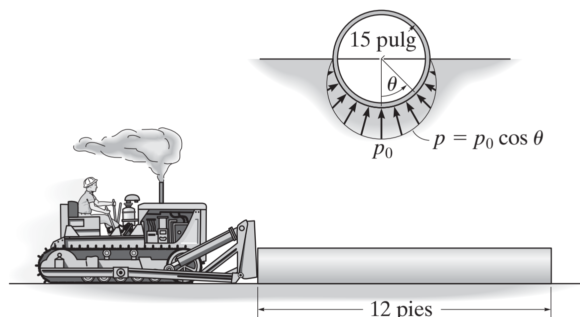

**Prob. 8-121**

***8-120.** La chumacera de pivote está sometida a una distribución de presión parabólica en su superficie de contacto. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s$, determine el par de torsión $M$ requerido para vencer la fricción y girar la flecha, si ésta soporta una fuerza axial **P**.




**Prob. 8-120**

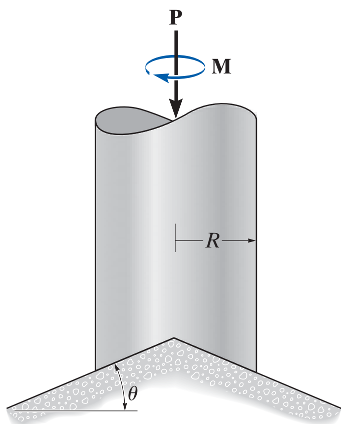
**8-122.** El tractor se usa para empujar el tubo de 1500 lb. Para lograrlo, debe vencer las fuerzas de fricción en el suelo causadas por la arena. Suponga que la arena ejerce una presión sobre el fondo del tubo como se muestra, y que el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la arena es $\mu_s = 0.3$; determine la fuerza requerida para empujar el tubo hacia delante. Encuentre también la presión pico $p_0$.




**Prob. 8-122**

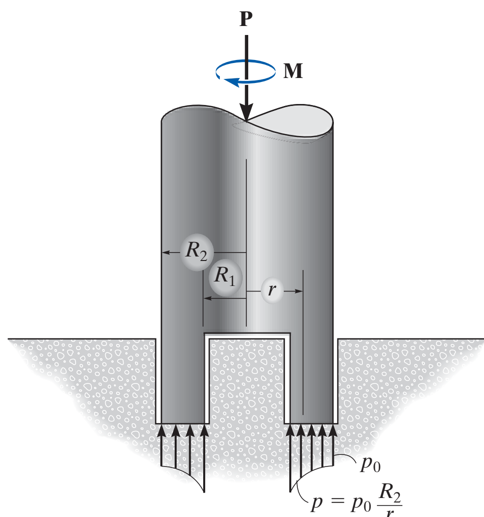
8

**8-123.** La chumacera cónica está sometida a una distribución constante de presión en su superficie de contacto. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s$, determine el par de torsión $M$ requerido para vencer la fricción si la flecha soporta una fuerza axial **P**.



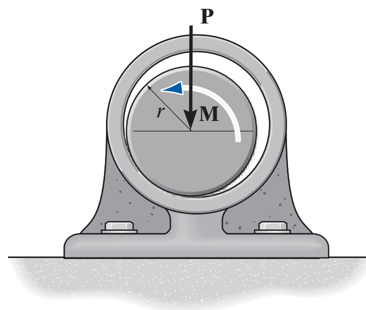

Prob. 8-123

*8-124. Si se supone que la variación de presión en la parte baja de la chumacera de pivote se define como $p = p_0(R_2/r)$, determine el par de torsión $M$ necesario para vencer la fricción si la flecha está sometida a una fuerza axial **P**. El coeficiente de fricción estática es $\mu_s$. Para la solución, es necesario determinar $p_0$ en términos de $P$ y las dimensiones de la chumacera $R_1$ y $R_2$.




Prob. 8-124

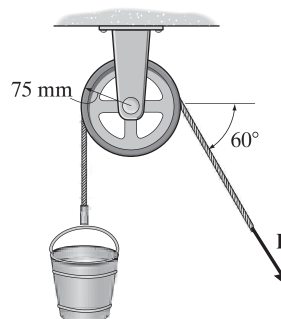
•**8-125.** La flecha de radio $r$ entra holgadamente en la chumacera lisa. Si la flecha transmite una fuerza vertical **P** a la chumacera y el coeficiente de fricción cinética entre la flecha y la chumacera es $\mu_k$, determine el par de torsión $M$ requerido para girar la flecha con velocidad constante.




Prob. 8-125

**8-126.** La polea está soportada por un pasador con diámetro de 25 mm. Si la polea entra holgadamente en el pasador, determine la fuerza $P$ mínima requerida para levantar la cubeta, cuya masa es de 20 kg y el coeficiente de fricción estática entre la polea y el pasador es $\mu_s = 0.3$. Ignore la masa de la polea y suponga que el cable no se desliza sobre ella.

**8-127.** La polea está soportada por un pasador con diámetro de 25 mm. Si la polea entra holgadamente en el pasador, determine la fuerza $P$ máxima que puede aplicarse a la cuerda y aún así bajar la cubeta. La cubeta tiene una masa de 20 kg y el coeficiente de fricción estática entre la polea y el pasador es $\mu_s = 0.3$. Ignore la masa de la polea y suponga que el cable no se desliza sobre ella.

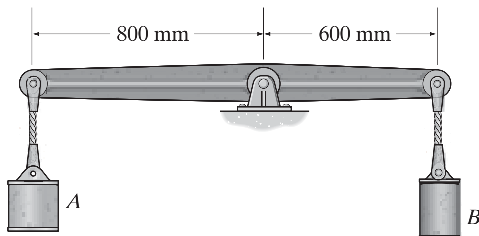



Probs. 8-126/127

8

*$\mathbf{8\text{-}128.}$ Los cilindros están suspendidos del extremo de la barra, la cual entra holgadamente en un pasador de 40 mm. Si $A$ tiene una masa de 10 kg, determine la masa requerida $B$ que sólo baste para evitar que la barra gire en el sentido de las manecillas del reloj. El coeficiente de fricción estática entre la barra y el pasador es $\mu_s = 0.3$. Ignore la masa de la barra.

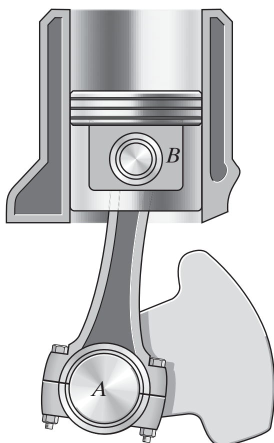
•**8-129.** Los cilindros están suspendidos del extremo de la barra, la cual entra holgadamente en un pasador de 40 mm. Si $A$ tiene una masa de 10 kg, determine la masa requerida $B$ que sólo baste para evitar que la barra gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj. El coeficiente de fricción estática entre la barra y el pasador es $\mu_s = 0.3$. Ignore la masa de la barra.




**Probs. 8-128/129**

**8-130.** La biela está unida al pistón mediante un pasador de 0.75 pulg de diámetro en $B$ y la flecha de manivela mediante una chumacera $A$ de 2 pulg de diámetro. Si el pistón se mueve hacia abajo y el coeficiente de fricción estática en los puntos de contacto es $\mu_s = 0.2$, determine el radio del círculo de fricción en cada conexión.

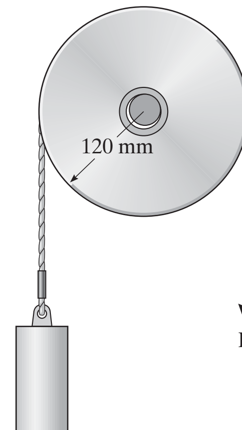
**8-131.** La biela está unida al pistón mediante un pasador de 20 mm de diámetro en $B$ y la flecha de manivela mediante una chumacera $A$ de 50 mm de diámetro. Si el pistón se mueve hacia arriba y el coeficiente de fricción estática en los puntos de contacto es $\mu_s = 0.3$, determine el radio del círculo de fricción en cada conexión.




**Probs. 8-130/131**

***8-132.** La polea de 5 kg tiene un diámetro de 240 mm y el eje tiene un diámetro de 40 mm. Si el coeficiente de fricción cinética entre el eje y la polea es $\mu_k = 0.15$, determine la fuerza vertical $P$ sobre la cuerda requerida para levantar el bloque de 80 kg a velocidad constante.

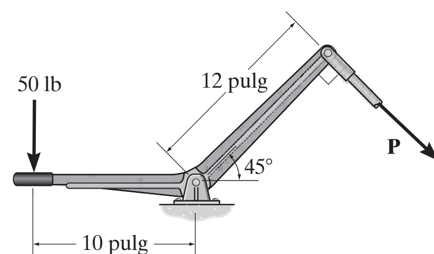
•**8-133.** Resuelva el problema 8-132 si la fuerza **P** se aplica horizontalmente hacia la derecha.




**Probs. 8-132/133**

**8-134.** La manivela de campana entra con holgura en un pasador de 0.5 pulg de diámetro. Determine la fuerza $P$ requerida que baste para girar la manivela de campana en el sentido de las manecillas del reloj. El coeficiente de fricción estática entre el pasador y la manivela de campana es $\mu_s = 0.3$.

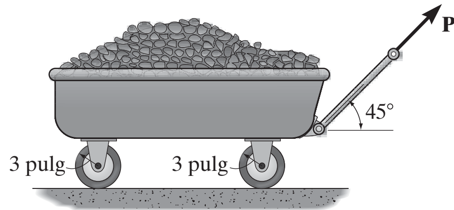
**8-135.** La manivela de campana entra cn holgura en un pasador de 0.5 pulg de diámetro. Si $P = 41$ lb, la manivela de campana está a punto girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine el coeficiente de fricción estática entre el pasador y la manivela de campana.




**Probs. 8-134/135**

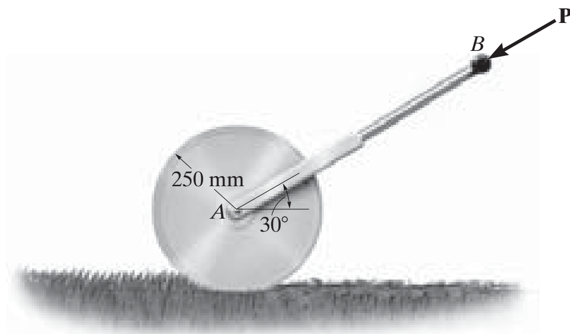
8

***8-136.** El vagón de mina junto con su carga pesa 150 lb. Si el coeficiente de resistencia al rodamiento es $a = 0.03$ pulg, determine la fuerza $P$ requerida para jalar el vagón con velocidad constante.




Prob. 8-136

**•8-137.** El rodillo de podadora tiene una masa de 80 kg. Si el brazo $BA$ se mantiene en un ángulo de 30° con la horizontal y el coeficiente de resistencia al rodamiento del rodillo es de 25 mm, determine la fuerza $P$ necesaria para empujar el rodillo con velocidad constante. Ignore la fricción desarrollada en el eje y suponga que la fuerza resultante **P** que actúa sobre la manija se aplica a lo largo de $BA$.

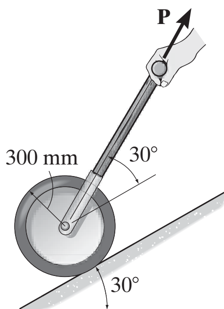



Prob. 8-137

8

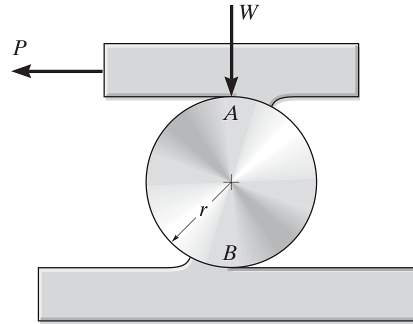
**8-138.** Determine la fuerza $P$ requerida para vencer la resistencia al rodamiento y jalar el rodillo de 50 kg hacia arriba sobre el plano inclinado con velocidad constante. El coeficiente de resistencia al rodamiento es $a = 15$ mm.

**8-139.** Determine la fuerza $P$ requerida para vencer la resistencia al rodamiento y sostener el rodillo de 50 kg si éste rueda hacia abajo sobre el plano inclinado con velocidad constante. El coeficiente de resistencia al rodamiento es $a = 15$ mm.



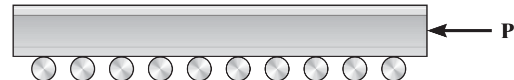

Probs. 8-138/139

***8-140.** El cilindro está sometido a una carga que tiene un peso $W$. Si los coeficientes de resistencia al rodamiento para las superficies superior e inferior del cilindro son $a_A$ y $a_B$, respectivamente, demuestre que se requiere una fuerza con magnitud $P = [W(a_A + a_B)]/2r$ para mover la carga y hacer rodar el cilindro hacia delante. Ignore el peso del cilindro.



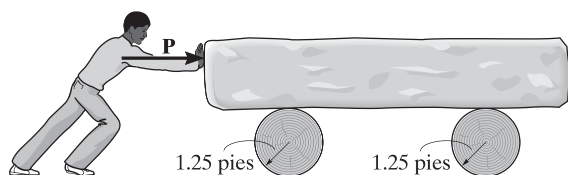

Prob. 8-140

**•8-141.** La viga de acero de 1.2 Mg se mueve sobre una superficie plana con una serie de rodillos de 30 mm de diámetro, para los cuales el coeficiente de resistencia al rodamiento es de 0.4 mm en el suelo y 0.2 mm en la superficie inferior de la viga. Determine la fuerza horizontal $P$ necesaria para empujar la viga hacia delante a velocidad constante. *Sugerencia:* utilice el resultado del problema 8-140.




Prob. 8-141

**8-142.** Determine la fuerza horizontal $P$ mínima que debe ejercerse sobre el bloque de 200 lb para moverlo hacia delante. Cada uno de los rodillos pesa 50 lb, y el coeficiente de resistencia al rodamiento en las superficies superior e inferior es $a = 0.2$ pulg.

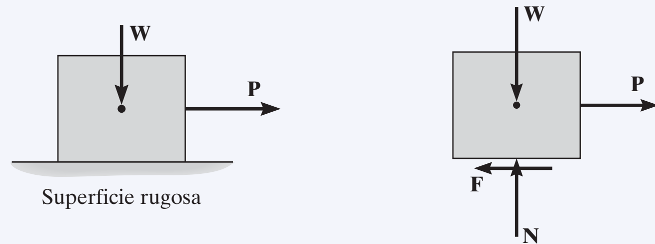



Prob. 8-142

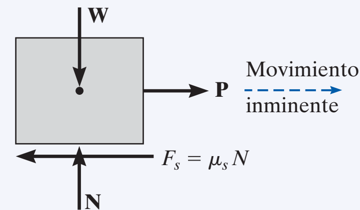
# REPASO DEL CAPÍTULO

**Fricción seca**

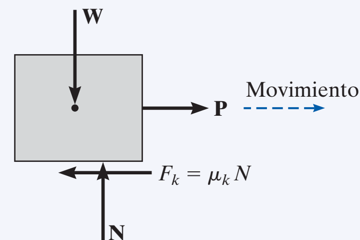
Entre dos superficies rugosas en contacto existen fuerzas de fricción. Estas fuerzas actúan sobre un cuerpo al oponerse al movimiento o a la tendencia de su movimiento.




Una fuerza de fricción estática se aproxima a un valor máximo de $F_s = \mu_s N$, donde $\mu_s$ es el *coeficiente de fricción estática*. En este caso, el movimiento entre las superficies de contacto es *inminente*.

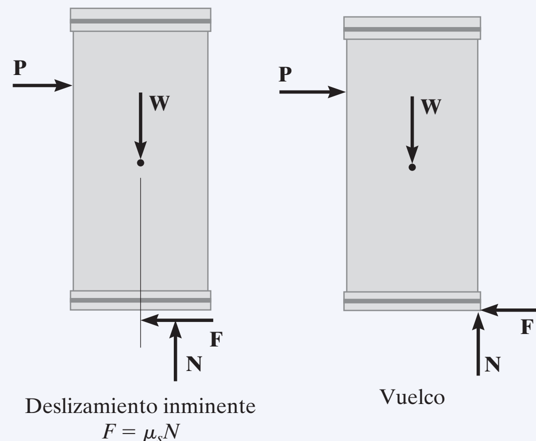



Si ocurre el deslizamiento, entonces la fuerza de fricción permanece esencialmente constante e igual a $F_k = \mu_k N$. Aquí, $\mu_k$ es el *coeficiente de fricción cinética*.




La solución de un problema que implica fricción requiere trazar primero el diagrama de cuerpo libre del cuerpo. Si las incógnitas no pueden ser determinadas estrictamente a partir de las ecuaciones de equilibrio, y existe la posibilidad de que ocurra el deslizamiento, entonces la ecuación de fricción debe aplicarse en los puntos de contacto apropiados para completar la solución.

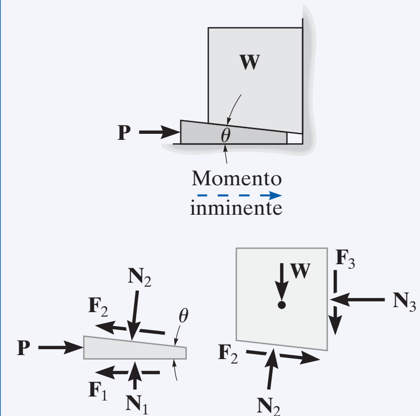
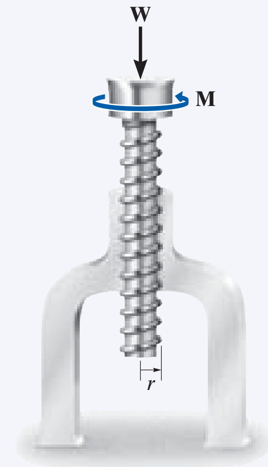
También es posible que objetos esbeltos, como embalajes, se vuelquen, y esta situación debe ser investigada.




Deslizamiento inminente
$F = \mu_s N$

Vuelco

8

| | | |
|---|---|---|
| **Cuñas**<br>Las cuñas son planos inclinados usados para aumentar la aplicación de una fuerza. Las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas se usan para relacionar las fuerzas que actúan sobre la cuña.<br><br>Una fuerza aplicada **P** debe empujar sobre la cuña para moverlo hacia la derecha.<br><br>Si los coeficientes de fricción entre las superficies son suficientemente grandes, entonces **P** puede retirarse y la cuña será autobloqueante y permanecerá en su lugar. | $\Sigma F_x = 0$<br>$\Sigma F_y = 0$ |  |
| **Tornillos**<br>Los tornillos de rosca cuadrada se usan para mover cargas pesadas. Representan un plano inclinado, enrollado alrededor de un cilindro.<br><br>El momento necesario para girar un tornillo depende del coeficiente de fricción y del ángulo $\theta$ de paso del tornillo.<br><br>Si el coeficiente de fricción entre las superficies es suficientemente grande, entonces el tornillo soportará la carga sin que tienda a girar, es decir, será autobloqueante. | $M = Wr\tan(\theta + \phi_s)$<br>Movimiento inminente del tornillo hacia arriba<br><br>$M' = Wr\tan(\theta - \phi_s)$<br>Movimiento inminente del tornillo hacia abajo<br>$\theta > \phi$<br><br>$M'' = Wr\tan(\phi - \theta_s)$<br>Movimiento del tornillo hacia abajo<br>$\phi_s > \theta$ |  |
| **Bandas planas**<br>La fuerza necesaria para mover una banda plana sobre una superficie curva rugosa depende sólo del ángulo de contacto de la banda, $\beta$, y del coeficiente de fricción. | $T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$<br>$T_2 > T_1$ |  |

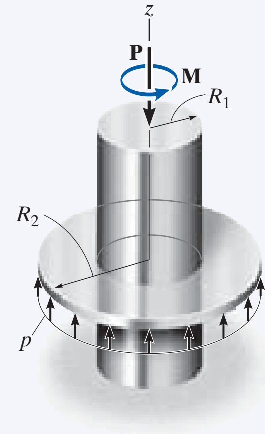
8

**Chumaceras de collarín y discos**

El análisis de fricción de una chumacera de collarín o disco requiere considerar un elemento diferencial del área de contacto. La fuerza normal que actúa sobre este elemento se determina a partir del equilibrio de fuerzas a lo largo de la flecha, y el momento necesario para girar la flecha a una razón constante se determina a partir del equilibrio de momentos con respecto al eje de la flecha.

Si la presión sobre la superficie de una chumacera de collarín es uniforme, entonces la integración da el resultado que se muestra.

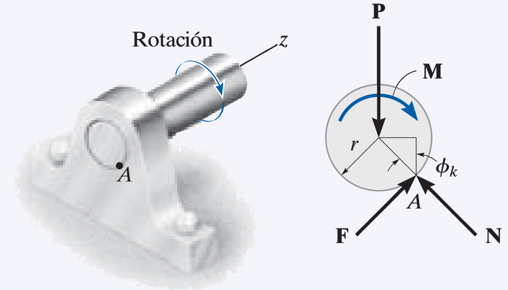
$$M = \frac{2}{3}\mu_s P\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}\right)$$




**Chumaceras lisas**

Cuando se aplica un momento a una flecha en una chumacera lisa no lubricada o parcialmente lubricada, la flecha tenderá a rodar en la chumacera hasta que ocurra el deslizamiento. Lo anterior define el radio de un círculo de fricción, y con base en éste se puede determinar el momento necesario para girar la flecha.

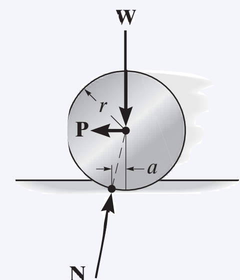
$$M = Rr \operatorname{sen} \phi_k$$




**Resistencia al rodamiento**

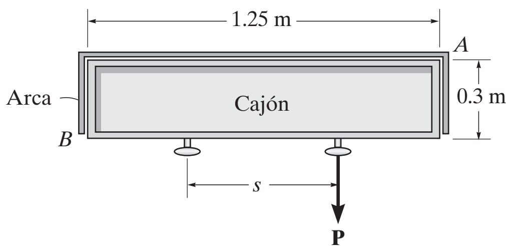
La resistencia de una rueda a girar sobre una superficie la ocasiona la *deformación* de los dos materiales que entran en contacto. Esto hace que la fuerza normal resultante que actúa sobre el cuerpo rodante se incline y proporcione una componente que actúa en la dirección opuesta a la fuerza aplicada **P** que genera el movimiento. El efecto se caracteriza por el *coeficiente de resistencia al rodamiento*, *a*, el cual se determina de manera experimental.

$$P \approx \frac{Wa}{r}$$



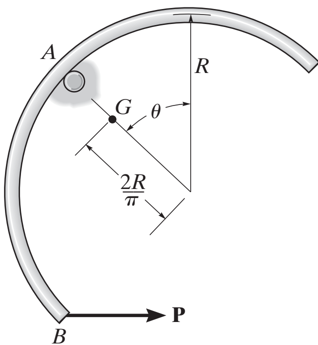
## PROBLEMAS DE REPASO

**8-143.** Una sola fuerza **P** se aplica a la manija del cajón. Si no se considera la fricción en el fondo y el coeficiente de fricción estática a lo largo de los lados es $\mu_s = 0.4$, determine la separación *s* más grande posible entre las manijas simétricamente colocadas de manera que el cajón no se trabe en las esquinas *A* y *B* cuando se aplique la fuerza **P** a una de las manijas.




Prob. 8-143

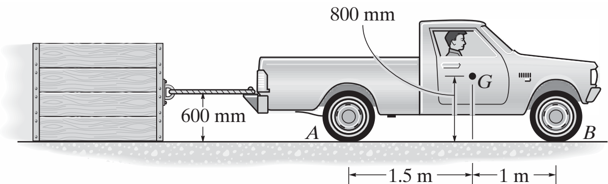
*8-144. El arco semicircular delgado de peso *W* y centro de gravedad en *G* está suspendido por la clavija pequeña en *A*. Una fuerza horizontal **P** se aplica lentamente en *B*. Si el arco comienza a deslizarse en *A* cuando $\theta = 30°$, determine el coeficiente de fricción estática entre el arco y la clavija.




Prob. 8-144

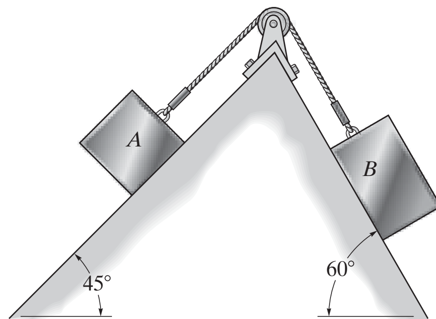
•**8-145.** La camioneta tiene masa de 1.25 Mg y su centro de masa en *G*. Determine la carga más grande que esta camioneta puede jalar si (*a*) tiene tracción en las ruedas traseras mientras que las delanteras pueden girar libremente, y (*b*) tiene tracción en las cuatro ruedas. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el suelo es $\mu_s = 0.5$, y entre el embalaje y el terreno es $\mu'_s = 0.4$.

**8-146.** Resuelva el problema 8-145 si la camioneta y el embalaje suben por un plano inclinado de 10°.




Probs. 8-145/146

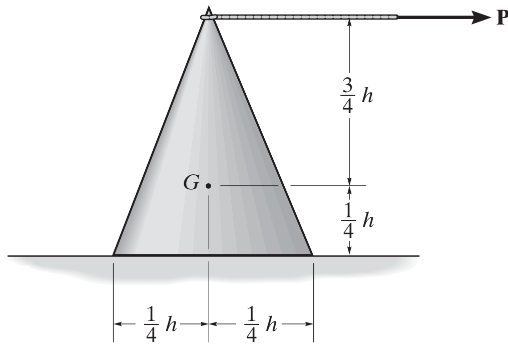
**8-147.** Si el bloque *A* tiene una masa de 1.5 kg, determine la masa máxima del bloque *B* que no genere movimiento del sistema. El coeficiente de fricción estática entre los bloques y los planos inclinados es $\mu_s = 0.2$.




Prob. 8-147

8

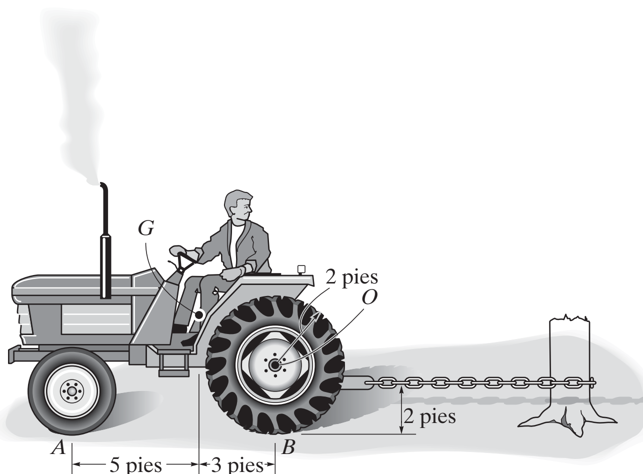
*8-148. El cono tiene un peso $W$ y centro de gravedad en $G$. Si una fuerza horizontal **P** se aplica gradualmente a la cuerda unida a su vértice, determine el coeficiente máximo de fricción estática para que ocurra el deslizamiento.




Prob. 8-148

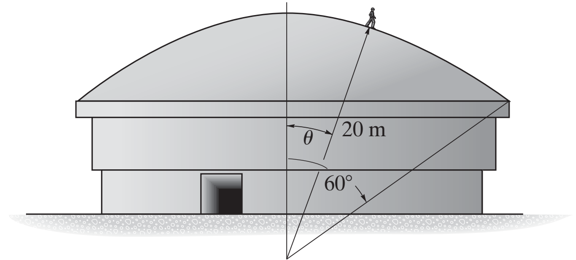
•8-149. El tractor jala el tronco fijo de un árbol. Determine el par de torsión que debe aplicar el motor a las ruedas traseras para causar su deslizamiento. Las ruedas delanteras pueden girar libremente. El tractor pesa 3500 lb y tiene un centro de gravedad en $G$. El coeficiente de fricción estática entre las ruedas posteriores y el terreno es $\mu_s = 0.5$.

8-150. El tractor jala el tronco fijo de un árbol. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas traseras y el terreno es $\mu_s = 0.6$, determine si las ruedas traseras se deslizan o las delanteras se levantan del terreno cuando el motor proporciona un par de torsión a las ruedas traseras. ¿Cuál es el par de torsión necesario para ocasionar el movimiento? Las ruedas delanteras pueden girar libremente. El tractor pesa 2500 lb y tiene su centro de gravedad en $G$.




Probs. 8-149/150

8-151. Un constructor de techos, cuya masa es de 70 kg, camina lentamente hacia abajo desde la posición más alta a lo largo de la superficie de un domo que tiene un radio de curvatura de $r = 20$ m. Si el coeficiente de fricción estática entre sus zapatos y el domo es $\mu_s = 0.7$, determine el ángulo $\theta$ al cual comenzará a resbalarse.

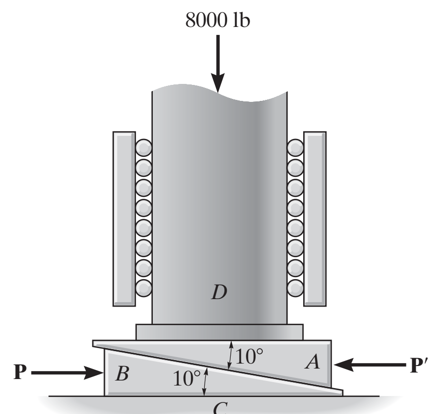



Prob. 8-151

*8-152. La columna $D$ está sometida a una carga vertical de 8000 lb. Está soportada sobre dos cuñas idénticas $A$ y $B$ para las cuales el coeficiente de fricción estática en las superficies de contacto entre $A$ y $B$ y entre $B$ y $C$ es $\mu_s = 0.4$. Determine la fuerza $P$ necesaria para levantar la columna y la fuerza de equilibrio $P'$ necesaria para mantener fija la cuña $A$. La superficie de contacto entre $A$ y $D$ es lisa.

•8-153. La columna $D$ está sometida a una carga vertical de 8000 lb. Está soportada sobre dos cuñas idénticas $A$ y $B$ para las cuales el coeficiente de fricción estática en las superficies de contacto entre $A$ y $B$ y entre $B$ y $C$ es $\mu_s = 0.4$. Si se retiran las fuerzas **P** y **P**′, ¿son autobloqueantes las cuñas? La superficie de contacto entre $A$ y $D$ es lisa.

8




Probs. 8-152/153



Cuando se diseña un tanque de agua, es importante tener la capacidad de determinar su centro de gravedad, calcular su volumen y área superficial, y reducir las cargas tridimensionales distribuidas, causadas por la presión del agua a sus resultantes. Todos estos temas se analizan en el presente capítulo.

# Centro de gravedad y centroide

# 9

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar los conceptos de centro de gravedad, centro de masa y centroide.
- Mostrar cómo se determina la ubicación del centro de gravedad y el centroide para un sistema de partículas discretas y un cuerpo de forma arbitraria.
- Utilizar los teoremas de Pappus y Guldinus para encontrar el área superficial y el volumen de un cuerpo que tiene simetría axial.
- Presentar un método para encontrar la resultante de una carga general distribuida y mostrar cómo se aplica para encontrar la fuerza resultante de una carga de presión causada por un fluido.

## 9.1 Centro de gravedad, centro de masa y el centroide de un cuerpo

En esta sección mostraremos primero cómo localizar el centro de gravedad para un cuerpo y después demostraremos que el centro de masa y el centroide de un cuerpo pueden desarrollarse con este mismo método.

**Centro de gravedad.** Un cuerpo está compuesto de un número infinito de partículas de tamaño diferencial, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso $dW$, figura 9-1*a*. Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un solo punto llamado el *centro de gravedad*, $G$, figura 9-1*b*.*

*Esto es cierto mientras se suponga que el campo de gravedad tiene la misma magnitud y dirección en todas partes. Ese supuesto es apropiado para la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, ya que la gravedad no varía apreciablemente entre, por ejemplo, la parte inferior y la superior de un edificio.

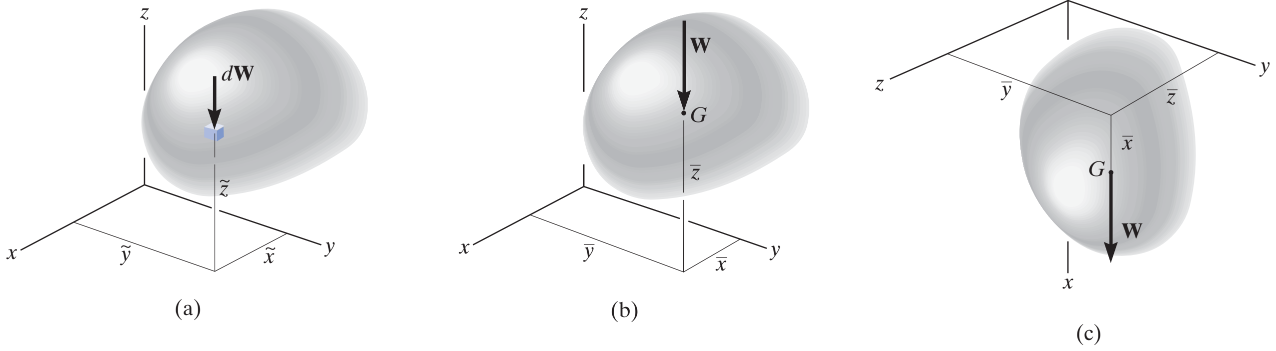



**Fig. 9-1**

Con los métodos delineados en la sección 4.8, el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas sus partículas, es decir

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \qquad W = \int dW$$

La ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje $y$, se determina al igualar el momento de $W$ con respecto al eje $y$, figura 9-1*b*, con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si $dW$ se ubica en el punto $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, figura 9-1*a*, entonces

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto al eje $x$,

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \qquad \bar{y}W = \int \tilde{y}\,dW$$

Por último, imagine que el cuerpo está fijo dentro del sistema de coordenadas y este sistema se gira 90° con respecto al eje $y$, figura 9-1*c*. Entonces la suma de los momentos con respecto al eje $y$ es

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{z}W = \int \tilde{z}\,dW$$

Por lo tanto, la ubicación del centro de gravedad $G$ con respecto a los ejes $x$, $y$ y $z$ se convierte en

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\,dW}{\int dW} \tag{9-1}$$

Aquí

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad $G$, figura 9-1*b*.
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ son las coordenadas de cada partícula en el cuerpo, figura 9-1*a*.

9

## Centro de masa de un cuerpo.

A fin de estudiar la *respuesta dinámica* o el movimiento acelerado de un cuerpo, resulta importante localizar el centro de masa del cuerpo $C_m$, figura 9-2. Esta ubicación puede determinarse al sustituir $dW = g\,dm$ en las ecuaciones 9-1. Como $g$ es constante, se cancela y entonces

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\,dm}{\int dm} \tag{9-2}$$

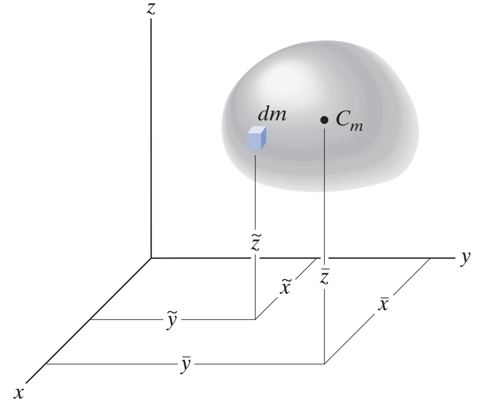



**Fig. 9-2**

## Centroide de un volumen.

Si el cuerpo de la figura 9-3 está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad $\rho$ (ro) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen $dV$ tiene una masa $dm = \rho\,dV$. Al sustituir esto en las ecuaciones 9-2 y al cancelar $\rho$, obtenemos fórmulas que localizan el *centroide* $C$ o centro geométrico del cuerpo; a saber

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\,dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\,dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\,dV}{\int_V dV} \tag{9-3}$$

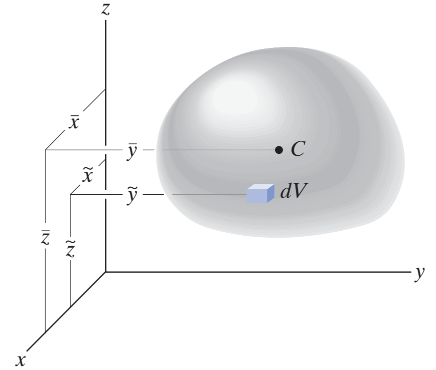



**Fig. 9-3**

Estas ecuaciones representan un equilibrio de los momentos del volumen del cuerpo. Por tanto, si el volumen posee dos planos de simetría, entonces su centroide debe descansar a lo largo de la línea de intersección de estos dos planos. Por ejemplo, el cono de la figura 9-4 tiene un centroide que se encuentra sobre el eje $y$ de modo que $\bar{x} = \bar{z} = 0$. La ubicación $\bar{y}$ puede encontrarse con una integración simple al elegir un elemento diferencial representado por un *disco delgado* de grosor $dy$ y un radio $r = z$. Su volumen es $dV = \pi r^2\,dy = \pi z^2\,dy$ y su centroide se encuentra en $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = 0$.

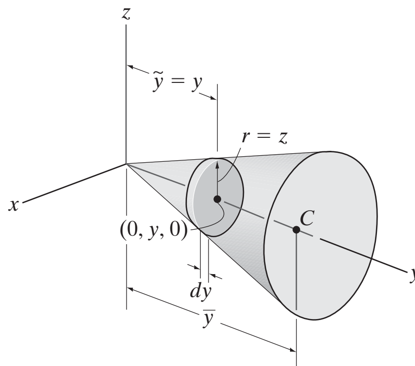



**Fig. 9-4**

9

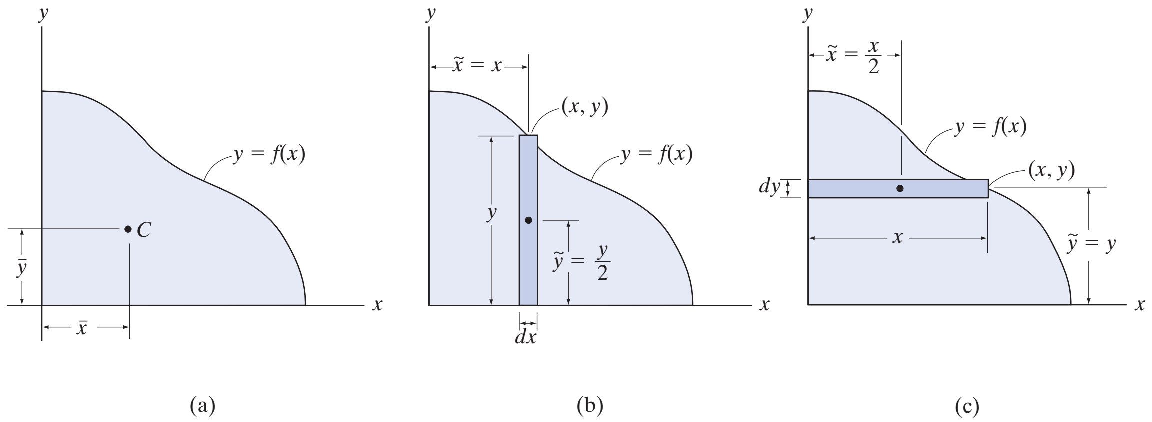



**Fig. 9-5**



Para determinar la ubicación del centro de gravedad de este poste de gol de campo, es necesario utilizar integración debido a la curvatura del elemento de soporte.

**Centroide de un área.** Si un área se encuentra en el plano $x$-$y$ y está delimitada por la curva $y = f(x)$, como se muestra en la figura 9-5*a*, entonces su centroide pertenecerá a este plano y podrá determinarse a partir de integrales similares a las ecuaciones 9-3, a saber,

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} \tag{9-4}$$

Estas integrales pueden evaluarse mediante una *integración simple* si usamos una *franja rectangular* como elemento de área diferencial. Por ejemplo, si se usa una franja vertical, figura 9-5*b*, el área del elemento es $dA = y\,dx$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y/2$. Si consideramos una franja horizontal, figura 9-5*c*, entonces $dA = x\,dy$, y su centroide se ubica en $\tilde{x} = x/2$ y $\tilde{y} = y$.

**Centroide de una línea.** Si un segmento de línea (o barra) pertenece al plano $x$-$y$ y puede describirse mediante una curva delgada $y = f(x)$, figura 9-6*a*, entonces su centroide está determinado por

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} \tag{9-5}$$

9

Aquí, la longitud del elemento diferencial está dada por el teorema de Pitágoras, $dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, que también se puede escribir en la forma

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

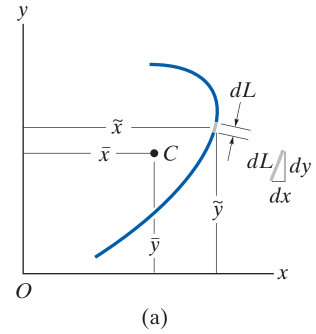
$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

o bien

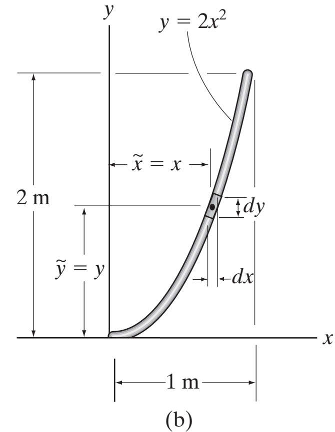
$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

Cualquiera de estas expresiones puede usarse; sin embargo, para su aplicación debe seleccionarse aquella que implique una integración más sencilla. Por ejemplo, considere la carga de la figura 9-6*b*, definida por $y = 2x^2$, la longitud del elemento es $dL = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$ y como $dy/dx = 4x$, entonces $dL = \sqrt{1 + (4x)^2}\, dx$. El centroide para este elemento se localiza en $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y$.



(a)



(b)

**Fig. 9-6**

## Puntos importantes

- El centroide representa el centro geométrico de un cuerpo. Este punto coincide con el centro de masa o con el centro de gravedad sólo si el material que compone el cuerpo es uniforme u homogéneo.
- Las fórmulas usadas para localizar el centro de gravedad o el centroide simplemente representan un balance entre la suma de momentos de todas las partes del sistema y el momento de la "resultante" para el sistema.
- En algunos casos, el centroide se ubica en un punto fuera del objeto, como en el caso de un anillo, donde el centroide está en el centro del anillo. Además, este punto se encontrará sobre cualquier eje de simetría del cuerpo, figura 9-7.

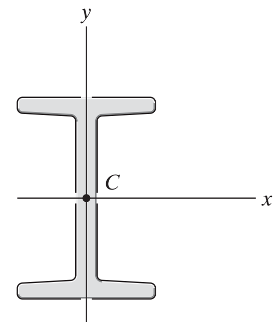



**Fig. 9-7**

## Procedimiento para el análisis

El centro de gravedad o centroide de un objeto o forma, se puede determinar mediante integraciones simples por el siguiente procedimiento.

### Elemento diferencial.

- Seleccione un sistema coordenado apropiado, especifique los ejes coordenados, y luego elija un elemento diferencial para la integración.
- Para líneas, el elemento se representa mediante un segmento diferencial de línea con longitud $dL$.
- Para áreas, por lo general el elemento es un rectángulo de área $dA$, con una longitud finita y ancho diferencial.
- Para volúmenes, el elemento puede ser un disco circular de volumen $dV$, con un radio finito y espesor diferencial.
- Localice el elemento de manera que toque el punto arbitrario $(x, y, z)$ sobre la curva que define la frontera de la forma.

### Tamaño y brazos de momento.

- Exprese la longitud $dL$, el área $dA$, o el volumen $dV$ del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.
- Exprese los brazos de momento $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ para el centroide o centro de gravedad del elemento en términos de las coordenadas que describen la curva.

### Integraciones.

- Sustituya las formulaciones para $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ y $dL$, $dA$ o $dV$ en las ecuaciones apropiadas (ecuaciones 9-1 a 9-5).
- Exprese la función en el integrando en términos de la *misma variable aplicada al espesor del elemento*.
- Los límites de la integral se definen a partir de las dos ubicaciones extremas del espesor diferencial del elemento, de manera que cuando los elementos se "suman" o la integración se realiza, toda la región queda cubierta.*

*Las fórmulas de integración se dan en el apéndice A.

## EJEMPLO 9.1

Localice el centroide de la varilla doblada en forma de arco parabólico, como se muestra en la figura 9-8.

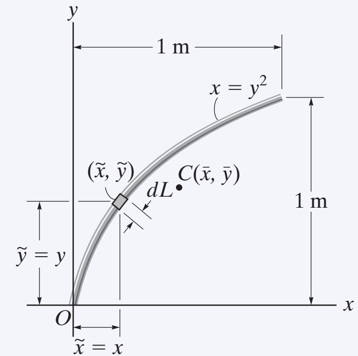



**Fig. 9-8**

### SOLUCIÓN

**Elemento diferencial.** El elemento diferencial se muestra en la figura 9-8. Se ubica sobre la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$.

**Área y brazos de momento.** El elemento diferencial de longitud $dL$ puede expresarse en términos de las diferenciales $dx$ y $dy$ con el teorema de Pitágoras.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

Como $x = y^2$, entonces $dx/dy = 2y$. Por lo tanto, al expresar $dL$ en términos de $y$ y $dy$, tenemos

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}\, dy$$

Como se muestra en la figura 9-8, el centroide del elemento se ubica en $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y$.

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-5 y con las fórmulas del apéndice A para evaluar las integrales, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{m}} x\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{\int_0^{1\text{m}} y^2\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy}$$

$$= \frac{0.6063}{1.479} = 0.410 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{1\text{m}} y\sqrt{4y^2 + 1}\, dy}{\int_0^{1\text{m}} \sqrt{4y^2 + 1}\, dy} = \frac{0.8484}{1.479} = 0.574 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** estos resultados para $C$ parecen razonables cuando se grafican en la figura 9-8.

## EJEMPLO 9.2

Localice el centroide del segmento circular de alambre que se muestra en la figura 9-9.

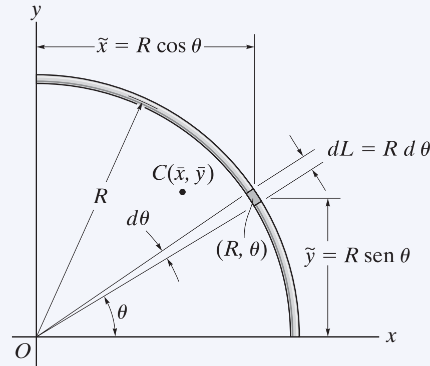



**Fig. 9-9**

### SOLUCIÓN

Para resolver este problema usaremos coordenadas polares puesto que el arco es circular.

**Elemento diferencial.** Se selecciona un arco circular diferencial como se muestra en la figura. Este elemento interseca la curva en $(R, \theta)$.

**Longitud y brazo de momento.** La longitud del elemento diferencial es $dL = R\, d\theta$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = R \cos \theta$ y $\tilde{y} = R \operatorname{sen} \theta$.

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-5 e integrar con respecto a $\theta$, obtenemos.

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta) R\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} R\, d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^{\pi/2} (R\operatorname{sen}\theta) R\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} R\, d\theta} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{2R}{\pi} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** como se esperaba, las dos coordenadas son numéricamente iguales debido a la simetría del alambre.

9

## EJEMPLO 9.3

Determine la distancia $\bar{y}$ medida desde el eje $x$ hasta el centroide del área del triángulo que se muestra en la figura 9-10.

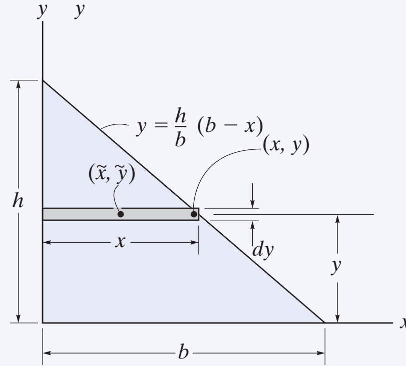



**Fig. 9-10**

### SOLUCIÓN

**Elemento diferencial.** Considere un elemento rectangular que tiene un espesor $dy$ y que se ubica en una posición arbitraria de manera que interseca la frontera en $(x, y)$, figura 9-10.

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es $dA = x\,dy$, $= \frac{b}{h}(h - y)\,dy$, y su centroide está localizado a una distancia $\tilde{y} = y$ del eje $x$.

**Integración.** Al aplicar la segunda de las ecuaciones 9-4 e integrar con respecto a $y$, resulta

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^h y\left[\frac{b}{h}(h - y)\,dy\right]}{\int_0^h \frac{b}{h}(h - y)\,dy} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh}$$

$$= \frac{h}{3}$$ ***Resp.***

**NOTA:** este resultado es válido para cualquier forma de triángulo. Establece que el centroide se localiza a un tercio de la altura medida desde la base del triángulo.

9

## EJEMPLO 9.4

Localice el centroide para el área de un cuadrante de círculo que se muestra en la figura 9-11.

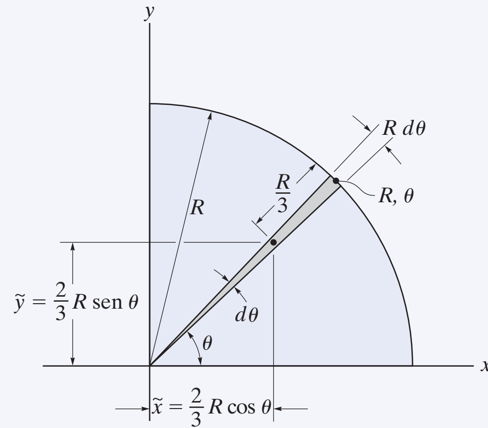



**Fig. 9-11**

### SOLUCIÓN

**Elemento diferencial.** Se usarán coordenadas polares, ya que la frontera es circular. Seleccionamos el elemento en forma de un *triángulo*, figura 9-11. (En realidad la forma es un sector circular; sin embargo, al ignorar las diferenciales de orden superior, el elemento se vuelve triangular). El elemento interseca la curva en el punto $(R, \theta)$.

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es

$$dA = \tfrac{1}{2}(R)(R\,d\theta) = \frac{R^2}{2}d\theta$$

y al usar los resultados del ejemplo 9.3, el centroide del elemento (triangular) se ubica en $\tilde{x} = \frac{2}{3}R\cos\theta$, $\tilde{y} = \frac{2}{3}R\operatorname{sen}\theta$.

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-4 e integrar con respecto a $\theta$, obtenemos

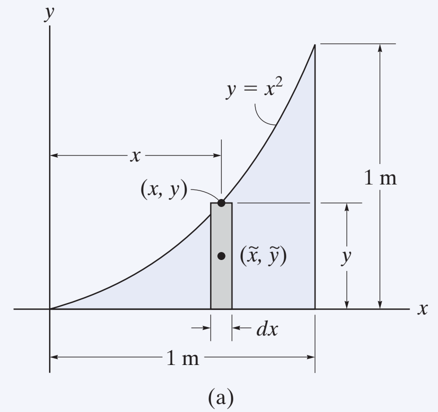
$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}R\cos\theta\right)\frac{R^2}{2}d\theta}{\int_0^{\pi/2}\frac{R^2}{2}d\theta} = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi/2}d\theta} = \frac{4R}{3\pi} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{3}R\operatorname{sen}\theta\right)\frac{R^2}{2}d\theta}{\int_0^{\pi/2}\frac{R^2}{2}d\theta} = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi/2}d\theta} = \frac{4R}{3\pi} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

9

## EJEMPLO 9.5

Localice el centroide del área que se muestra en la figura 9-12*a*.



(a)

### SOLUCIÓN I

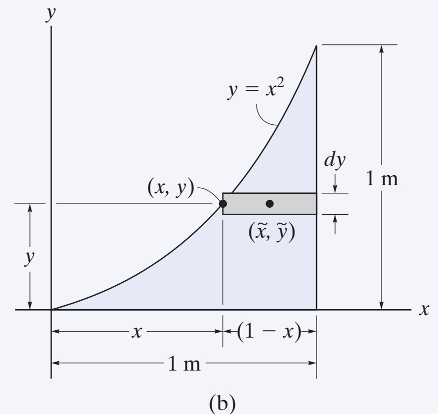
**Elemento diferencial.** En la figura 9-12*a* se muestra un elemento diferencial de espesor $dx$. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$, por lo que tiene una altura $y$.

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es $dA = y\,dx$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y/2$.

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-4 e integrar con respecto a $x$ se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} xy\,dx}{\int_0^{1\text{m}} y\,dx} = \frac{\int_0^{1\text{m}} x^3\,dx}{\int_0^{1\text{m}} x^2\,dx} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m}$$ ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} (y/2)y\,dx}{\int_0^{1\text{m}} y\,dx} = \frac{\int_0^{1\text{m}} (x^2/2)x^2\,dx}{\int_0^{1\text{m}} x^2\,dx} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m}$$ ***Resp.***



(b)

**Fig. 9-12**

### SOLUCIÓN II

**Elemento diferencial.** En la figura 9-12*b* se muestra el elemento diferencial de espesor $dy$. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$, por lo que tiene una longitud $(1 - x)$.

**Área y brazos de momento.** El área del elemento es $dA = (1 - x)\,dy$, y su centroide se localiza en

$$\tilde{x} = x + \left(\frac{1 - x}{2}\right) = \frac{1 + x}{2},\ \tilde{y} = y$$

**Integraciones.** Al aplicar las ecuaciones 9-4 e integrar con respecto a $y$, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} [(1 + x)/2](1 - x)\,dy}{\int_0^{1\text{m}} (1 - x)\,dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{1\text{m}} (1 - y)\,dy}{\int_0^{1\text{m}} (1 - \sqrt{y})\,dy} = \frac{0.250}{0.333} = 0.75 \text{ m}$$ ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} y(1 - x)\,dy}{\int_0^{1\text{m}} (1 - x)\,dy} = \frac{\int_0^{1\text{m}} (y - y^{3/2})\,dy}{\int_0^{1\text{m}} (1 - \sqrt{y})\,dy} = \frac{0.100}{0.333} = 0.3 \text{ m}$$ ***Resp.***

**NOTA:** grafique estos resultados y observe que parezcan razonables. Además, para este problema, los elementos de espesor $dx$ ofrecen una solución más simple.

9

## EJEMPLO 9.6

Localice el centroide del área semielíptica que se muestra en la figura 9-13*a*.

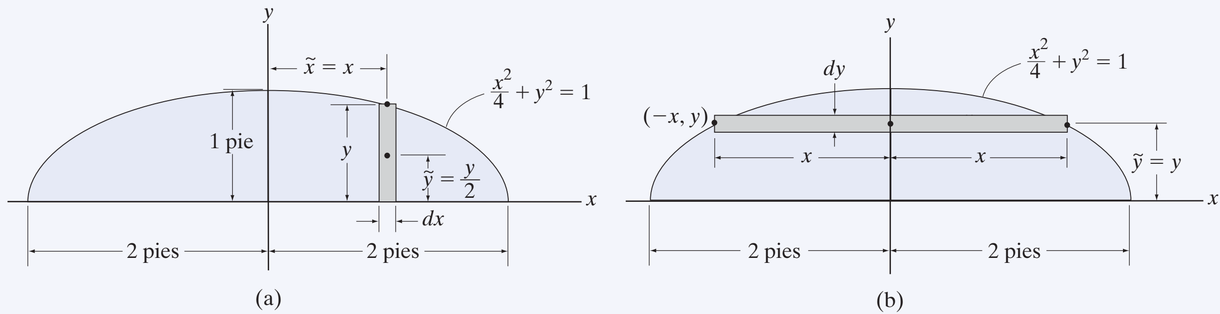



**Fig. 9-13**

### SOLUCIÓN I

**Elemento diferencial.** Se considerará el elemento diferencial rectangular paralelo al eje $y$ que se muestra sombreado en gris en la figura 9-13*a*. Este elemento tiene un espesor de $dx$ y una altura de $y$.

**Área y brazos de momento.** Así, el área es $dA = y\,dx$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y/2$.

**Integración.** Como el área es simétrica con respecto al eje $y$,

$$\bar{x} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Si aplicamos la segunda de las ecuaciones 9-4 con $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, tenemos

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{-2\text{ pies}}^{2\text{ pies}} \frac{y}{2}(y\,dx)}{\int_{-2\text{ pies}}^{2\text{ pies}} y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-2\text{ pies}}^{2\text{ pies}} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx}{\int_{-2\text{ pies}}^{2\text{ pies}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx} = \frac{4/3}{\pi} = 0.424 \text{ pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

### SOLUCIÓN II

**Elemento diferencial.** Se considerará el elemento diferencial rectangular sombreado en gris de grosor $dy$ y ancho $2x$, paralelo al eje $x$, figura 9-13*b*.

**Área y brazos de momento.** El área es $dA = 2x\,dy$, y su centroide está en $\tilde{x} = 0$ y $\tilde{y} = y$.

**Integración.** Si aplicamos la segunda de las ecuaciones 9-4 con $x = 2\sqrt{1 - y^2}$, tenemos

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ pie}} y(2x\,dy)}{\int_0^{1\text{ pie}} 2x\,dy} = \frac{\int_0^{1\text{ pie}} 4y\sqrt{1 - y^2}\,dy}{\int_0^{1\text{ pie}} 4\sqrt{1 - y^2}\,dy} = \frac{4/3}{\pi} \text{ pie} = 0.424 \text{ pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

9

## EJEMPLO 9.7

Localice el centroide $\bar{y}$ para el paraboloide de revolución que se muestra en la figura 9-14.

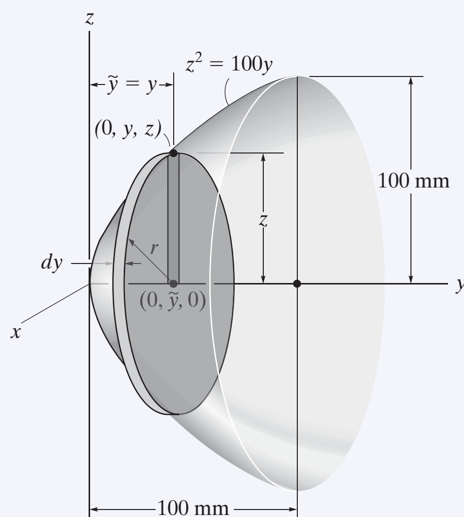



**Fig. 9-14**

### SOLUCIÓN

**Elemento diferencial.** Se selecciona un elemento con la forma de un *disco delgado*. Este elemento tiene un espesor $dy$ e interseca la curva generatriz en el *punto arbitrario* $(0, y, z)$ por lo que su radio es $r = z$.

**Volumen y brazo de momento.** El volumen del elemento es $dV = (\pi z^2)\, dy$, y su centroide está ubicado en $\tilde{y} = y$.

**Integración.** Al aplicar la segunda de las ecuaciones 9-3, e integrar con respecto a $y$ resulta

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{100\text{ mm}} y(\pi z^2)\, dy}{\int_0^{100\text{ mm}} (\pi z^2)\, dy} = \frac{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y^2\, dy}{100\pi \int_0^{100\text{ mm}} y\, dy} = 66.7\text{ mm} \qquad \textit{\textbf{Resp.}}$$

9

## EJEMPLO 9.8

Determine la ubicación del centro de masa del cilindro que se muestra en la figura 9-15 si su densidad varía directamente con la distancia desde su base, es decir, $\rho = 200z$ kg/m$^3$.

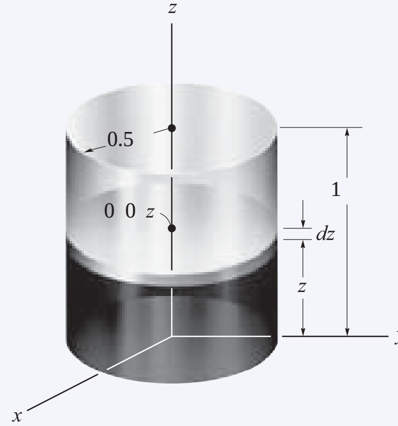



**Fig. 9-15**

### SOLUCIÓN

Por razones de simetría del material,

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$ ***Resp.***

**Elemento diferencial.** Para realizar la integración se elige un elemento en forma de disco, con radio de 0.5 m y espesor $dz$, figura 9-15, ya que la *densidad de todo el elemento es constante* para un valor dado de $z$. El elemento se localiza a lo largo del eje $z$ en el *punto arbitrario* (0, 0, $z$).

**Volumen y brazo de momento.** El volumen del elemento es $dV = \pi(0.5)^2\,dz$, y su centroide se localiza en $\tilde{z} = z$.

**Integraciones.** Con una ecuación similar a la tercera de las ecuaciones 9-2 e integrar con respecto a $z$, observamos que $\rho = 200z$, y tenemos

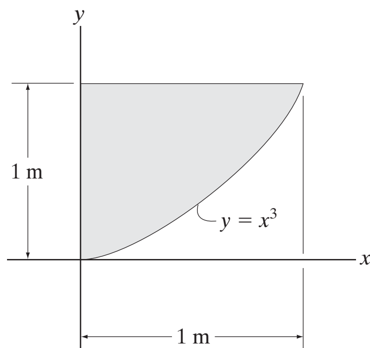
$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} z(200z)\left[\pi(0.5)^2\,dz\right]}{\int_0^{1\text{ m}} (200z)\pi(0.5)^2\,dz}$$

$$= \frac{\int_0^{1\text{ m}} z^2\,dz}{\int_0^{1\text{ m}} z\,dz} = 0.667\text{ m}$$ ***Resp.***

9

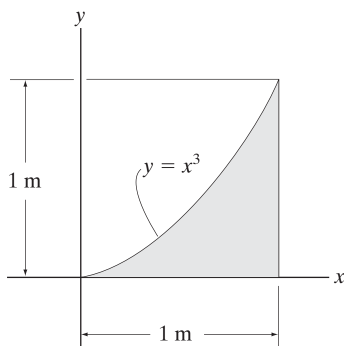
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F9-1.** Determine el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área sombreada.



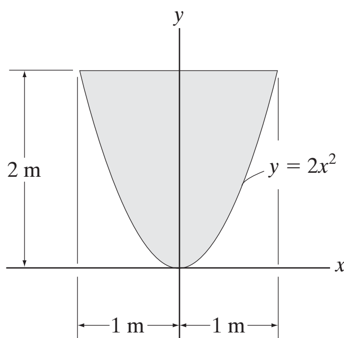

**F9-1**

**F9-2.** Determine el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área sombreada.



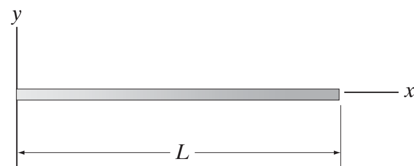

**F9-2**

**F9-3.** Determine el centroide $\bar{y}$ del área sombreada.



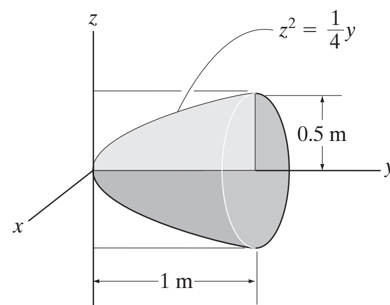

**F9-3**

**F9-4.** Localice el centro de masa $\bar{x}$ de la barra recta si su masa por unidad de longitud está dada por $m = m_0(1 + x^2/L^2)$.



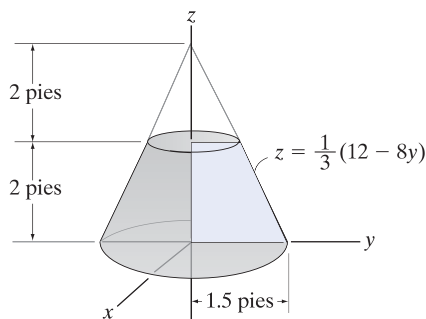

**F9-4**

**F9-5.** Localice el centroide $\bar{y}$ del sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada (gris claro) con respecto al eje $y$.




**F9-5**

**F9-6.** Localice el centroide $\bar{z}$ del sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada en azul con respecto al eje $z$.

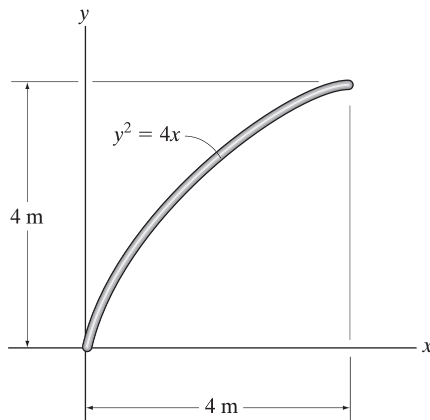



**F9-6**

9

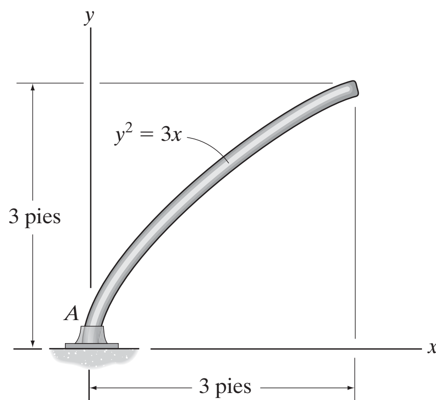
# PROBLEMAS

**•9-1.** Determine la masa y la ubicación del centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ de la barra uniforme con forma parabólica. La masa por unidad de longitud de la barra es 2 kg/m.



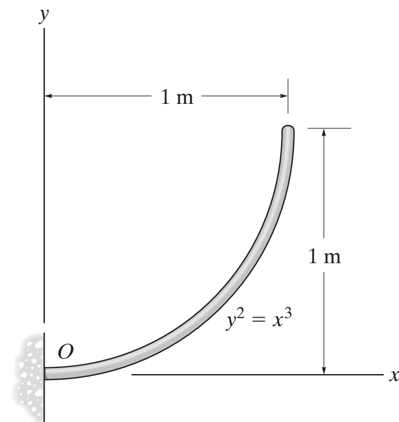

**Prob. 9-1**

**9-2.** La barra uniforme está doblada en forma de una parábola y tiene un peso por unidad de longitud de 6 lb/pie. Determine las reacciones en el soporte fijo $A$.



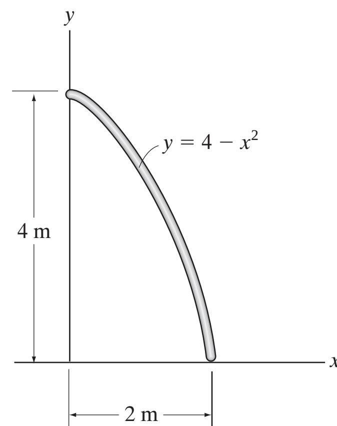

**Prob. 9-2**

**9-3.** Determine la distancia $\overline{x}$ hasta el centro de masa de la barra homogénea doblada en la forma que se muestra. Si la barra tiene una masa por unidad de longitud de 0.5 kg/m, determine las reacciones en el soporte fijo $O$.



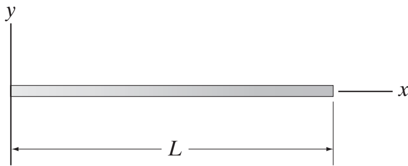

**Prob. 9-3**

***9-4.** Determine la masa y localice el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ de la barra uniforme. La masa por unidad de longitud de la barra es 3 kg/m.



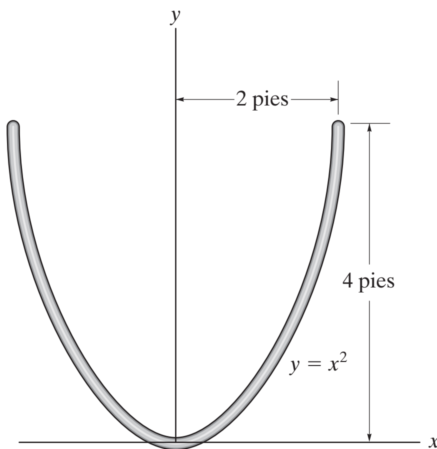

**Prob. 9-4**

**•9-5.** Determine la masa y la ubicación del centro de masa $\bar{x}$ de la barra si su masa por unidad de longitud es $m = m_0(1 + x/L)$.



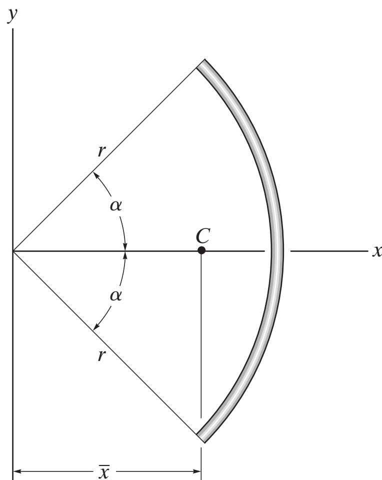

**Prob. 9-5**

**9-6.** Determine la ubicación $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide del cable.



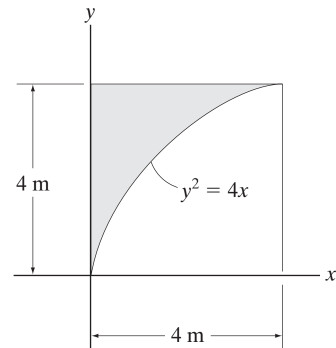

**Prob. 9-6**

**9-7.** Localice el centroide $\bar{x}$ de la barra circular. Exprese la respuesta en términos del radio $r$ y el ángulo $\alpha$ del medio arco.



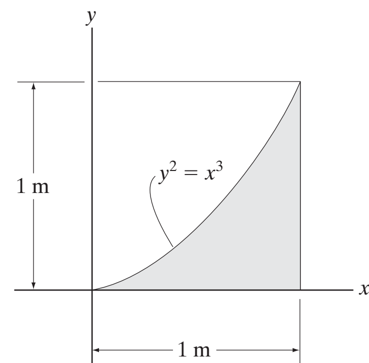

**Prob. 9-7**

***9-8.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.



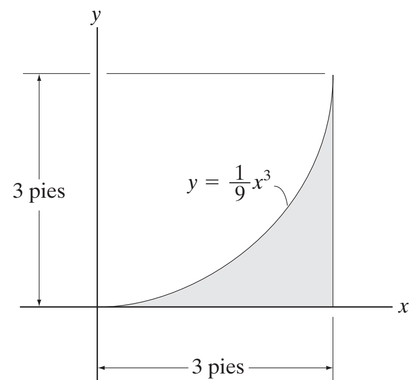

**Prob. 9-8**

**•9-9.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.




**Prob. 9-9**

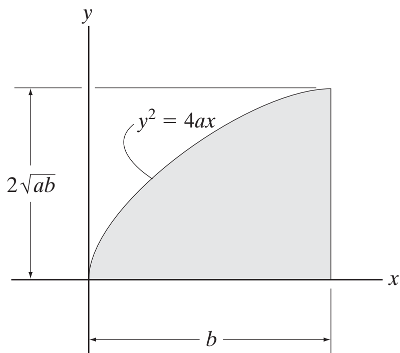
**9-10.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.




**Prob. 9-10**

9

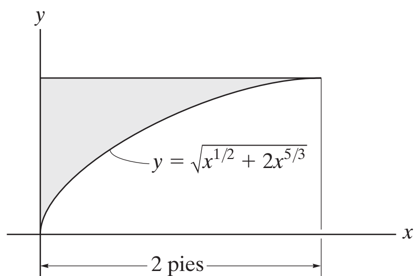
**9-11.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.




**Prob. 9-11**

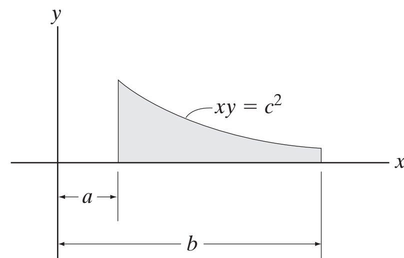
*■**9-12.** Localice el centroide $\bar{x}$ del área.

•■**9-13.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área.



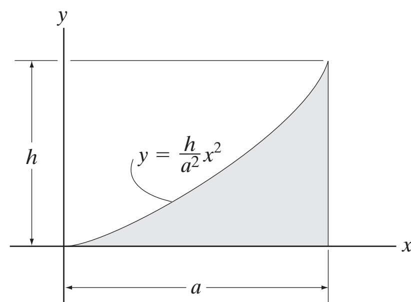

**Probs. 9-12/13**

**9-14.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.



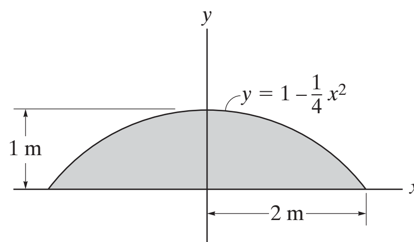

**Prob. 9-14**

**9-15.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.



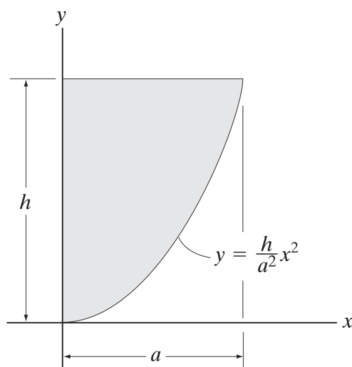

**Prob. 9-15**

***9-16.** Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.



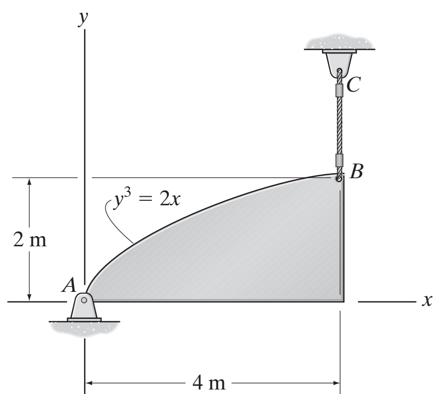

**Prob. 9-16**

**•9-17.** Determine el área y el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ del área.



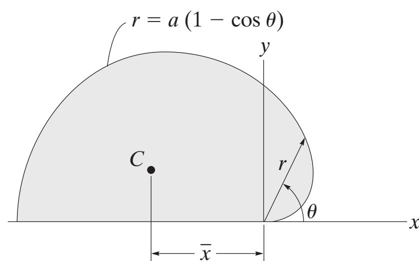

**Prob. 9-17**

**9-18.** La placa está hecha de acero que tiene una densidad de 7850 kg/m$^3$. Si el espesor de la placa es de 10 mm, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la tensión en el cable $BC$.



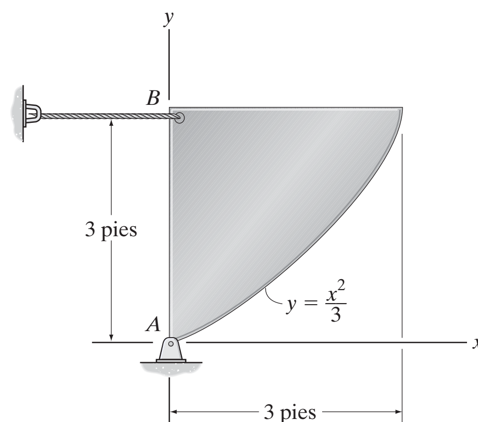

**Prob. 9-18**

**9-19.** Determine la ubicación $\overline{x}$ del centroide $C$ de la porción superior del cardioide, $r = a(1 - \cos\theta)$.



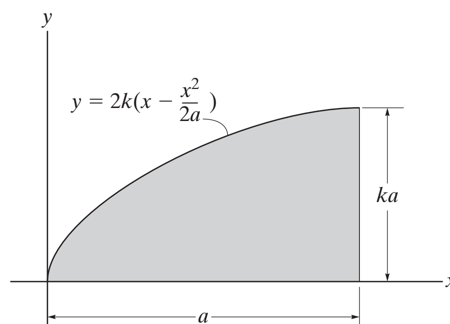

**Prob. 9-19**

***9-20.** La placa tiene un espesor de 0.5 pulg y está hecha de acero que tiene un peso específico de 490 lb/pie$^3$. Determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador $A$ y la fuerza en la cuerda en $B$.




**Prob. 9-20**

**•9-21.** Localice el centroide $\overline{x}$ del área sombreada.

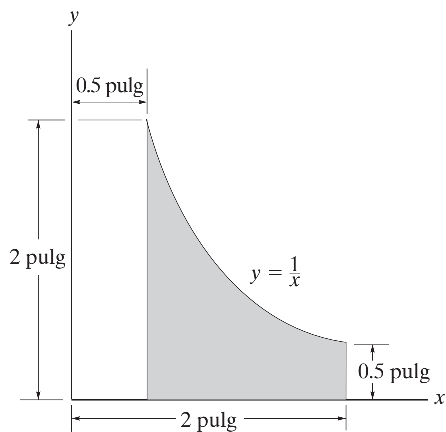



**Prob. 9-21**

9

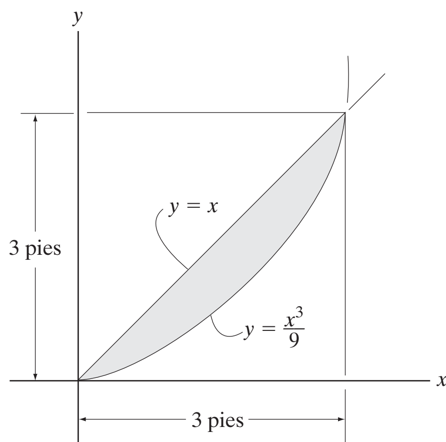
**9-22.** Localice el centroide $\bar{x}$ del área.

**9-23.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área.



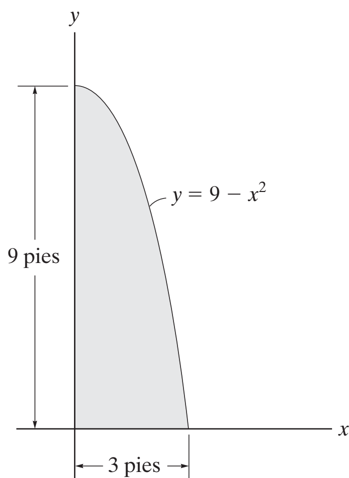

**Probs. 9-22/23**

•**9-25.** Determine el área y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.




**Prob. 9-25**

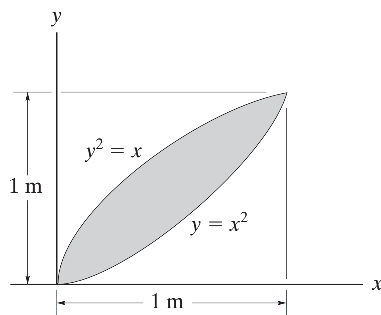
***9-24.** Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.




**Prob. 9-24**

**9-26.** Localice el centroide $\bar{x}$ del área.

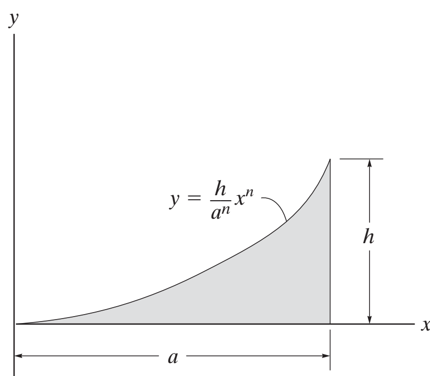
**9-27.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área.




**Probs. 9-26/27**

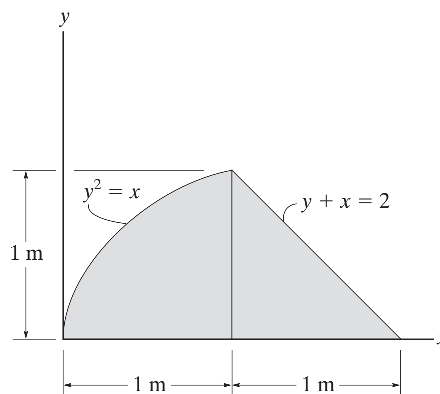
*__9-28.__ Localice el centroide $\overline{x}$ del área.

•__9-29.__ Localice el centroide $\overline{y}$ del área.



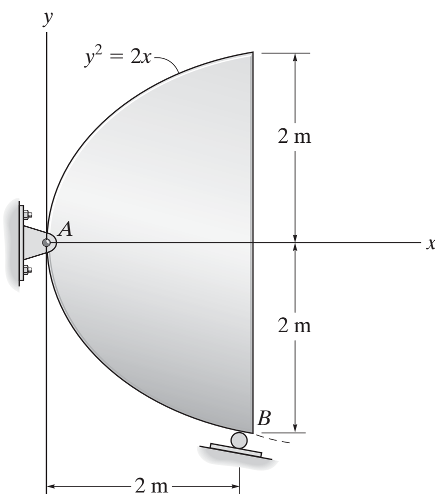

**Probs. 9-28/29**

**9-31.** Localice el centroide del área. *Sugerencia:* elija elementos de espesor $dy$ y longitud $[(2 - y) - y^2]$.




**Prob. 9-31**

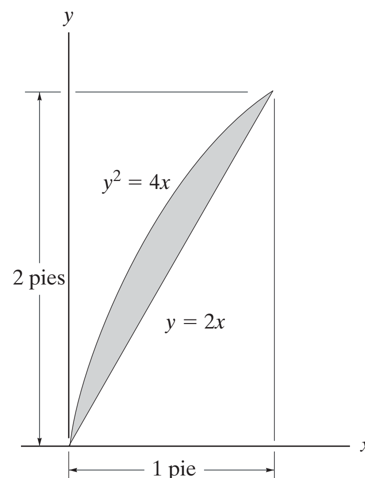
**9-30.** La placa de acero tiene un espesor de 0.3 m y una densidad de 7850 kg/m$^3$. Determine la ubicación de su centro de masa. También determine las reacciones horizontal y vertical en el pasador y la reacción en el soporte de rodillo. *Sugerencia:* la fuerza normal en $B$ es perpendicular a la tangente en $B$, que se encuentra a partir de $\tan \theta = dy/dx$.




**Prob. 9-30**

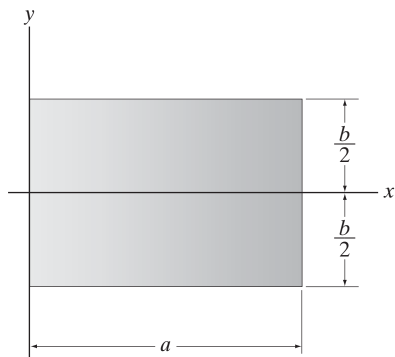
*__9-32.__ Localice el centroide $\overline{x}$ del área.

•__9-33.__ Localice el centroide $\overline{y}$ del área.



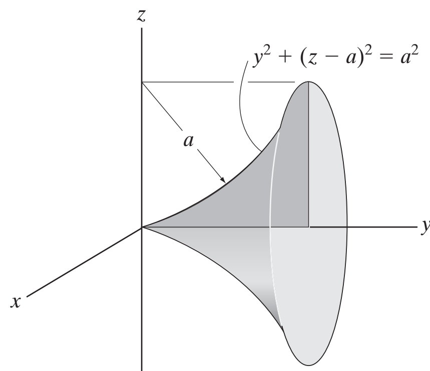

**Probs. 9-32/33**

**9-34.** Si la densidad en cualquier punto de la placa rectangular está definida por $\rho = \rho_0(1 + x/a)$, donde $\rho_0$ es una constante, determine la masa y localice el centro de masa $\overline{x}$ de la placa. La placa tiene un espesor $t$.




**Prob. 9-34**

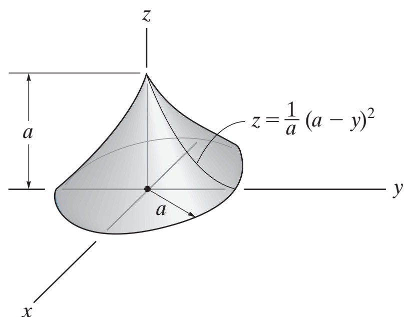
**9-35.** Localice el centroide $\overline{y}$ del sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje $y$.




**Prob. 9-35**

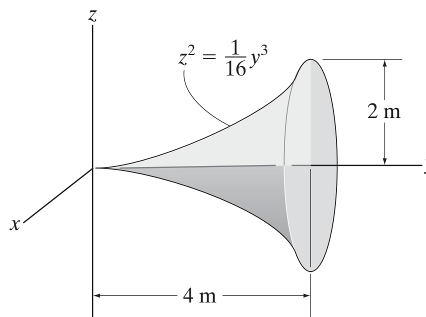


***9-36.** Localice el centroide $\overline{z}$ del sólido.



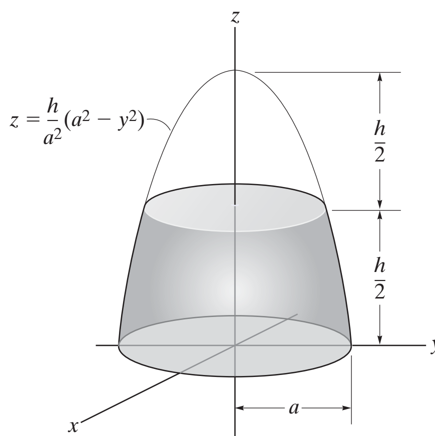

**Prob. 9-36**

**•9-37.** Localice el centroide $\overline{y}$ del sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje $y$.



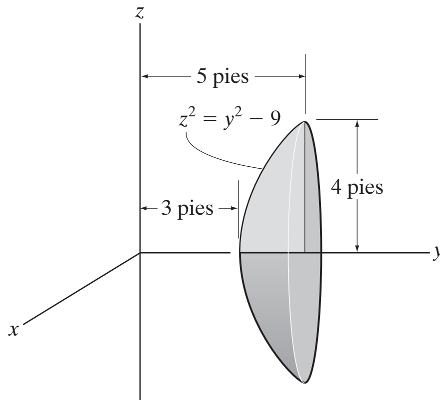

**Prob. 9-37**

**9-38.** Localice el centroide $\overline{z}$ del paraboloide truncado sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje $z$.



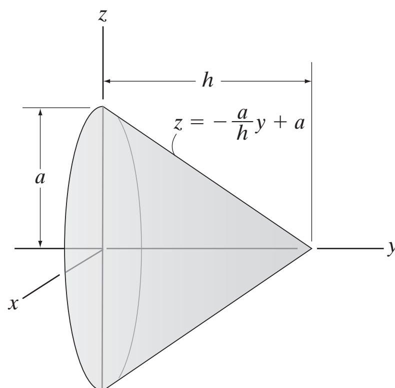

**Prob. 9-38**

**9-39.** Localice el centroide $\overline{y}$ del sólido homogéneo que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $y$.



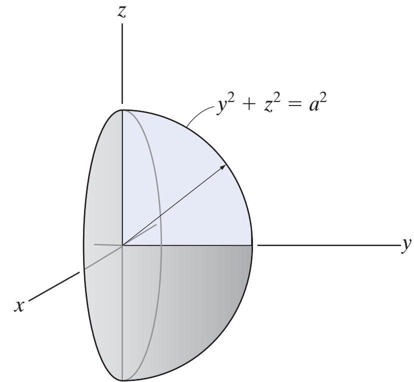

**Prob. 9-39**

***9-40.** Localice el centro de masa $\overline{y}$ del cono circular que se forma al girar el área sombreada alrededor del eje $y$. La densidad en cualquier punto del cono se define mediante $\rho = (\rho_0/h)y$, donde $\rho_0$ es una constante.



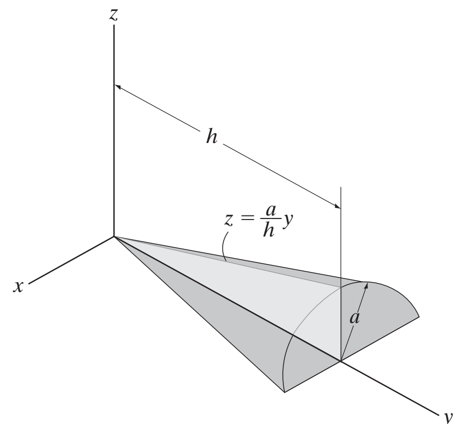

**Prob. 9-40**

**•9-41.** Determine la masa y localice el centro de masa $\overline{y}$ de la semiesfera que se forma al girar el área en azul alrededor del eje $y$. La densidad en cualquier punto de la semiesfera se define mediante $\rho = \rho_0(1 + y/a)$, donde $\rho_0$ es una constante.



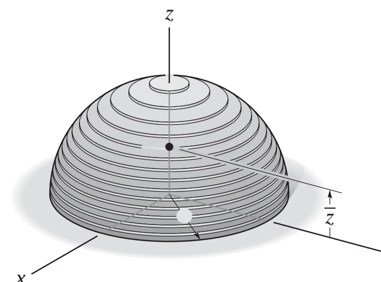

**Prob. 9-41**

**9-42.** Determine el volumen y localice el centroide $(\overline{y}, \overline{z})$ de la cuña cónica homogénea.




**Prob. 9-42**

**9-43.** La semiesfera de radio $r$ está hecha con una pila de placas tan delgadas que la densidad varía con la altura, $\rho = kz$, donde $k$ es una constante. Determine su masa y la distancia $\overline{z}$ al centro de masa $G$.




**Prob. 9-43**

## 9.2 Cuerpos compuestos

Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos "más simples" conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. Un cuerpo de este tipo a menudo puede ser seccionado o dividido en sus partes componentes y, si se conocen el *peso* y la ubicación de cada una de esas partes, es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo. El método para hacer esto sigue el mismo procedimiento delineado en la sección 9.1. Se obtienen fórmulas análogas a las ecuaciones 9-1; sin embargo, en vez de tomar un número infinito de pesos diferenciales, tenemos un número finito de pesos. Por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \qquad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W} \tag{9-6}$$

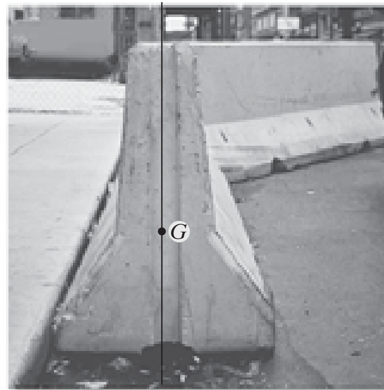
Aquí

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad $G$ del cuerpo compuesto.

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad de cada parte componente del cuerpo.

$\Sigma W$ es la suma de los pesos de todas las partes componentes del cuerpo, o simplemente el peso total del cuerpo.

Cuando el cuerpo tiene *densidad o peso específico constantes*, el centro de gravedad *coincide* con el centroide del cuerpo. El centroide para líneas, áreas y volúmenes compuestos puede encontrarse con relaciones análogas a las ecuaciones 9-6; sin embargo, a las $W$ las reemplazan las $L'$, $A'$ y $V'$, respectivamente. Los centroides para formas comunes de líneas, áreas, cascarones y volúmenes, que a menudo constituyen un cuerpo compuesto, están dados en la tabla que se muestra en la cubierta posterior interna de este libro.




A fin de determinar la fuerza requerida para voltear esta barrera de concreto, es necesario encontrar primero la ubicación de su centro de gravedad $G$. Por la simetría, $G$ descansará en el eje de simetría vertical.

9

## Procedimiento para el análisis

La ubicación del centro de gravedad de un cuerpo o el centroide de un objeto geométrico compuesto representado por una línea, área o un volumen, puede ser determinada por el siguiente procedimiento.

**Partes compuestas.**

- Mediante un croquis, divida el cuerpo u objeto en un número finito de partes componentes que tengan formas más simples.
- Si una parte componente tiene un *agujero*, o una región geométrica que no contenga material, entonces considérela sin el agujero y a éste como una parte componente *adicional* con peso o tamaño *negativos*.

**Brazos de momento.**

- Establezca los ejes coordenados sobre el croquis y determine las coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ del centro de gravedad o centroide de cada parte.

**Sumatorias.**

- Determine $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ por la aplicación de las ecuaciones del centro de gravedad, las ecuaciones 9-6, o las ecuaciones análogas del centroide.
- Si un objeto es *simétrico* con respecto a un eje, su centroide se encuentra sobre este eje.

Si se desea, los cálculos pueden arreglarse en forma tabular, como se indica en los siguientes tres ejemplos.



El centro de gravedad de este tanque de agua puede determinarse al dividirlo en partes componentes para después aplicar las ecuaciones 9-6.

## EJEMPLO 9.9

Localice el centroide del alambre que se muestra en la figura 9-16*a*.

### SOLUCIÓN

**Partes componentes.** El alambre está dividido en tres segmentos como se muestra en la figura 9-16*b*.

**Brazos de momento.** La ubicación del centroide para cada segmento se determina e indica en la figura. En particular, el centroide del segmento (1) está determinado por integración o por la tabla que aparece en la cubierta posterior interna.

**Sumatorias.** Por conveniencia, los cálculos pueden tabularse de la siguiente manera:

| Segmento | $L$ (mm) | $\tilde{x}$ (mm) | $\tilde{y}$ (mm) | $\tilde{z}$ (mm) | $\tilde{x}L$ (mm$^2$) | $\tilde{y}L$ (mm$^2$) | $\tilde{z}L$ (mm$^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\pi(60) = 188.5$ | 60 | −38.2 | 0 | 11 310 | −7200 | 0 |
| 2 | 40 | 0 | 20 | 0 | 0 | 800 | 0 |
| 3 | 20 | 0 | 40 | −10 | 0 | 800 | −200 |
| | $\Sigma L = 248.5$ | | | | $\Sigma\tilde{x}L = 11\,310$ | $\Sigma\tilde{y}L = -5600$ | $\Sigma\tilde{z}L = -200$ |

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11\,310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

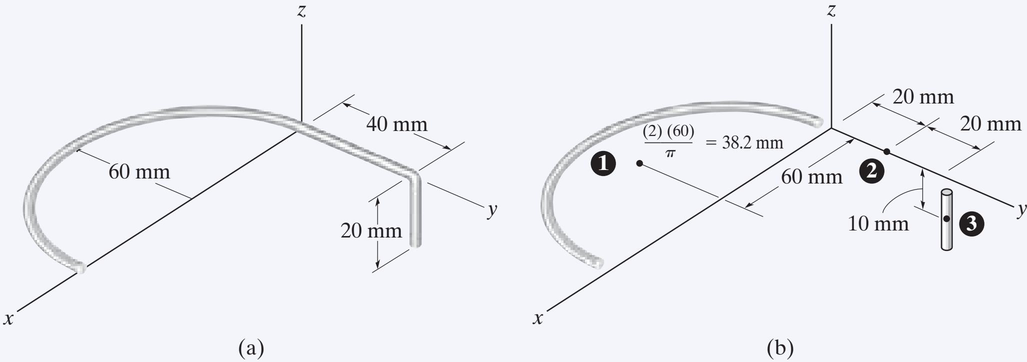



**Fig. 9-16**

## EJEMPLO 9.10

Localice el centroide del área de la placa que se muestra en la figura 9-17*a*.

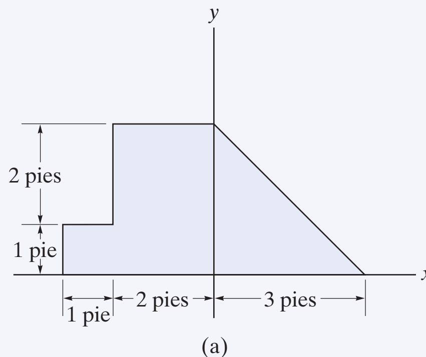
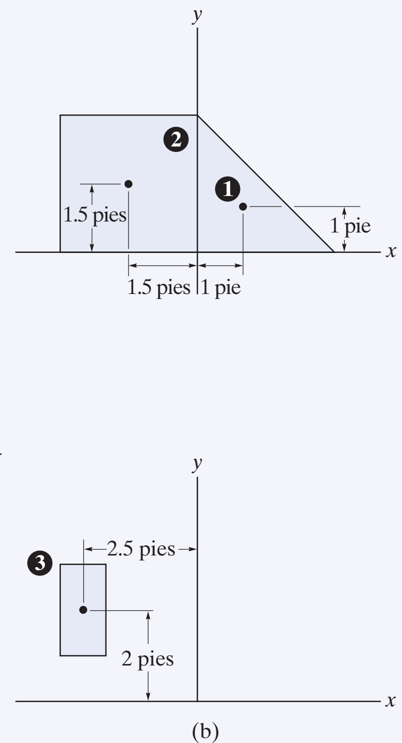



**Fig. 9-17**

### SOLUCIÓN

**Partes compuestas.** La placa está dividida en tres segmentos como se muestra en la figura 9-17*b*. Aquí el área del rectángulo pequeño ③ se considera "negativa", puesto que se debe restar del rectángulo más grande ②.




**Brazos de momento.** El centroide de cada segmento se localiza del modo que se indica en la figura. Observe que las coordenadas $\tilde{x}$ de ② y ③ son *negativas*.

**Sumatorias.** Con los datos de la figura 9-17*b*, los cálculos se tabulan de la siguiente manera:

| Segmento | $A$ (pie$^2$) | $\tilde{x}$ (pie) | $\tilde{y}$ (pie) | $\tilde{x}A$ (pie$^3$) | $\tilde{y}A$ (pie$^3$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$ | 1 | 1 | 4.5 | 4.5 |
| 2 | $(3)(3) = 9$ | $-1.5$ | 1.5 | $-13.5$ | 13.5 |
| 3 | $-(2)(1) = -2$ | $-2.5$ | 2 | 5 | $-4$ |
| | $\Sigma A = 11.5$ | | | $\Sigma\tilde{x}A = -4$ | $\Sigma\tilde{y}A = 14$ |

Por consiguiente,

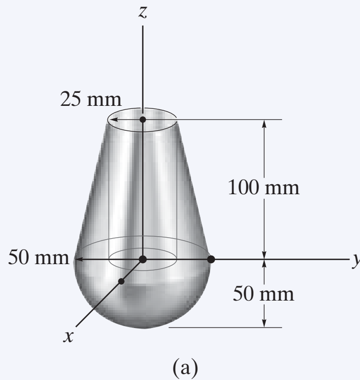
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ pie} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ pies} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** si estos resultados se grafican en la figura 9-17, la ubicación del punto $C$ parece razonable.

9

## EJEMPLO 9.11




(a)

**Fig. 9-18**

Localice el centro de masa del ensamble que se muestra en la figura 9-18*a*. La densidad del cono truncado es $\rho_c = 8\ \text{Mg/m}^3$, y la de la semiesfera es $\rho_h = 4\ \text{Mg/m}^3$. En el centro del cono truncado hay un agujero cilíndrico de radio igual a 25 mm.

### SOLUCIÓN

**Partes compuestas.** Puede considerarse que el ensamble que se muestra consiste en cuatro segmentos como se indica en la figura 9-18*b*. Para los cálculos, ③ y ④ deben considerarse como volúmenes "negativos" para que los cuatro segmentos, al sumarse, resulten en la forma total compuesta que se aprecia en la figura 9-18*a*.

**Brazo de momento.** Con la tabla de la cubierta posterior interna, los cálculos para el centroide $\tilde{z}$ de cada pieza se muestran en la figura.

**Sumatorias.** Debido a la *simetría*, observe que

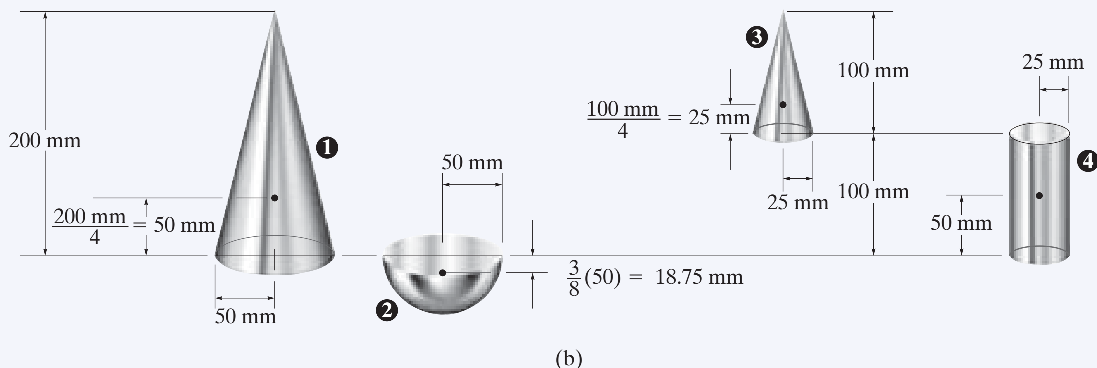
$$\bar{x} = \bar{y} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como $W = mg$, y $g$ es constante, la tercera de las ecuaciones 9-6 toma la forma $\bar{z} = \Sigma\tilde{z}m/\Sigma m$. La masa de cada pieza puede calcularse a partir de $m = \rho V$ y usarse en los cálculos. Además, $1\ \text{Mg/m}^3 = 10^{-6}\ \text{kg/mm}^3$, de manera que

| Segmento | $m$ (kg) | $\tilde{z}$(mm) | $\tilde{z}m$ (kg · mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | $8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(50)^2(200) = 4.189$ | 50 | 209.440 |
| 2 | $4(10^{-6})\left(\frac{2}{3}\right)\pi(50)^3 = 1.047$ | $-18.75$ | $-19.635$ |
| 3 | $-8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(25)^2(100) = -0.524$ | $100 + 25 = 125$ | $-65.450$ |
| 4 | $-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = -1.571$ | 50 | $-78.540$ |
| | $\Sigma m = 3.142$ | | $\Sigma\tilde{z}m = 45.815$ |

Entonces,

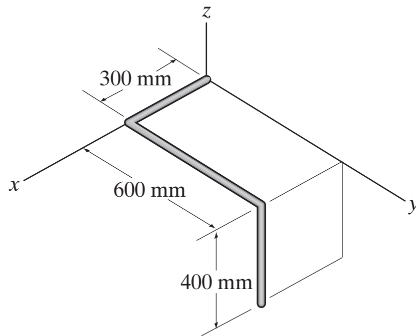
$$\tilde{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.142} = 14.6\ \text{mm} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$




(b)

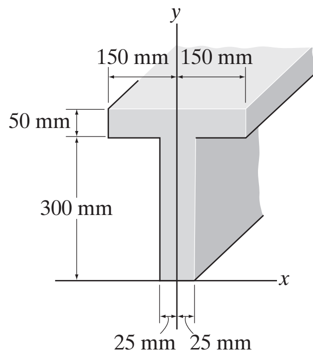
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F9-7.** Localice el centroide ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) del alambre que se dobla en la forma que se muestra.



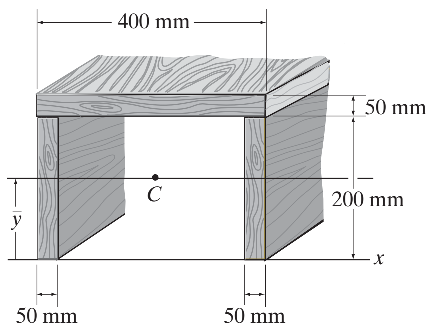

**F9-7**

**F9-8.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de sección transversal de la viga.



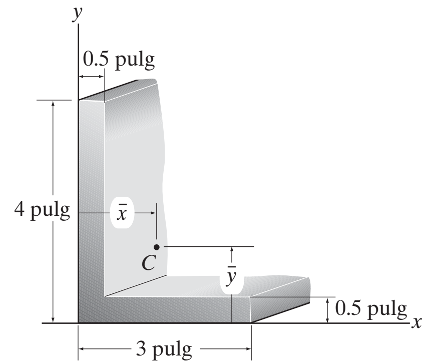

**F9-8**

**F9-9.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de sección transversal de la viga.



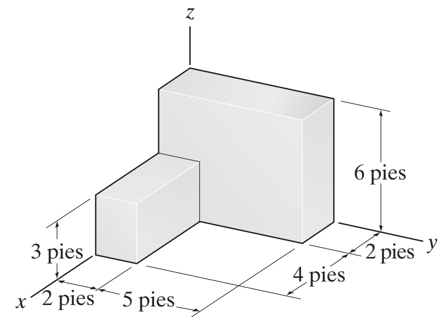

**F9-9**

**F9-10.** Localice el centroide ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del área de sección transversal.



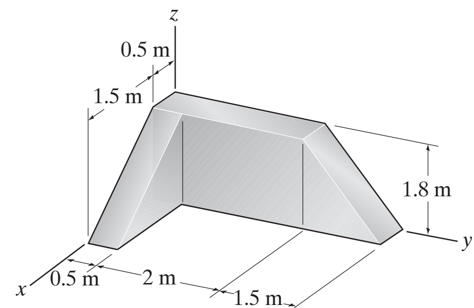

**F9-10**

**F9-11.** Localice el centro de masa ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) del bloque sólido homogéneo.




**F9-11**

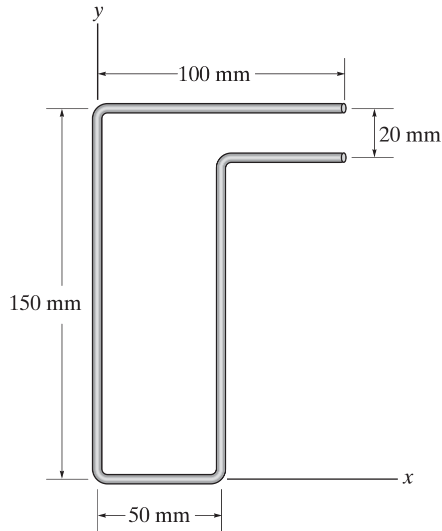
**F9-12.** Localice el centro de masa ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) del bloque sólido homogéneo.




**F9-12**

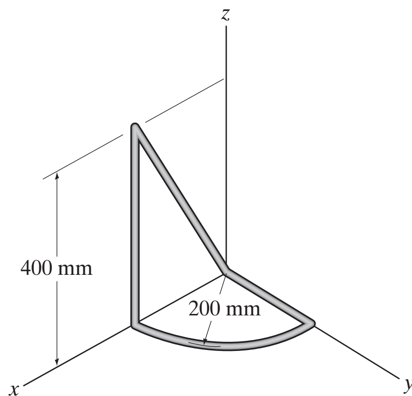
## PROBLEMAS

*9-44. Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del alambre uniforme que se dobla en la forma que se muestra.



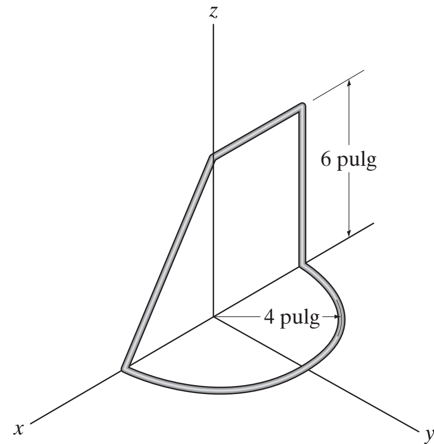

**Prob. 9-44**

•9-45. Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del alambre.



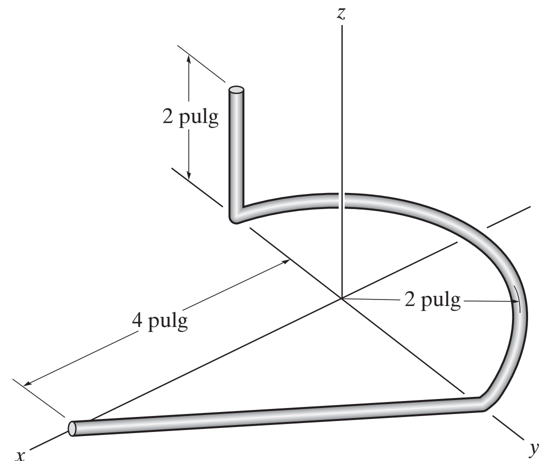

**Prob. 9-45**

9-46. Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del alambre.




**Prob. 9-46**

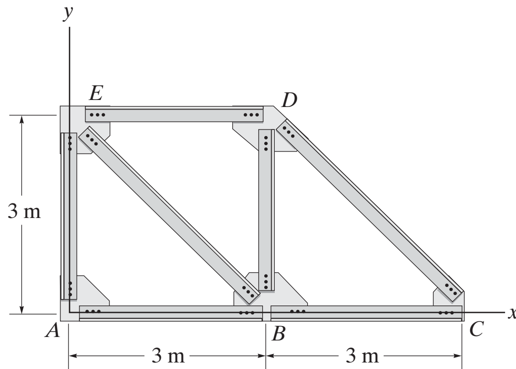
9-47. Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del alambre que se dobla en la forma que se muestra.




**Prob. 9-47**

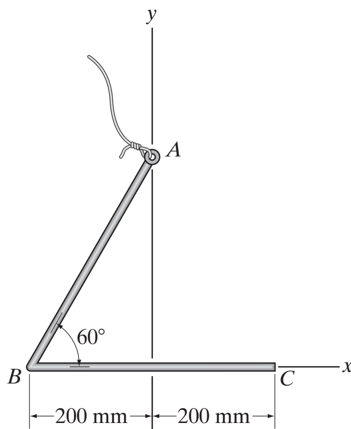
9

*9-48. La armadura está hecha de siete elementos, cada uno de los cuales tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m. Localice la posición ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del centro de masa. Desprecie la masa de las placas de refuerzo en los nodos.



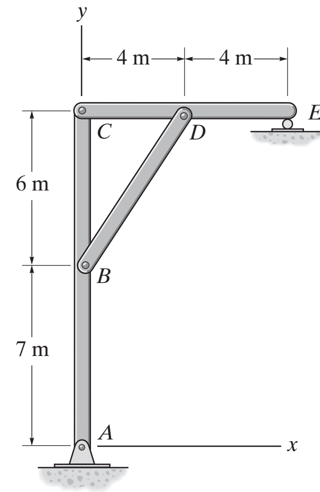

**Prob. 9-48**

•9-49. Localice el centroide ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del alambre. Si el alambre está suspendido de $A$, determine el ángulo que forma el segmento $AB$ con la vertical cuando el alambre se encuentra en equilibrio.



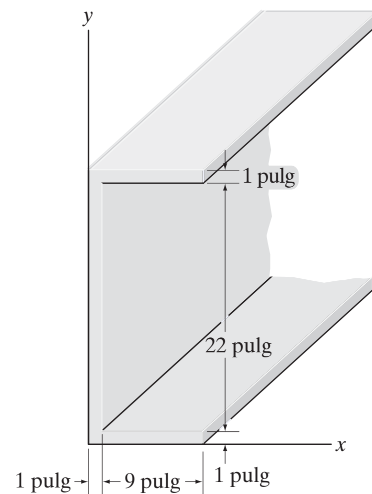

**Prob. 9-49**

9-50. Cada uno de los tres elementos del bastidor tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m. Localice la posición ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del centro de masa. Ignore el tamaño de los pasadores en los nodos y el espesor de los elementos. Además, calcule las reacciones en el pasador $A$ y el rodillo $E$.




**Prob. 9-50**

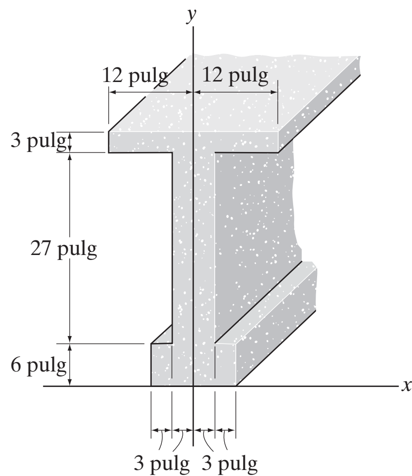
9-51. Localice el centroide ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del área de la sección transversal del canal.




**Prob. 9-51**

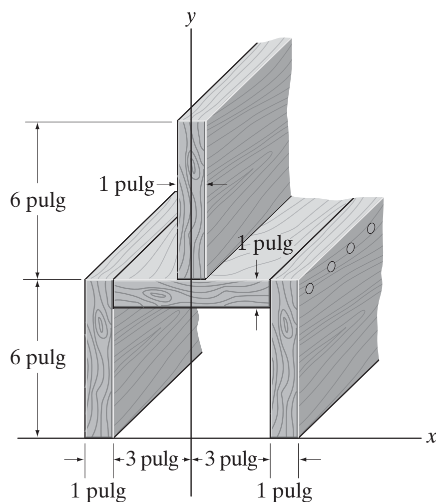
9

***9-52.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de sección transversal de la viga de concreto.



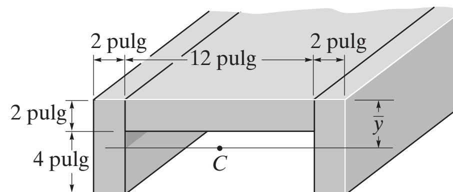

**Prob. 9-52**

**•9-53.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de sección transversal de la viga compuesta.



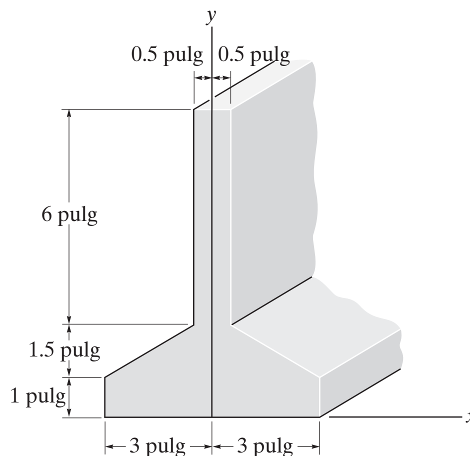

**Prob. 9-53**

**9-54.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de sección transversal del canal.



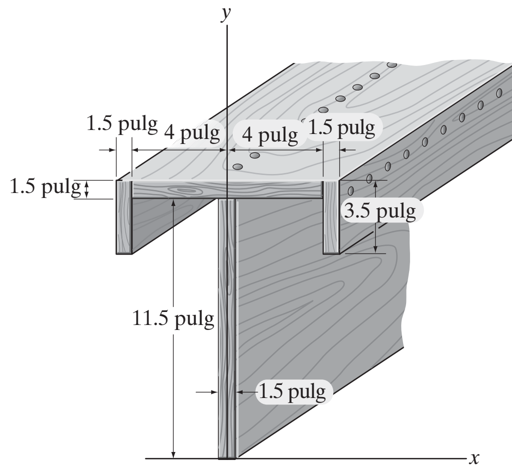

**Prob. 9-54**

**9-55.** Localice la distancia $\bar{y}$ al centroide del área de sección transversal del elemento.



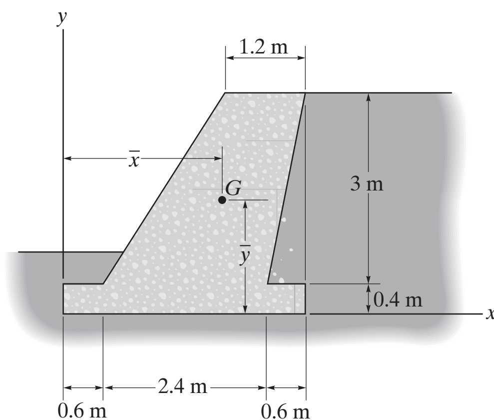

**Prob. 9-55**

***9-56.** Localice el centroide $\overline{y}$ del área de sección transversal de la viga compuesta.



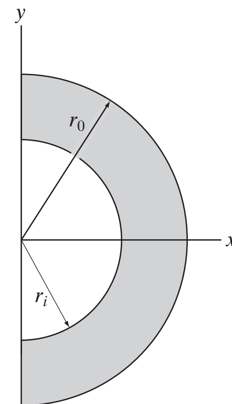

**Prob. 9-56**

**•9-57.** El muro de contención a gravedad está hecho de concreto. Determine la ubicación $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa $G$ para el muro.



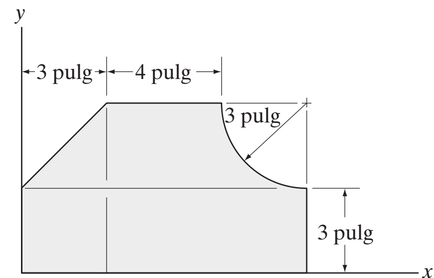

**Prob. 9-57**

**9-58.** Localice el centroide $\overline{x}$ del área compuesta.



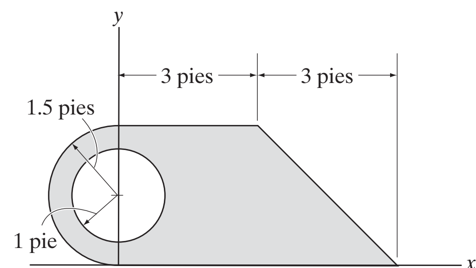

**Prob. 9-58**

**9-59.** Localice el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ del área compuesta.




**Prob. 9-59**

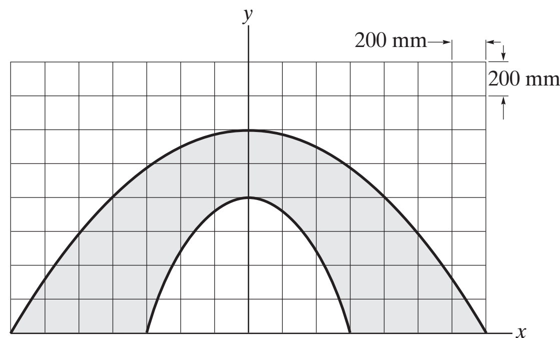
***9-60.** Localice el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ del área compuesta.




**Prob. 9-60**

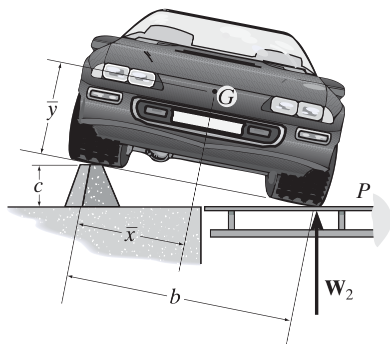
9

•**9-61.** Divida la placa en partes, y con la cuadrícula como herramienta para medir, determine aproximadamente la ubicación $(\overline{x}, \overline{y})$ del centroide de la placa.



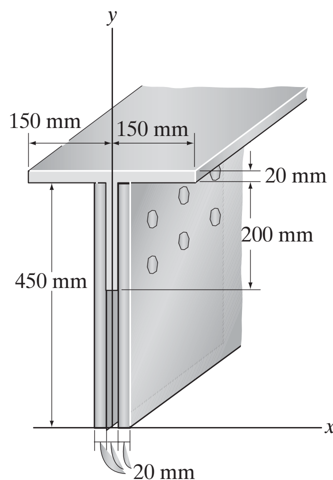

**Prob. 9-61**

**9-62.** Para determinar la ubicación del centro de gravedad del automóvil, éste se coloca primero en una *posición nivelada*, con las dos ruedas de un lado descansando sobre la báscula de plataforma *P*. En esta posición, la báscula registra una lectura de $W_1$. Después, un lado se eleva hasta una altura *c* conveniente como se muestra en la figura. La nueva lectura en la báscula es $W_2$. Si el automóvil tiene un peso total de *W*, determine la ubicación de su centro de gravedad $G(\overline{x}, \overline{y})$.



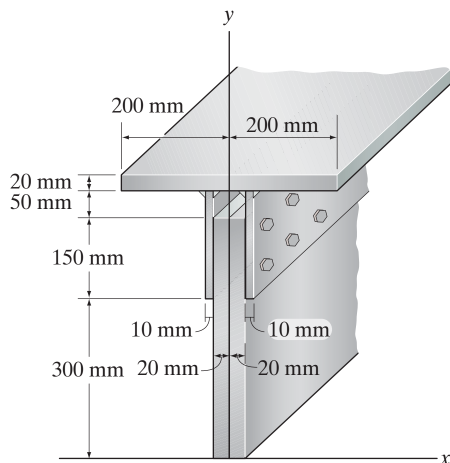

**Prob. 9-62**

**9-63.** Localice el centroide $\overline{y}$ del área de sección transversal de la viga compuesta.



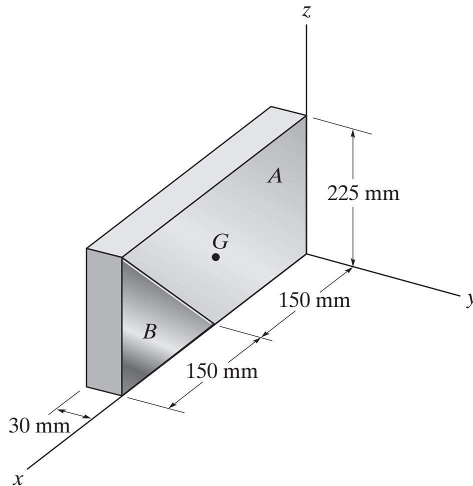

**Prob. 9-63**

***9-64.** Localice el centroide $\overline{y}$ del área de sección transversal de la viga compuesta.



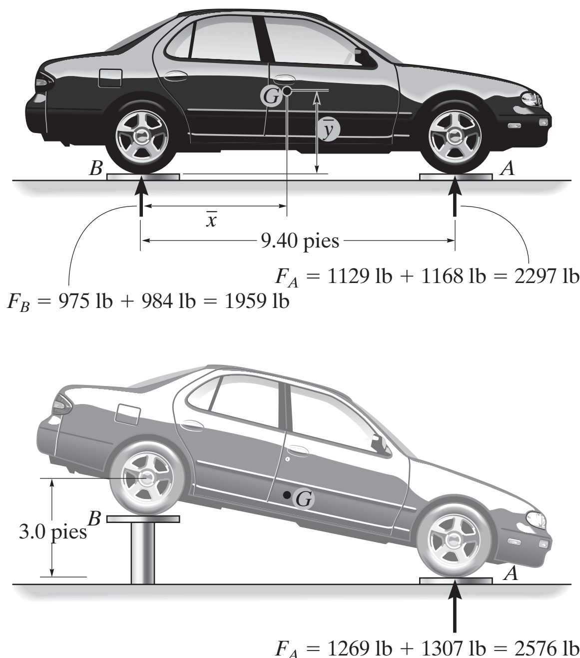

**Prob. 9-64**

**•9-65.** La placa compuesta está hecha de segmentos de acero ($A$) y de latón ($B$). Determine la masa y la ubicación ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) de su centro de masa $G$. Considere $\rho_{ac}$ = 7.85 Mg/m$^3$ y $\rho_{lt}$ = 8.74 Mg/m$^3$.




**Prob. 9-65**

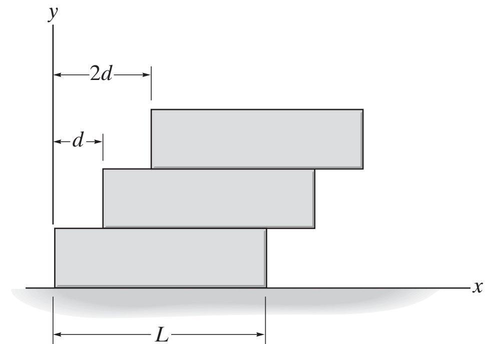
**9-66.** El automóvil descansa sobre cuatro básculas y, en esta posición las lecturas de las básculas de las ruedas traseras y las delanteras son $F_A$ y $F_B$. Cuando las ruedas traseras se elevan a una altura de 3 pies por encima de las básculas delanteras, se registran las nuevas lecturas de las ruedas delanteras. Utilice estos datos para calcular la ubicación $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad $G$ del automóvil. Cada una de las ruedas tiene un diámetro de 1.98 pies.




**Prob. 9-66**

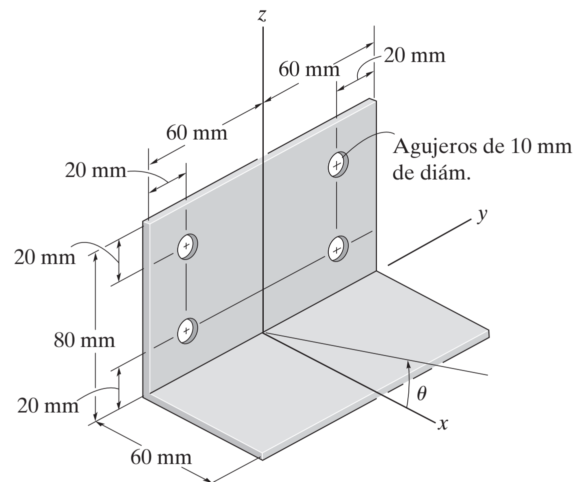
**9-67.** Bloques uniformes que tienen una longitud $L$ y una masa $m$ se apilan uno sobre otro, y cada bloque sobresale una distancia $d$ del anterior, como se muestra en la figura. Si los bloques se pegan, de manera que no se caigan, determine la ubicación $\bar{x}$ del centro de masa de una pila de $n$ bloques.

***9-68.** Bloques uniformes que tienen una longitud $L$ y una masa $m$ se apilan uno sobre otro, y cada bloque sobresale una distancia $d$ del anterior, como se muestra en la figura. Demuestre que la máxima cantidad de bloques que puede apilarse de esta manera es $n < L/d$.




**Probs. 9-67/68**

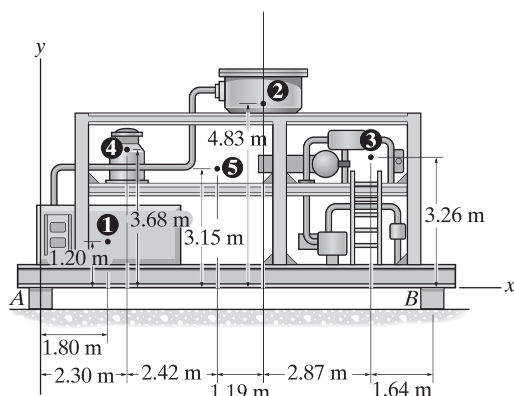
**•9-69.** Localice el centro de gravedad ($\bar{x}$, $\bar{z}$) de la ménsula de lámina metálica, si el material es homogéneo y tiene un espesor constante. Si la ménsula descansa sobre el plano horizontal $x$-$y$ mostrado, determine el ángulo máximo de inclinación $\theta$ que puede tener antes de caer, es decir, antes de comenzar a girar con respecto al eje $y$.




**Prob. 9-69**

9

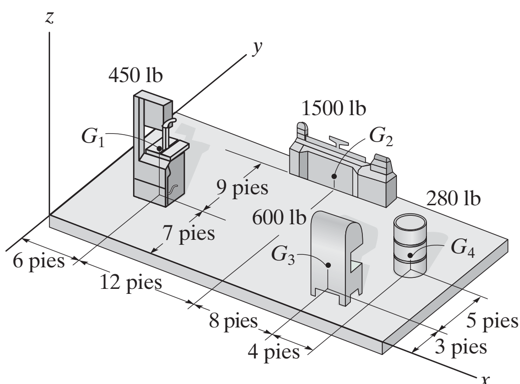
**9-70.** Localice el centro de masa para el ensamble del compresor. Las ubicaciones de los centros de masa de los diferentes componentes y sus masas se indican y tabulan en la figura. ¿Cuáles son las reacciones verticales en los bloques *A* y *B* que se requieren para sostener la plataforma?




| | | |
|---|---|---|
| 1 | Panel de instrumentos | 230 kg |
| 2 | Sistema de filtro | 183 kg |
| 3 | Ensamble de tubería | 120 kg |
| 4 | Almacenamiento líquido | 85 kg |
| 5 | Marco estructural | 468 kg |

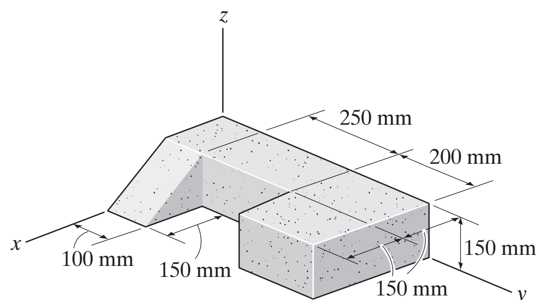
**Prob. 9-70**

**9-71.** Las cargas más importantes en el piso de un taller son causadas por los pesos de los objetos mostrados. Cada fuerza actúa a través de su respectivo centro de gravedad *G*. Localice el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ de todos estos componentes.



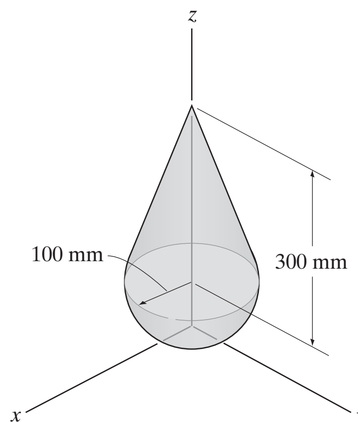

**Prob. 9-71**

***9-72.** Localice el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del ensamble de bloques homogéneos.



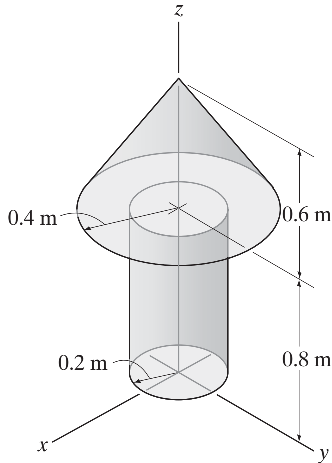

**Prob. 9-72**

**•9-73.** Localice el centro de masa $\bar{z}$ del ensamble. La semiesfera y el cono están hechos de materiales que tienen densidades de 8 $Mg/m^3$ y 4 $Mg/m^3$, respectivamente.




**Prob. 9-73**

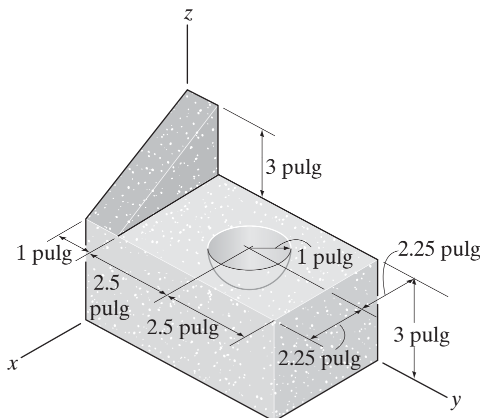
**9-74.** Localice el centro de masa $\overline{z}$ del ensamble. El cilindro y el cono están hechos de materiales que tienen densidades de 5 $Mg/m^3$ y 9 $Mg/m^3$, respectivamente.




**Prob. 9-74**

**9-75.** Localice el centro de gravedad $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del ensamble de bloques homogéneos que tienen un orificio semiesférico.

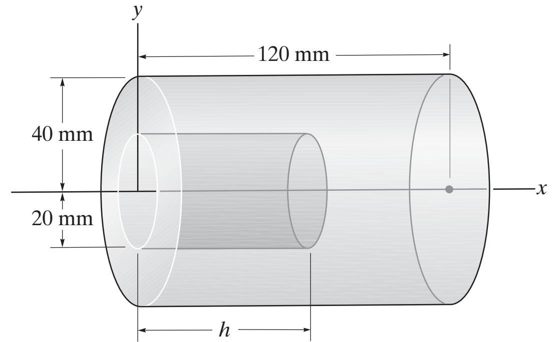
*__9-76.__ Localice el centro de gravedad $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del ensamble. Los bloques triangular y rectangular están hechos de materiales que tienen pesos específicos de 0.25 $lb/pulg^3$ y 0.1 $lb/pulg^3$, respectivamente.




**Probs. 9-75/76**

•**9-77.** Determine la distancia $\overline{x}$ al centroide del sólido que consta de un cilindro con un orificio de longitud $h = 50$ mm perforado en su base.

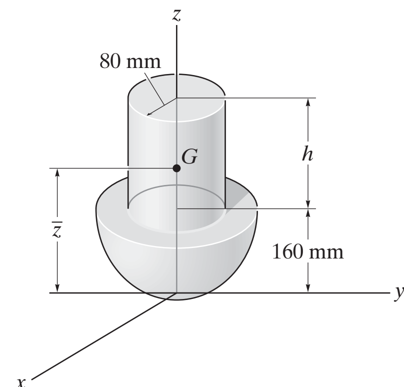
**9-78.** Determine la distancia $h$ hasta la cual debe perforarse un orificio en el cilindro de manera que el centro de masa del ensamble se localice en $\overline{x} = 64$ mm. El material tiene una densidad de 8 $Mg/m^3$.




**Probs. 9-77/78**

**9-79.** El ensamble está hecho de una semiesfera de acero, $\rho_{ac} = 7.80$ $Mg/m^3$ y un cilindro de aluminio $\rho_{al} = 2.70$ $Mg/m^3$. Determine el centro de masa del ensamble si la altura del cilindro es $h = 200$ mm.

*__9-80.__ El ensamble está hecho de una semiesfera de acero, $\rho_{ac} = 7.80$ $Mg/m^3$ y un cilindro de aluminio $\rho_{al} = 2.70$ $Mg/m^3$. Determine la altura $h$ de manera que el centro de masa del ensamble se localice en $\overline{z} = 160$ mm.




**Probs. 9-79/80**

## *9.3 Teoremas de Pappus y Guldinus

Los dos *teoremas de Pappus y Guldinus* se usan para encontrar el área superficial y el volumen de cualquier cuerpo de revolución. Fueron desarrollados primero por Pappus de Alejandría durante el siglo IV a.C. y luego reformulados por el matemático suizo Paul Guldin o Guldinus (1577-1643).

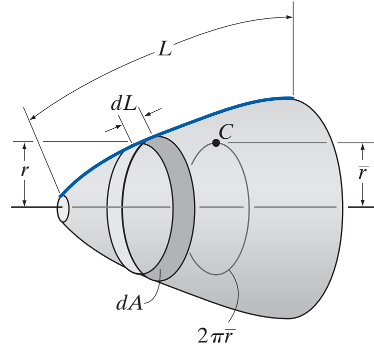



**Fig. 9-19**



La cantidad de material para techo usado en esta construcción de almacenamiento puede estimarse con el primer teorema de Pappus y Guldinus para determinar su área superficial.

**Área superficial.** Si giramos una *curva plana* alrededor de un eje que no interseque la curva, generaremos un área *superficial de revolución*. Por ejemplo, el área superficial de la figura 9-19 se forma al girar la curva de longitud $L$ alrededor del eje horizontal. Para determinar esta área superficial, consideraremos primero el elemento lineal diferencial de longitud $dL$. Si este elemento se gira $2\pi$ radianes alrededor del eje, se generará un anillo con un área superficial de $dA = 2\pi r\, dL$. Así, el área superficial de todo el cuerpo es $A = 2\pi \int r\, dL$. Como $\int r\, dL = \bar{r}L$ (ecuación 9-5), entonces $A = 2\pi\bar{r}L$. Si la curva se gira sólo un ángulo de $\theta$ (radianes), entonces

$$A = \theta\bar{r}L \qquad (9\text{-}7)$$

donde

$A$ = área superficial de revolución

$\theta$ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$

$\bar{r}$ = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

$L$ = longitud de la curva generatriz

Por lo tanto, el primer teorema de Pappus y Guldinus establece que *el área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia viajada por el centroide de la curva al generar el área superficial*.

9

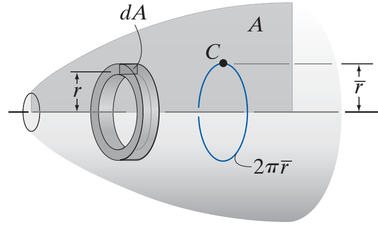



**Fig. 9-20**

**Volumen.** Un *volumen* puede generarse al girar un *área plana* alrededor de un eje que no interseque el área. Por ejemplo, si giramos el área sombreada (gris oscuro) $A$ en la figura 9-20 alrededor del eje horizontal, se genera el volumen mostrado. Este volumen se puede determinar si se gira primero el elemento diferencial de área $dA$ $2\pi$ radianes alrededor del eje, de manera que se genere un anillo con el volumen $dV = 2\pi r\, dA$. Entonces todo el volumen es $V = 2\pi \int r\,dA$. Sin embargo, $\int r\,dA = \bar{r}A$, ecuación 9-4, de modo que $V = 2\pi\bar{r}A$. Si el área sólo se gira a través de un ángulo $\theta$ (radianes), entonces

$$V = \theta \bar{r} A \tag{9-8}$$

donde

$V$ = volumen de revolución o giro

$\theta$ = ángulo de revolución medido en radianes, $\theta \leq 2\pi$

$\bar{r}$ = distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de la curva generatriz

$A$ = área generatriz

Por lo tanto, el segundo teorema de Pappus y Guldinus establece que *el volumen de un cuerpo de revolución es igual al producto del área generatriz y la distancia viajada por el centroide del área al generar el volumen*.

**Formas compuestas.** También podemos aplicar los dos teoremas anteriores a líneas o áreas que están integradas por una serie de partes componentes. En este caso, el área superficial total o el volumen generado es la suma de las áreas superficiales o volúmenes generados por cada una de las partes componentes. Si la distancia perpendicular desde el eje de revolución hasta el centroide de cada parte componente es $\tilde{r}$, entonces

$$A = \theta \Sigma(\tilde{r} L) \tag{9-9}$$

y

$$V = \theta \Sigma(\tilde{r} A) \tag{9-10}$$

En los siguientes ejemplos se ilustra en forma numérica la aplicación de los teoremas anteriores.



El volumen de fertilizante contenido dentro de este silo puede determinarse por el segundo teorema de Pappus y Guldinus.

## EJEMPLO 9.12

Demuestre que el área superficial de una esfera es $A = 4\pi R^2$ y su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

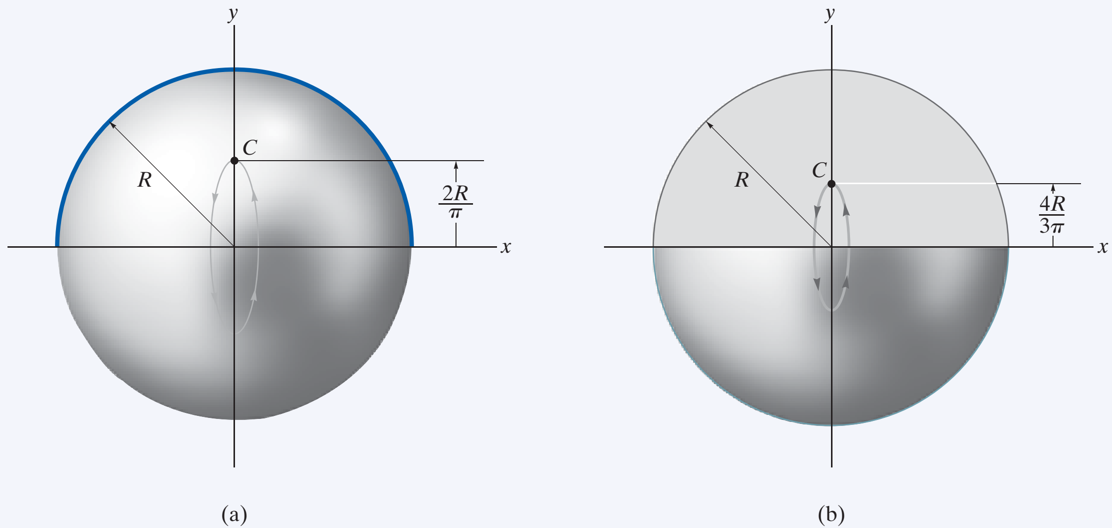



**Fig. 9-21**

### SOLUCIÓN

**Área superficial.** El área superficial de la esfera en la figura 9-21*a* se genera al girar un *arco* semicircular alrededor del eje *x*. Con la tabla de la cubierta posterior interna, se observa que el centroide de este arco se localiza a una distancia $\bar{r} = 2R/\pi$ del eje de revolución (eje $x$). Como el centroide se mueve a través de un ángulo de $\theta = 2\pi$ rad para generar la esfera, entonces al aplicar la ecuación 9-7 tenemos

$$A = \theta \bar{r} L; \qquad A = 2\pi\left(\frac{2R}{\pi}\right)\pi R = 4\pi R^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Volumen.** El volumen de la esfera se genera al girar el *área* semicircular de la figura 9-21*b* alrededor del eje *x*. Con la tabla de la cubierta posterior interna para localizar el centroide del área, es decir, $\bar{r} = 4R/3\pi$, y al aplicar la ecuación 9-8, tenemos

$$V = \theta \bar{r} A; \qquad V = 2\pi\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

9

## EJEMPLO 9.13

Determine el área superficial y el volumen del sólido completo que se muestra en la figura 9-22*a*.

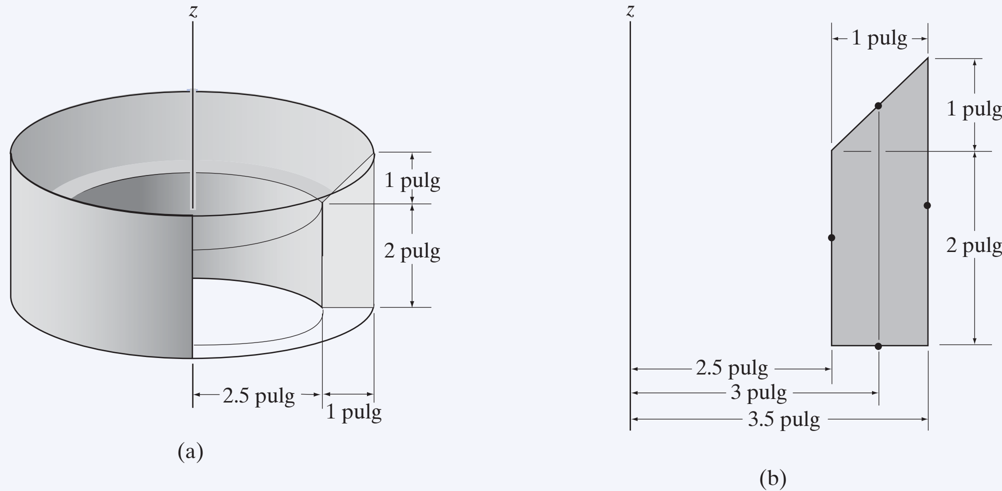



**Fig. 9-22**

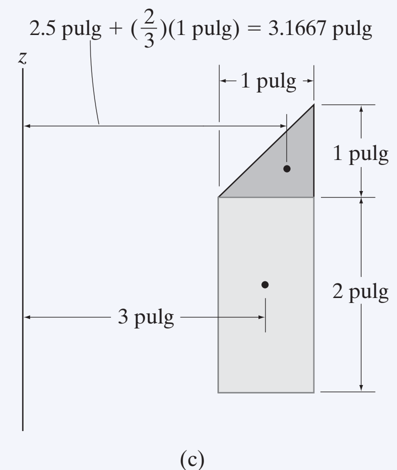
### SOLUCIÓN

**Área superficial.** El área superficial se genera al girar $2\pi$ radianes alrededor del eje $z$ los cuatro segmentos de línea que se muestran en la figura 9-22*b*. Las distancias desde el centroide de cada segmento hasta el eje $z$ también se muestran en la figura. Aplicando la ecuación 9-7, se obtiene

$$A = 2\pi\Sigma\bar{r}L = 2\pi\Big[(2.5\text{ pulg})(2\text{ pulg}) + (3\text{ pulg})\left(\sqrt{(1\text{ pulg})^2 + (1\text{ pulg})^2}\right)$$
$$+ (3.5\text{ pulg})(3\text{ pulg}) + (3\text{ pulg})(1\text{ pulg})\Big]$$
$$= 143\text{ pulg}^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Volumen.** El volumen del sólido se genera al girar los dos segmentos de área que se muestran en la figura 9-22*c*, $2\pi$ radianes alrededor del eje $z$. En la figura también se muestran las distancias desde el centroide de cada segmento hasta el eje $z$. Si aplicamos la ecuación 9-10, tenemos

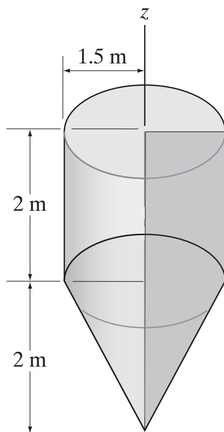
$$V = 2\pi\Sigma\bar{r}A$$
$$= 2\pi\left\{(3.1667\text{ pulg})\left[\frac{1}{2}(1\text{ pulg})(1\text{ pulg})\right] + (3\text{ pulg})[(2\text{ pulg})(1\text{ pulg})]\right\}$$
$$= 47.6\text{ pulg}^3 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$




9

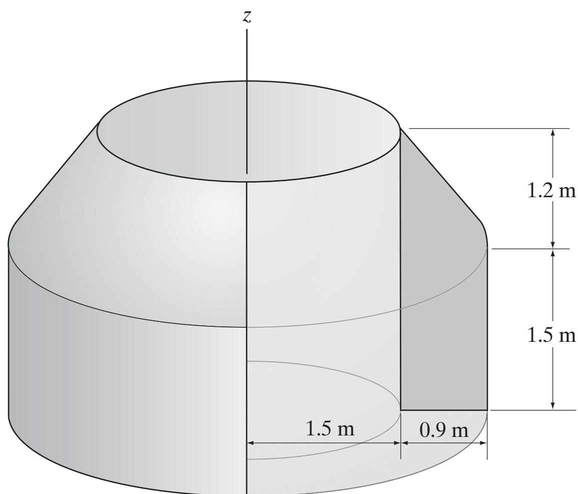
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F9-13.** Determine el área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris oscuro) 360° alrededor del eje $z$.



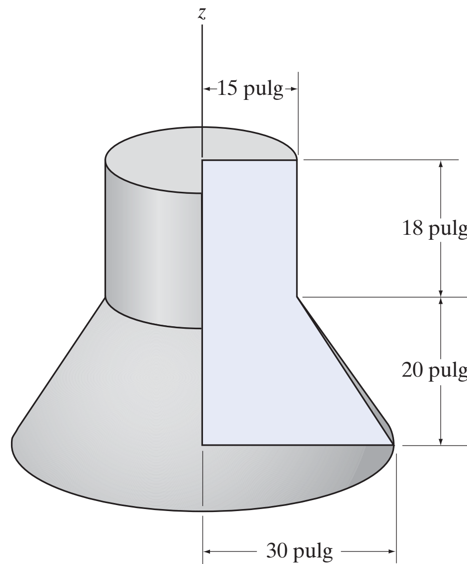

**F9-13**

**F9-14.** Determine el área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris oscuro) 360° alrededor del eje $z$.



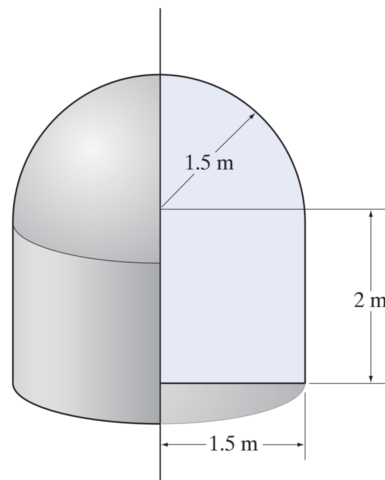

**F9-14**

**F9-15.** Determine el área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área en azul 360° alrededor del eje $z$.




**F9-15**

**F9-16.** Determine el área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área en azul 360° alrededor del eje $z$.

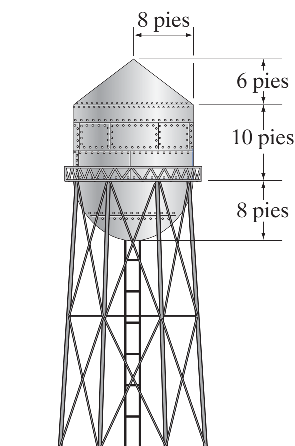



**F9-16**

## PROBLEMAS

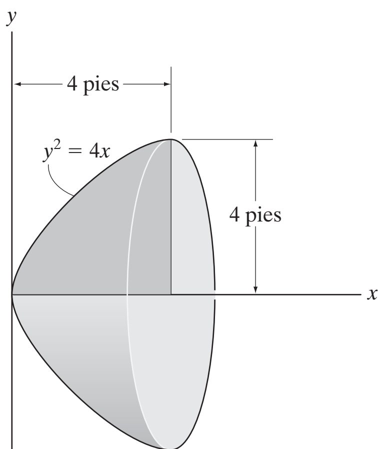
•**9-81.** El tanque elevado de almacenamiento de agua tiene la tapa cónica, base semiesférica, y se fabricó con una placa delgada de acero. Determine cuántos pies cuadrados de placa se necesitaron para fabricar el tanque.

**9-82.** El tanque elevado de almacenamiento de agua tiene la tapa cónica, base semiesférica, y se fabricó con una placa delgada de acero. Determine el volumen dentro del tanque.




**Probs. 9-81/82**

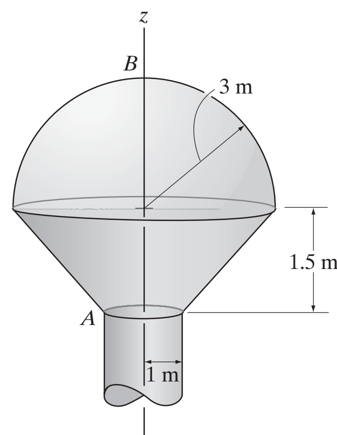
**9-83.** Determine el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris oscuro) alrededor del eje $x$, por el segundo teorema de Pappus-Guldinus. Primero deben obtenerse el área y el centroide $\bar{y}$ del área sombreada mediante integración.




**Prob. 9-83**

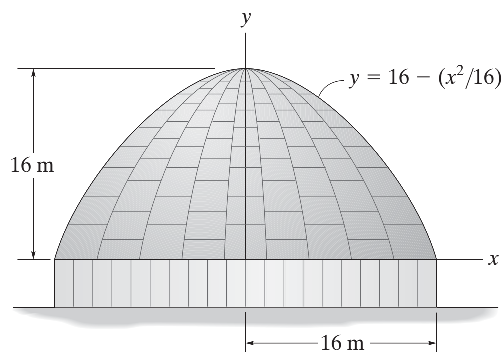
*__9-84.__ Determine el área superficial del tanque desde $A$ hasta $B$.

•**9-85.** Determine el volumen dentro del tanque de pared delgada desde $A$ hasta $B$.




**Probs. 9-84/85**

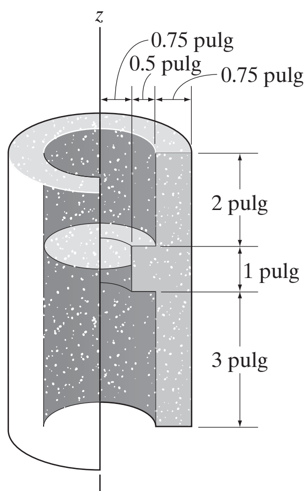
**9-86.** Determine el área superficial del techo de la estructura, si éste se forma al girar la parábola alrededor del eje $y$.




**Prob. 9-86**

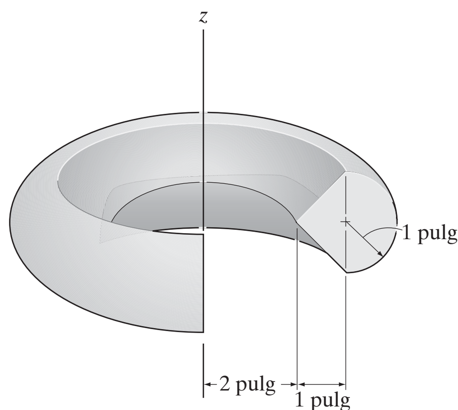
**9-87.** Determine el área superficial del sólido que se forma al girar el área sombreada 360° alrededor del eje $z$.

***9-88.** Determine el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada 360° alrededor del eje $z$.



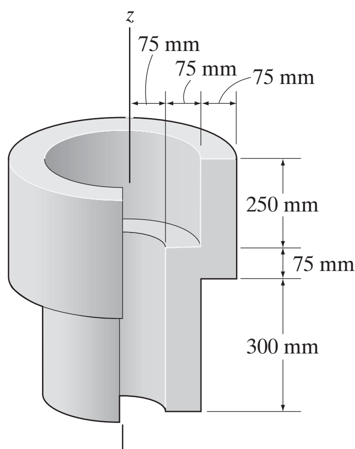

**Probs. 9-87/88**

**9-90.** Determine área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada 360° alrededor del eje $z$.



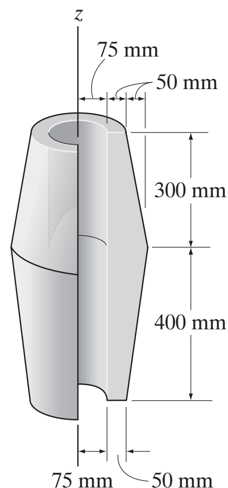

**Prob. 9-90**

**•9-89.** Determine el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada 360° alrededor del eje $z$.




**Prob. 9-89**

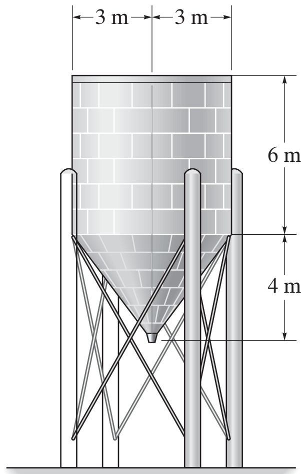
**9-91.** Determine área superficial y el volumen del sólido que se forma al girar el área sombreada 360° alrededor del eje $z$.




**Prob. 9-91**

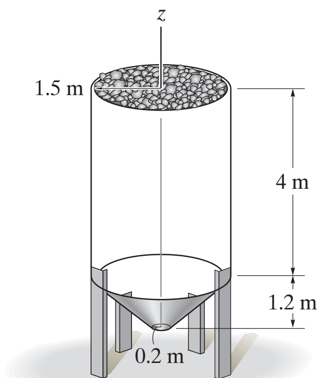
9

*9-92. El tanque se utiliza para almacenar líquidos durante un proceso de manufactura. Estime el volumen del tanque y su área superficial. El tanque tiene una tapa plana y es de pared delgada.




Prob. 9-92

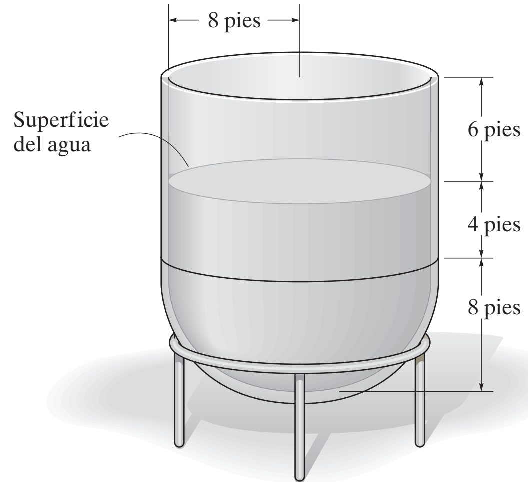
•9-93. La tolva está llena hasta el borde con carbón. Determine el volumen de carbón si los vacíos (espacio de aire) constituyen el 35 por ciento del volumen de la tolva.




Prob. 9-93

9-94. El tanque de pared delgada está fabricado a partir de una semiesfera y un cascarón cilíndrico. Determine las reacciones verticales que cada una de las cuatro patas colocadas simétricamente ejerce sobre el piso si el tanque contiene agua con 12 pies de profundidad. La gravedad específica del agua es de 62.4 lb/pie$^3$. Ignore el peso del tanque.

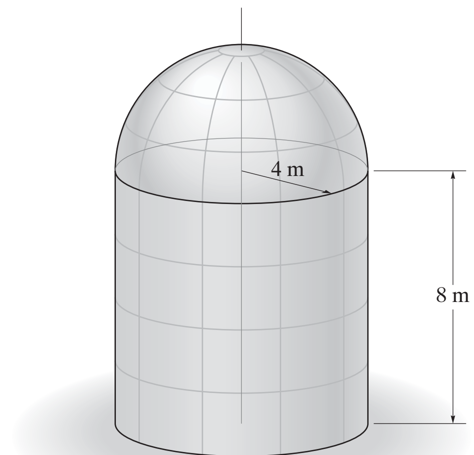
9-95. Determine la cantidad aproximada de pintura necesaria para cubrir la superficie exterior del tanque abierto. Suponga que un galón de pintura cubre 400 pies$^2$.




Probs. 9-94/95

*9-96. Determine el área superficial del tanque, el cual consiste en un cilindro y una cubierta semiesférica.

•9-97. Determine el volumen del tanque de pared delgada, el cual consiste en un cilindro y una cubierta semiesférica.

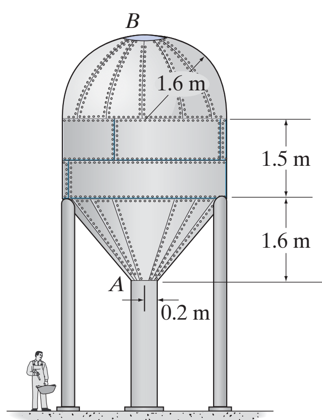



Probs. 9-96/97

9

**9-98.** El tanque de almacenamiento de agua $AB$ tiene una tapa semiesférica y está fabricado con lámina metálica delgada. Determine el volumen dentro del tanque.

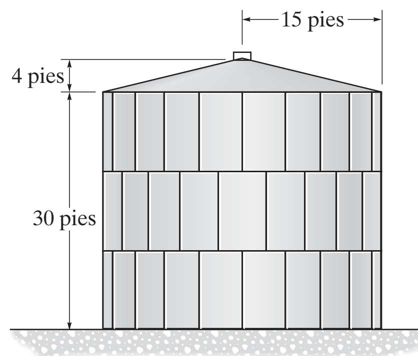
**9-99.** El tanque de almacenamiento de agua $AB$ tiene un techo semiesférico y está fabricado con lámina metálica delgada. Si un litro de pintura puede cubrir 3 m$^2$ de la superficie del tanque, determine cuántos litros se requieren para cubrir la superficie del tanque desde $A$ hasta $B$.




**Probs. 9-98/99**

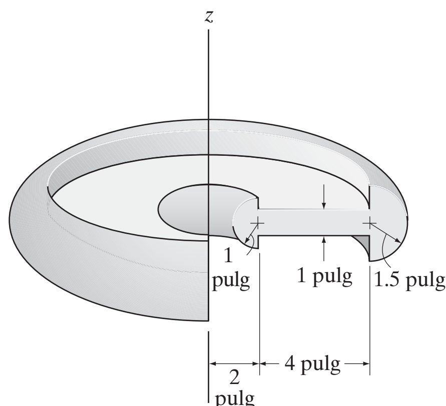
•**9-101.** Determine el área de la superficie exterior del tanque de almacenamiento.

**9-102.** Determine el volumen del tanque de almacenamiento de pared delgada.



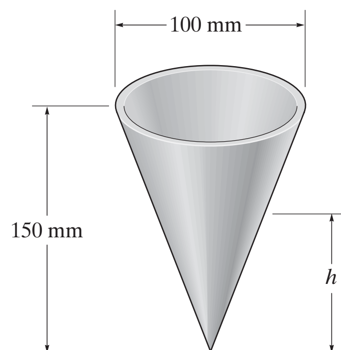

**Probs. 9-101/102**

*__9-100.__ Determine el área superficial y el volumen de la rueda que se forma al girar el área de sección transversal, 360° alrededor del eje $z$.




**Prob. 9-100**

**9-103.** Determine hasta qué altura $h$ debe verterse el líquido en la copa cónica para que haga contacto con la mitad del área superficial del interior de la copa.




**Prob. 9-103**

9

# *9.4 Resultante de una carga general distribuida

En la sección 4.9 analizamos el método usado para simplificar una carga distribuida en dos dimensiones a una sola fuerza resultante que actúa en un punto específico. En esta sección generalizaremos este método para incluir superficies planas que tienen una forma arbitraria y están sometidas a una distribución de carga variable. Por ejemplo, considere la placa plana de la figura 9-23*a*, la cual está sometida a la carga definida por $p = p(x, y)$ Pa, donde 1 Pa (pascal) = 1 N/m$^2$. Conocida esta función, podemos determinar la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ que actúa sobre la placa y su ubicación $(\bar{x}, \bar{y})$, figura 9-23*b*.

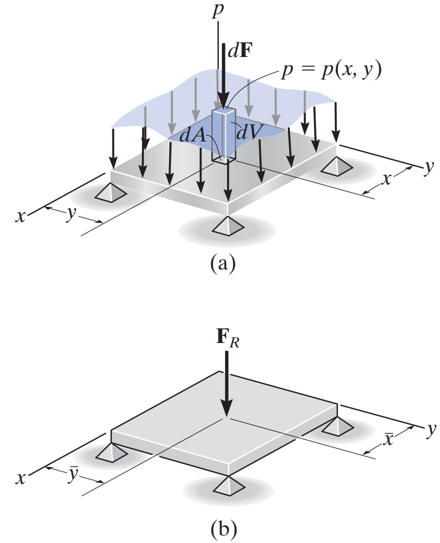



Fig. 9-23

## Magnitud de la fuerza resultante.

La fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre el área diferencial $dA$ m$^2$ de la placa, ubicada en el punto arbitrario $(x, y)$, tiene una magnitud de $dF = [p(x, y)\ \text{N/m}^2](dA\ \text{m}^2) = [p(x, y)\ dA]$ N. Observe que $p(x, y)\ dA = dV$, el *elemento de volumen* diferencial en azul que se muestra en la figura 9-23*a*. La *magnitud* de $\mathbf{F}_R$ es la suma de las fuerzas diferenciales que actúan sobre *toda el área superficial* $A$ de la placa. Entonces:

$$F_R = \Sigma F; \qquad F_R = \int_A p(x, y)\, dA = \int_V dV = V \tag{9-11}$$

Este resultado indica que la *magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen total bajo el diagrama de carga distribuida.*



La resultante de una carga del viento que está distribuida en la parte frontal o en las paredes laterales de esta construcción, debe calcularse mediante integración, a fin de diseñar la estructura que mantiene unido al edificio.

## Ubicación de la fuerza resultante.

La ubicación $(\bar{x}, \bar{y})$ de $\mathbf{F}_R$ se determina al establecer los momentos de $\mathbf{F}_R$ iguales a los momentos de todas las fuerzas diferenciales $d\mathbf{F}$ con respecto a los ejes $y$ y $x$ respectivos: a partir de las figuras 9-23*a* y 9-23*b*, con la ecuación 9-11, esto resulta en

$$\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y)\, dA}{\int_A p(x, y)\, dA} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV} \tag{9-12}$$

Por lo tanto, la *línea de acción de la fuerza resultante pasa a través del centro geométrico o centroide del volumen bajo el diagrama de carga distribuida.*

## *9.5 Presión de un fluido

De acuerdo con la ley de Pascal, un fluido en reposo crea cierta presión $p$ en un punto que es la *misma* en *todas* direcciones. La magnitud de $p$, medida como una fuerza por unidad de área, depende del peso específico $\gamma$ o de la densidad de masa $\rho$ del fluido y de la profundidad $z$ del punto desde la superficie del fluido.* La relación se puede expresar matemáticamente como

$$p = \gamma z = \rho g z \tag{9-13}$$

donde $g$ es la aceleración debida a la gravedad. Esta ecuación es válida sólo para fluidos que se suponen *incompresibles*, como es el caso de la mayoría de los líquidos. Los gases son fluidos compresibles puesto que sus densidades cambian considerablemente con la presión y la temperatura; no puede utilizarse la ecuación 9-13.

Para ilustrar cómo se aplica la ecuación 9-13, considere la placa sumergida que se muestra en la figura 9-24. Se han especificado tres puntos sobre la placa. Como el punto $B$ está a una profundidad $z_1$ de la superficie del líquido, la *presión* en este punto tiene una magnitud $p_1 = \gamma z_1$. De la misma forma, los puntos $C$ y $D$ están a una profundidad $z_2$; por consiguiente, $p_2 = \gamma z_2$. En todos los casos, la presión actúa en forma *normal* con respecto al área superficial $dA$ que se localiza en el punto especificado.

Con la ecuación 9-13 y los resultados de la sección 9.4, es posible determinar la fuerza resultante causada por un líquido y especificar su ubicación sobre la superficie de una placa sumergida. A continuación, se considerarán tres formas diferentes de placas.

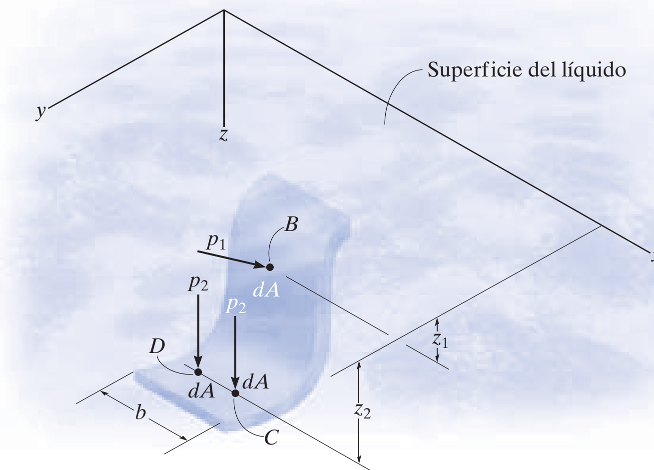



**Fig. 9-24.**

*En particular, para agua $\gamma = 62.4$ lb/pie$^3$, o bien $\gamma = \rho g = 9810$ N/m$^3$ puesto que $\rho = 1000$ kg/m$^3$ y $g = 9.81$ m/s$^2$.

9

**Placa plana de ancho constante.** En la figura 9-25*a* se muestra una placa rectangular de ancho constante, que está sumergida en un líquido con un peso específico $\gamma$. Como la presión varía linealmente con la profundidad, ecuación 9-13, la distribución de presión sobre la superficie de la placa se representa mediante un volumen trapezoidal con intensidades de $p_1 = \gamma z_1$ a la profundidad $z_1$ y $p_2 = yz_2$ a la profundidad $z_2$. Como observamos en la sección 9.4, la magnitud de la *fuerza resultante* $\mathbf{F}_R$ es igual al *volumen* de este diagrama de carga y $\mathbf{F}_R$ tiene una *línea de acción* que pasa por el centroide $C$ del volumen. Por consiguiente, $\mathbf{F}_R$ *no* actúa en el centroide de la placa, sino en un punto $P$, llamado el *centro de presión*.

Como la placa tiene un *ancho constante*, la distribución de carga también puede ser vista en dos dimensiones, figura 9-25*b*. Aquí, la intensidad de la carga se mide como fuerza/longitud y varía linealmente desde $w_1 = bp_1 = byz_1$ hasta $w_2 = bp_2 = byz_2$. La magnitud de $\mathbf{F}_R$ en este caso es igual al *área* trapezoidal, y $\mathbf{F}_R$ tiene una *línea de acción* que pasa por el *centroide* $C$ del área. Para aplicaciones numéricas, el área y la ubicación del centroide para un trapecio están tabuladas en la cubierta posterior interna de este libro.



Las paredes del tanque deben diseñarse para soportar la carga de presión del líquido que está contenido en él.



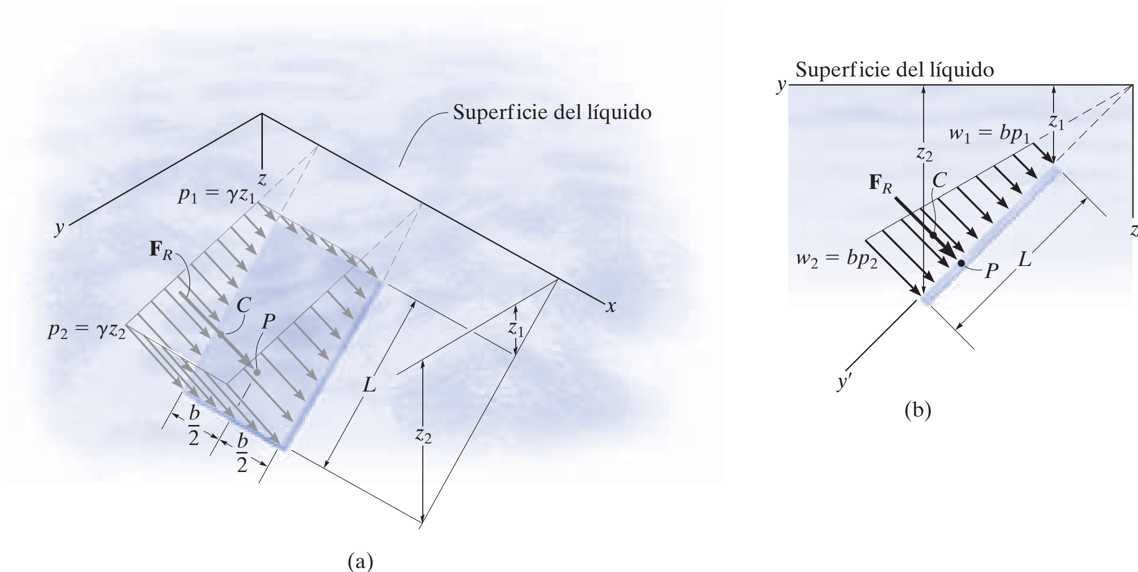



**Fig. 9-25**

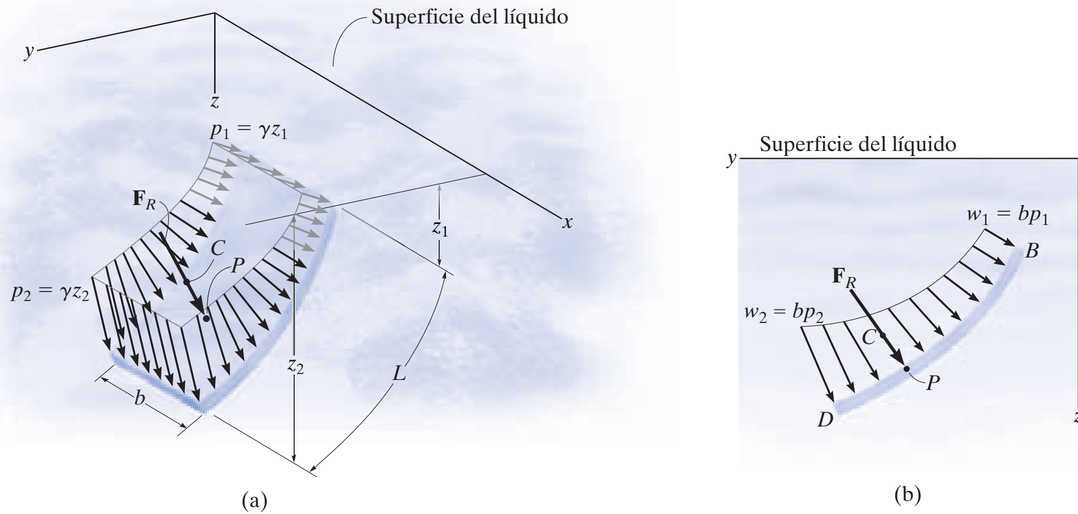
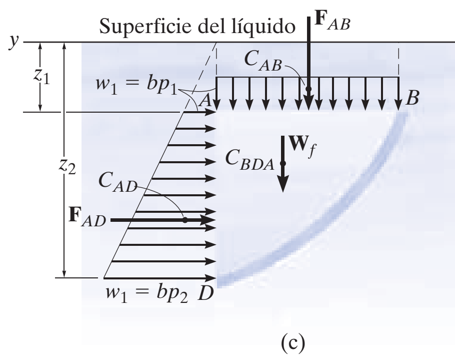



**Fig. 9-26**




(c)

**Placa curva de ancho constante.** Cuando la placa sumergida es curva de ancho constante, la presión que actúa en forma normal a la placa cambia su dirección de manera continua, y por tanto, el cálculo de la magnitud de $\mathbf{F}_R$ y su ubicación $P$ es más difícil que para una placa plana. En las figuras 9-26*a* y 9-26*b* se muestran vistas en dos y tres dimensiones de la distribución de carga, respectivamente. Aunque puede usarse la integración para resolver este problema, existe un método más simple, el cual requiere cálculos separados de las *componentes* horizontal y vertical de $\mathbf{F}_R$.

Por ejemplo, la carga distribuida que actúa sobre la placa puede representarse mediante la *carga equivalente* de la figura 9-26*c*. En este caso la placa soporta el peso $W_f$ del líquido contenido dentro del bloque $BDA$. Esta fuerza tiene una magnitud $W_f = (\gamma_b)(\text{área}_{BDA})$ y actúa a través del centroide de $BDA$. Además, están las distribuciones de presión causadas por el líquido que actúa a lo largo de los lados vertical y horizontal del bloque. A lo largo del lado vertical $AD$, la fuerza $\mathbf{F}_{AD}$ tiene una magnitud igual al área del trapecio y actúa a través del centroide $C_{AD}$ de esta área. La carga distribuida a lo largo del lado horizontal $AB$ es *constante* ya que todos los puntos que se encuentran en este plano tienen la misma profundidad desde la superficie del líquido. La magnitud de $\mathbf{F}_{AB}$ es simplemente el área del rectángulo. Esta fuerza actúa a través del centroide $C_{AB}$ o en el punto medio del centroide $C_{AB}$ del área o punto medio de $AB$. Sumando estas tres fuerzas resulta $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AD} + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{W}_f$. Por último, la ubicación del centro de presión $P$ sobre la placa se determina con la aplicación de $M_R = \Sigma M$, lo que establece que el momento de la fuerza resultante con respecto a un punto de referencia conveniente como $D$ o $B$, figura 9-26*b*, es igual a la suma de los momentos de las tres fuerzas mostradas en la figura 9-26*c* con respecto a este mismo punto.

9

**Placa plana de ancho variable.** La distribución de presión que actúa sobre la superficie de una placa sumergida con ancho variable se muestra en la figura 9-27. Si consideramos que la fuerza $d\mathbf{F}$ que actúa sobre la franja de área diferencial $dA$, paralela al eje $x$, entonces su magnitud es $dF = p\,dA$. Como la profundidad de $dA$ es $z$, la presión sobre el elemento es $p = \gamma z$. Por lo tanto, $dF = (\gamma z)dA$ y la fuerza resultante toma la forma

$$F_R = \int dF = \gamma \int z\,dA$$

Si la profundidad hasta el centroide $C'$ del área es $\bar{z}$, figura 9-27, entonces, $\int z\,dA = \bar{z}A$. Si sustituimos, tenemos

$$F_R = \gamma \bar{z} A \tag{9-14}$$

En otras palabras, *la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre cualquier placa plana es igual al producto del área A de la placa y la presión* $p = \gamma\bar{z}$ *a la profundidad del centroide* $C'$ *del área*. Como se explicó en la sección 9.4, esta fuerza también es equivalente al volumen bajo la distribución de presión. Observe que su línea de acción pasa a través del centroide $C$ de este *volumen* e interseca la placa en el centro de presión $P$, figura 9-27. Observe que la ubicación $C'$ no coincide con la ubicación de $P$.



La fuerza resultante de la presión del agua y su ubicación sobre la placa elíptica trasera del tanque de este camión debe determinarse por integración.

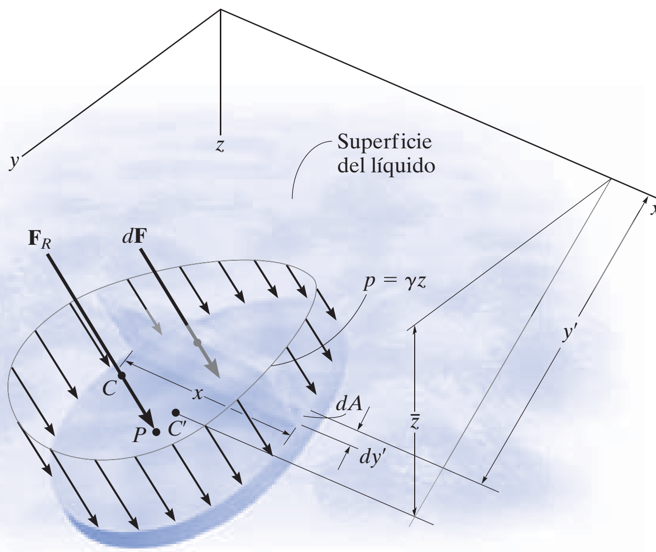
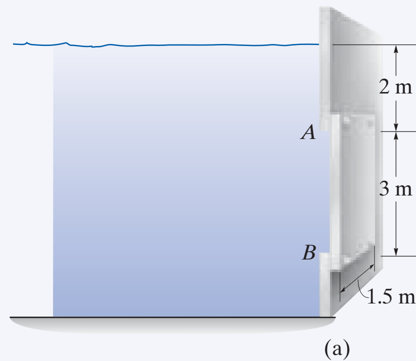
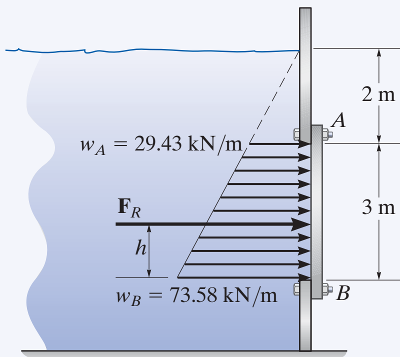



**Fig. 9-27**

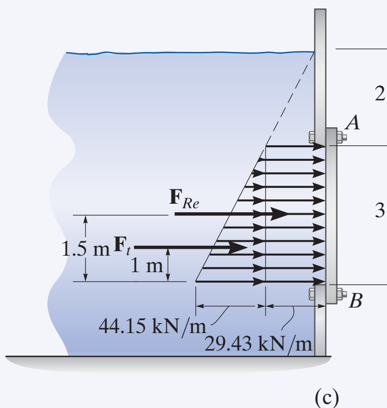
## EJEMPLO 9.14




(a)




(b)




(c)

**Fig. 9-28**

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la placa rectangular sumergida que se muestra en la figura 9-28*a*. La placa tiene un ancho de 1.5 m; $\rho_w = 1000\ \text{kg/m}^3$.

### SOLUCIÓN I

Las presiones del agua a las profundidades $A$ y $B$ son

$$p_A = \rho_w g z_A = (1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m}) = 19.62\ \text{kPa}$$

$$p_B = \rho_w g z_B = (1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m}) = 49.05\ \text{kPa}$$

Como la placa tiene un ancho constante, la carga de presión puede verse en dos dimensiones como se muestra en la figura 9-28*b*. Las intensidades de la carga en $A$ y $B$ son

$$w_A = bp_A = (1.5\ \text{m})(19.62\ \text{kPa}) = 29.43\ \text{kN/m}$$

$$w_B = bp_B = (1.5\ \text{m})(49.05\ \text{kPa}) = 73.58\ \text{kN/m}$$

De la tabla de la cubierta posterior interna, la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{F}_R$ creada por esta carga distribuida es

$$F_R = \text{área de un trapezoide} = \tfrac{1}{2}(3)(29.4 + 73.6) = 154.5\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Esta fuerza actúa a través del centroide del área.

$$h = \frac{1}{3}\left(\frac{2(29.43) + 73.58}{29.43 + 73.58}\right)(3) = 1.29\ \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

medida hacia arriba desde $B$, figura 9-28*b*.

### SOLUCIÓN II

Los mismos resultados se pueden obtener al considerar dos componentes de $\mathbf{F}_R$, definidos por el triángulo y el rectángulo que se muestran en la figura 9-28*c*. Cada fuerza actúa a través de su centroide asociado y tiene una magnitud de

$$F_{Re} = (29.43\ \text{kN/m})(3\ \text{m}) = 88.3\ \text{kN}$$

$$F_t = \tfrac{1}{2}(44.15\ \text{kN/m})(3\ \text{m}) = 66.2\ \text{kN}$$

Por tanto,

$$F_R = F_{Re} + F_t = 88.3 + 66.2 = 154.5\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

La ubicación de $\mathbf{F}_R$ se determina al sumar momentos respecto a $B$, figura 9-28*b* y *c*, es decir,

$$\circlearrowleft + (M_R)_B = \Sigma M_B;\ (154.5)h = 88.3(1.5) + 66.2(1)$$

$$h = 1.29\ \text{m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** al usar la ecuación 9-14, la fuerza resultante puede calcularse como $F_R = \gamma \bar{z} A = (9810\ \text{N/m}^3)(3.5\ \text{m})(3\ \text{m})(1.5\ \text{m}) = 154.5\ \text{kN}$.

9

## EJEMPLO 9.15

Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la superficie de una pared marina que tiene la forma de una parábola, como se muestra en la figura 9-29*a*. La pared tiene 5 m de largo; $\rho_w = 1020\ \text{kg/m}^3$.

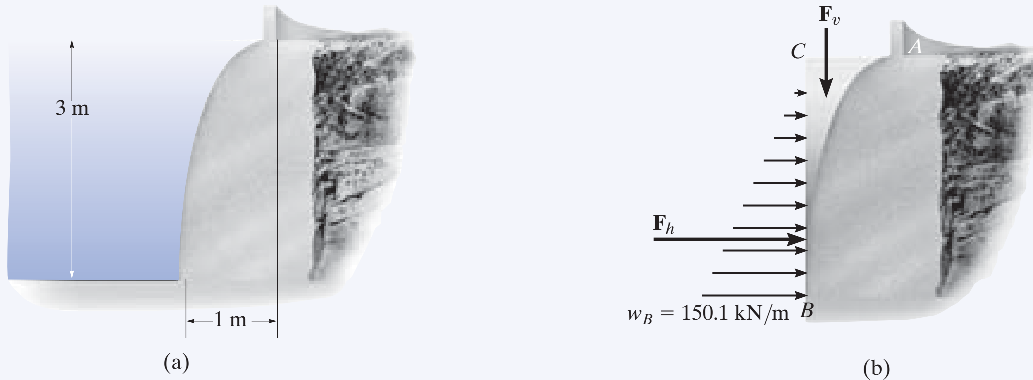



**Fig. 9-29**

### SOLUCIÓN

Se calcularán las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante, figura 9-29*b*. Como

$$p_B = \rho_w g z_B = (1020\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(3\ \text{m}) = 30.02\ \text{kPa}$$

entonces

$$w_B = bp_B = 5\ \text{m}(30.02\ \text{kPa}) = 150.1\ \text{kN/m}$$

En consecuencia,

$$F_h = \tfrac{1}{2}(3\ \text{m})(150.1\ \text{kN/m}) = 225.1\ \text{kN}$$

El área del sector parabólico $ABC$ puede ser determinada con la tabla que aparece en la cubierta posterior interna de este libro. Por lo tanto, el peso del agua dentro de esta región es

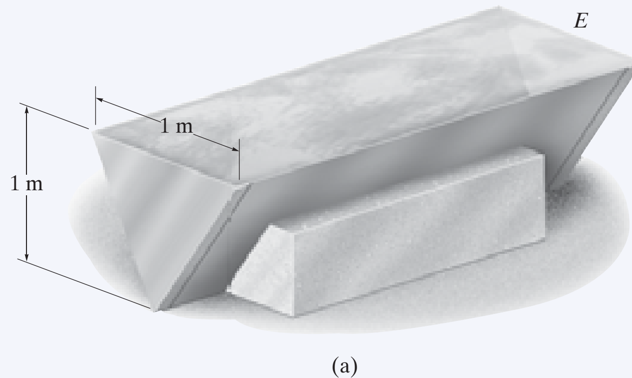
$$F_v = (\rho_w g b)(\text{área}_{ABC})$$
$$= (1020\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m})\left[\tfrac{1}{3}(1\ \text{m})(3\ \text{m})\right] = 50.0\ \text{kN}$$

Por consiguiente, la fuerza resultante es

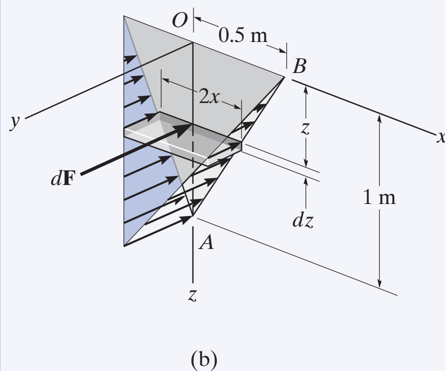
$$F_R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = \sqrt{(225.1\ \text{kN})^2 + (50.0\ \text{kN})^2}$$
$$= 231\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 9.16

Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza resultante que actúa sobre las placas triangulares del extremo del canal para agua que se muestra en la figura 9-30*a*; $\rho_w = 1000\ \text{kg/m}^3$.




(a)




(b)

**Fig. 9-30**

### SOLUCIÓN

La distribución de presión que actúa sobre la placa *E* del extremo se muestra en la figura 9-30*b*. La magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen de esta distribución de carga. Resolveremos el problema por integración. Si seleccionamos el elemento diferencial de volumen mostrado en la figura, tenemos

$$dF = dV = p\,dA = \rho_w g z(2x\,dz) = 19\,620zx\,dz$$

La ecuación de la línea *AB* es

$$x = 0.5(1 - z)$$

Por lo tanto, al sustituir e integrar con respecto a $z$ desde $z = 0$ hasta $z = 1$ m resulta

$$F = V = \int_V dV = \int_0^{1\text{ m}} (19\,620)z[0.5(1 - z)]\,dz$$

$$= 9810 \int_0^{1\text{ m}} (z - z^2)\,dz = 1635\text{ N} = 1.64\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Esta resultante pasa a través del *centroide del volumen*. Por simetría,

$$\bar{x} = 0 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Como $\tilde{z} = z$ para el elemento de volumen, entonces

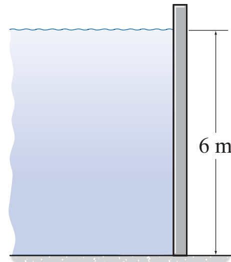
$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} z(19\,620)z[0.5(1 - z)]\,dz}{1635} = \frac{9810\int_0^{1\text{ m}} (z^2 - z^3)\,dz}{1635}$$

$$= 0.5\text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** también podemos determinar la fuerza resultante al aplicar la ecuación 9-14, $F_R = \gamma \bar{z} A = (9810\ \text{N/m}^3)(\frac{1}{3})(1\text{ m})[\frac{1}{2}(1\text{ m})(1\text{ m})] = 1.64\text{ kN}$.

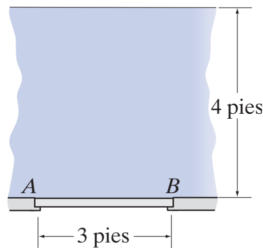
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F9-17.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática por metro de longitud que actúa sobre la pared. El agua tiene una densidad de $\rho = 1\ \text{Mg/m}^3$.



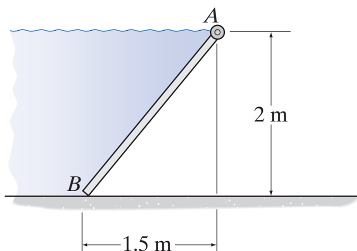

**F9-17**

**F9-18.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta $AB$, la cual tiene un ancho de 4 pies. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4\ \text{lb/pie}^3$.



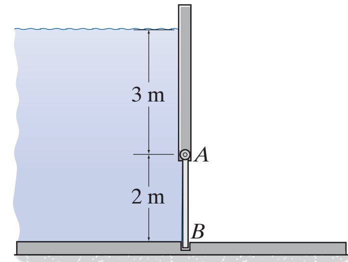

**F9-18**

**F9-19.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta $AB$, la cual tiene un ancho de 1.5 m. El agua tiene una densidad de $\rho = 1\ \text{Mg/m}^3$.



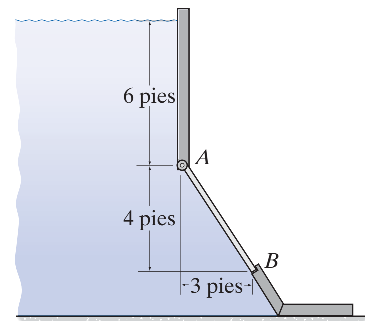

**F9-19**

**F9-20.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta $AB$, la cual tiene un ancho de 2 m. El agua tiene una densidad de $\rho = 1\ \text{Mg/m}^3$.




**F9-20**

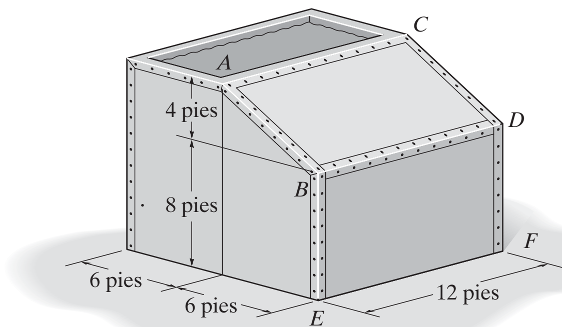
**F9-21.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre la compuerta $AB$, la cual tiene un ancho de 2 pies. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4\ \text{lb/pie}^3$.




**F9-21**

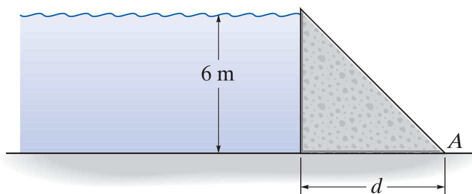
## PROBLEMAS

***9-104.** El tanque se usa para almacenar un líquido que tiene un peso específico de 80 lb/pie³. Si está lleno hasta el tope, determine la magnitud de la fuerza que ejerce el líquido sobre cada uno de sus dos lados *ABDC* y *BDFE*.



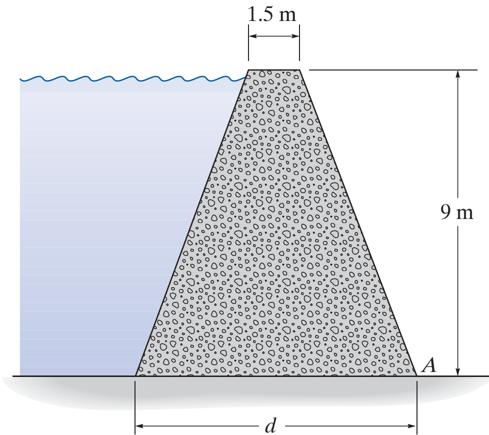

Prob. 9-104

•**9-105.** La presa de "gravedad" de concreto se mantiene en su lugar por su propio peso. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.5$ Mg/m³, y el agua tiene una densidad de $\rho_a = 1.0$ Mg/m³, determine la dimensión *d* más pequeña que impedirá que la presa se voltee con respecto a su extremo *A*.



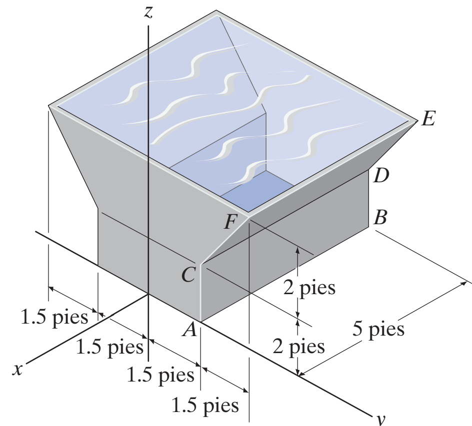

Prob. 9-105

**9-106.** La presa simétrica de "gravedad" hecha de concreto se mantiene en su lugar por su propio peso. Si la densidad del concreto es $\rho_c = 2.5$ Mg/m³, y el agua tiene una densidad de $\rho_a = 1.0$ Mg/m³, determine la distancia *d* más pequeña en su base que impedirá que la presa se voltee con respecto a su extremo *A*. La presa tiene un ancho de 8 m.




Prob. 9-106

**9-107.** El tanque se usa para almacenar un líquido que tiene un peso específico de 60 lb/pie³. Si el tanque está lleno, determine la magnitud de la fuerza hidrostática sobre las placas *CDEF* y *ABDC*.

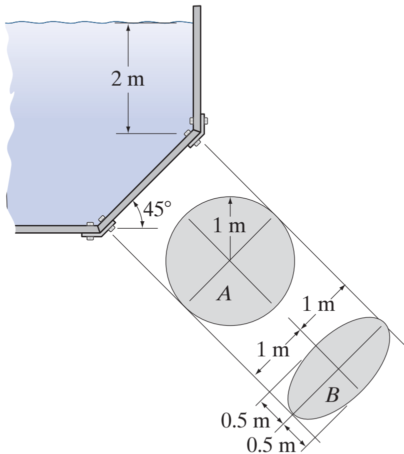



Prob. 9-107

9

***9-108.** La placa circular $A$ de acero se usa para sellar la abertura en el tanque de almacenamiento de agua. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre ella. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \mathrm{Mg/m^3}$.

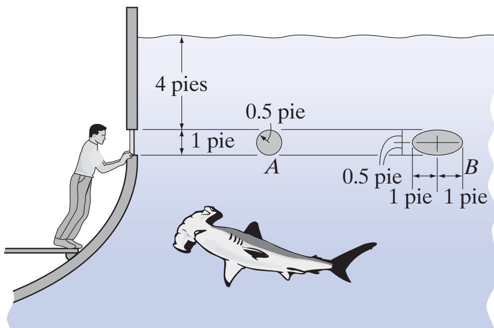
**•9-109.** La placa elíptica $B$ de acero se usa para sellar la abertura en el tanque de almacenamiento de agua. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre ella. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \mathrm{Mg/m^3}$.




**Probs. 9-108/109**

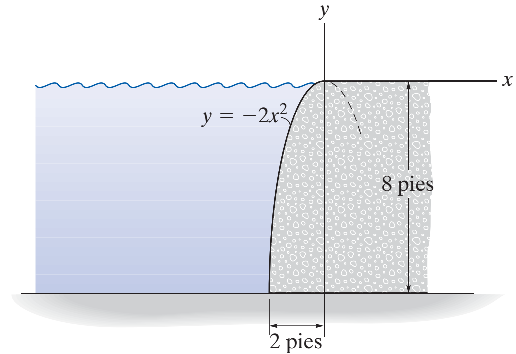
**9-110.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa sobre la ventana de cristal si ésta es circular, $A$. El peso específico del agua de mar es $\gamma_a = 63.6\ \mathrm{lb/pie^3}$.

**9-111.** Determine la magnitud y la ubicación de la fuerza hidrostática resultante que actúa sobre la ventana de cristal si ésta es elíptica, $B$. El peso específico del agua de mar es $\gamma_a = 63.6\ \mathrm{lb/pie^3}$.




**Probs. 9-110/111**

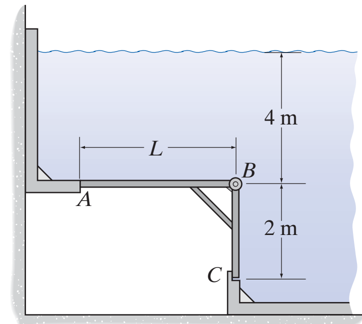
***9-112.** Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa por cada pie de longitud de la pared marina, $\gamma_a = 62.4\ \mathrm{lb/pie^3}$.




**Prob. 9-112**

**•9-113.** Si el segmento $AB$ de la compuerta $ABC$ es lo suficientemente largo, la compuerta estará a punto de abrirse. Determine la longitud $L$ del segmento para que esto ocurra. La compuerta está articulada en $B$ y tiene un ancho de 1 m. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \mathrm{Mg/m^3}$.

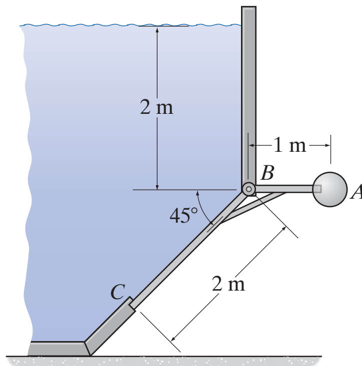
**9-114.** Si $L = 2$ m, determine la fuerza que ejerce la compuerta $ABC$ sobre el tope liso en $C$. La compuerta está articulada en $B$, libre en $A$ y tiene 1 m de ancho. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \mathrm{Mg/m^3}$.




**Probs. 9-113/114**

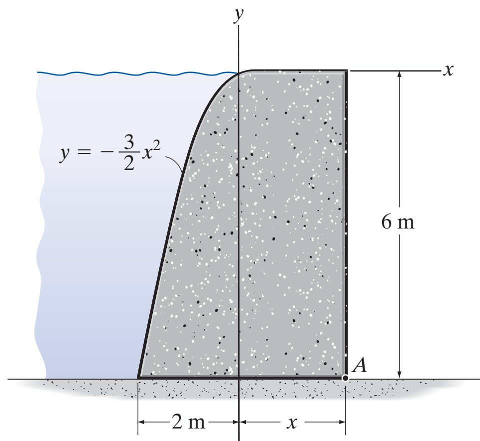
**9-115.** Determine la masa del contrapeso $A$ si la compuerta de 1 m de ancho está a punto de abrirse cuando el agua está en el nivel mostrado. La compuerta está articulada en $B$ y se sostiene mediante el tope liso en $C$. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \text{Mg/m}^3$.

***9-116.** Si la masa del contrapeso en $A$ es de 6500 kg, determine la fuerza que ejerce la compuerta sobre el tope liso en $C$. La compuerta está articulada en $B$ y tiene 1 m de ancho. La densidad del agua es $\rho_a = 1\ \text{Mg/m}^3$.



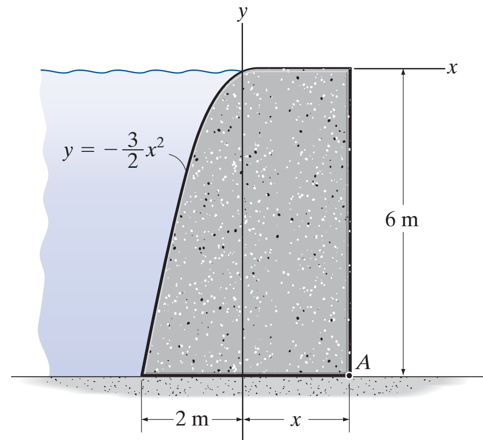

**Probs. 9-115/116**

**•9-117.** La presa de gravedad de concreto está diseñada de modo que se mantiene en su lugar por su propio peso. Determine el factor de seguridad contra el volteo respecto del punto $A$ si $x = 2$ m. El factor de seguridad está definido como la razón del momento de estabilización dividido entre el momento de volteo. Las densidades del concreto y del agua son $\rho_{conc} = 2.40\ \text{Mg/m}^3$ y $\rho_a = 1\ \text{Mg/m}^3$, respectivamente. Suponga que la presa no se desliza.



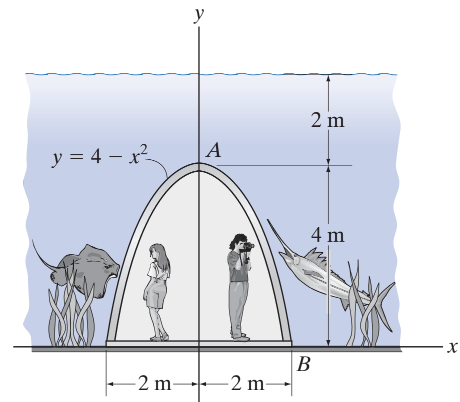

**Prob. 9-117**

**9-118.** La presa de gravedad de concreto está diseñada de modo que se mantiene en su lugar por su propio peso. Determine la dimensión $x$ mínima para que el factor de seguridad contra el volteo respecto del punto $A$ tenga un valor de 2. El factor de seguridad está definido como la razón del momento de estabilización dividido entre el momento de volteo. Las densidades del concreto y del agua son $\rho_{conc} = 2.40\ \text{Mg/m}^3$ y $\rho_a = 1\ \text{Mg/m}^3$, respectivamente. Suponga que la presa no se desliza.




**Prob. 9-118**

**9-119.** El túnel submarino de un centro acuático se fabrica a partir de un material transparente de policarbonato que tiene la forma de una parábola. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática que actúa por cada metro de longitud a lo largo de la superficie $AB$ del túnel. La densidad del agua es $\rho_a = 1000\ \text{kg/m}^3$.




**Prob. 9-119**

9

# REPASO DEL CAPÍTULO

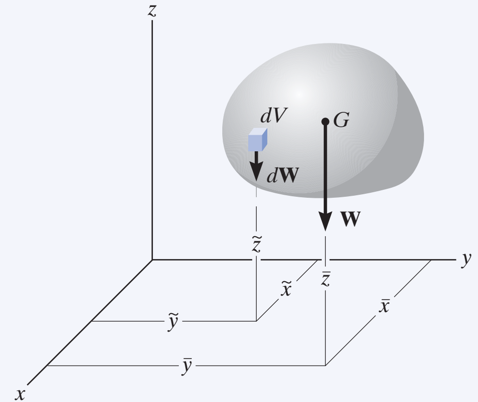
**Centro de gravedad y centroide**

El *centro de gravedad G* representa un punto donde el peso del cuerpo puede considerarse concentrado. La distancia desde un eje a este punto puede ser determinada a partir del equilibrio por momentos. Esto requiere que el momento del peso de todas las partículas del cuerpo con respecto a algún punto deba ser igual al momento de todo el peso del cuerpo con respecto al eje.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$




El centro de masa coincidirá con el centro de gravedad siempre que la aceleración de la gravedad sea constante.

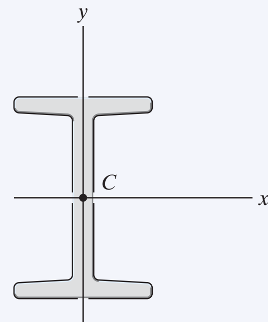
$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z}\, dL}{\int_L dL}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z}\, dA}{\int_A dA}$$

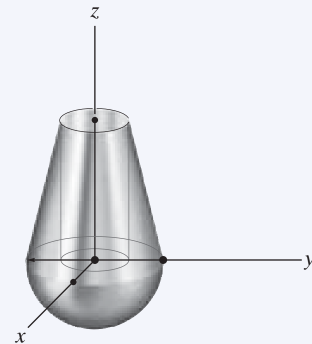
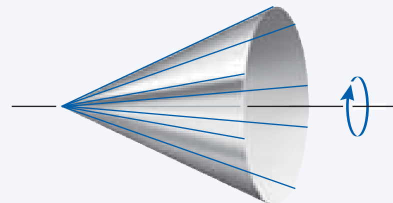
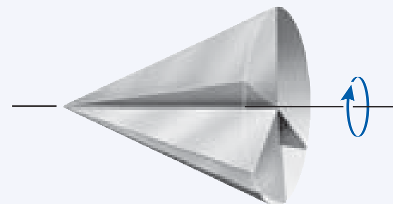
El *centroide* es la ubicación del centro geométrico del cuerpo. Se determina de una manera parecida, por un balance de momentos de elementos geométricos como segmentos de líneas, áreas o volúmenes. Para cuerpos que tienen una forma continua, los momentos se suman (integran) mediante elementos diferenciales.

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

El centro de masa coincidirá con el centroide siempre que el material sea homogéneo, es decir, que la densidad sea la misma en todo el material. El centroide siempre se encontrará en un eje de simetría.




9

| | | |
|---|---|---|
| **Cuerpo compuesto**<br>Si el cuerpo está compuesto de varias formas, cada una con ubicación conocida de su centro de gravedad o centroide, entonces la ubicación se determina con una suma discreta a partir de sus partes componentes. | $\bar{x} = \dfrac{\Sigma\tilde{x}W}{\Sigma W}$<br>$\bar{y} = \dfrac{\Sigma\tilde{y}W}{\Sigma W}$<br>$\bar{z} = \dfrac{\Sigma\tilde{z}W}{\Sigma W}$ | <br> |
| **Teoremas de Pappus y Guldinus**<br>Los teoremas de Pappus y Guldinus se pueden usar para determinar el área superficial y el volumen de un cuerpo de revolución. | |  |
| El *área superficial* es igual al producto de la longitud de la curva generatriz y la distancia recorrida por el centroide de la curva para generar el área. | $A = \theta\bar{r}L$ | |
| El *volumen* del cuerpo es igual al producto del área generatriz y la distancia recorrida por el centroide de esta área para generar el volumen. | $V = \theta\bar{r}A$ |  |

9

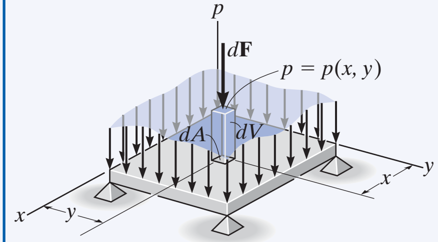
**Carga general distribuida**

La magnitud de la fuerza resultante es igual al volumen total bajo el diagrama de carga distribuida. La línea de acción de la fuerza resultante pasa a través del centro geométrico o centroide de este volumen.

$$F_R = \int_A p(x, y)\, dA = \int_V dV$$

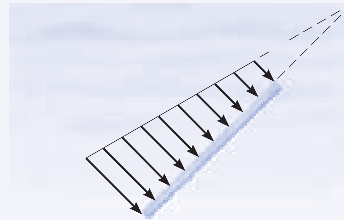
$$\bar{x} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV}$$

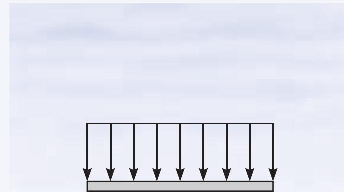



**Presión de fluidos**

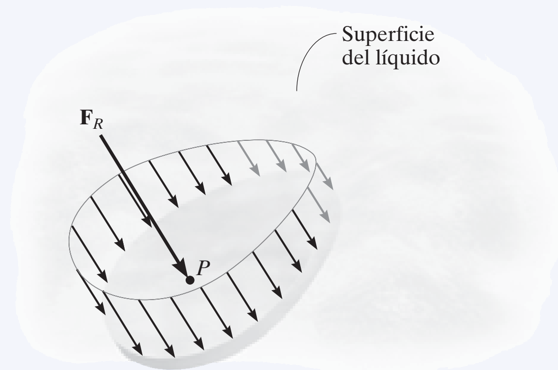
La presión desarrollada por un líquido en un punto sobre una superficie sumergida depende de la profundidad del punto y de la densidad del líquido de acuerdo con la ley de Pascal, $\rho = \rho g h = \gamma h$. Esta presión creará una *distribución lineal* de carga sobre una superficie vertical o inclinada.



Si la superficie es horizontal, entonces la carga será *uniforme*.



En todo caso, las resultantes de estas cargas se pueden determinar si se encuentra el volumen o área bajo la curva de carga o por medio de $F_R = \gamma \bar{z} A$, donde $\bar{z}$ es la profundidad hasta el centroide del área de la placa. La línea de acción de la fuerza resultante pasa por el centroide del volumen del diagrama de carga y actúa en un punto $P$ sobre la placa, llamado el centro de presión.

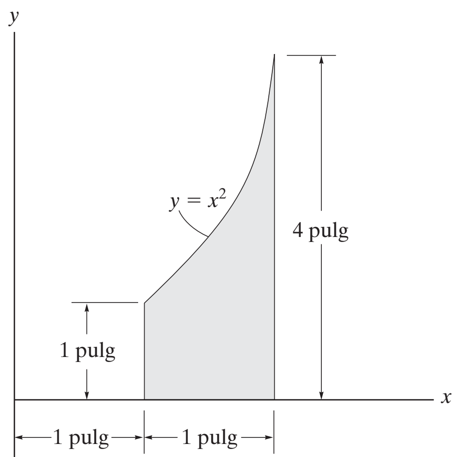



9

## PROBLEMAS DE REPASO

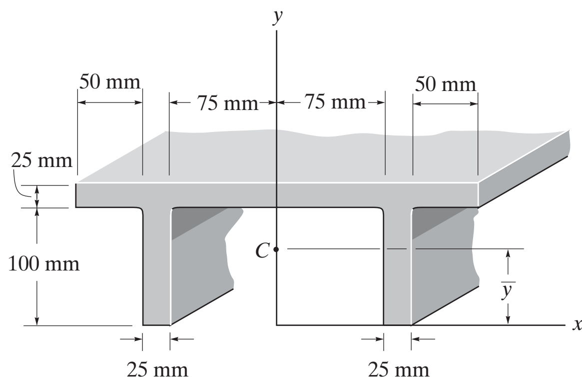
*__9-120.__ Localice el centroide $\bar{x}$ del área sombreada.

•**9-121.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área sombreada.



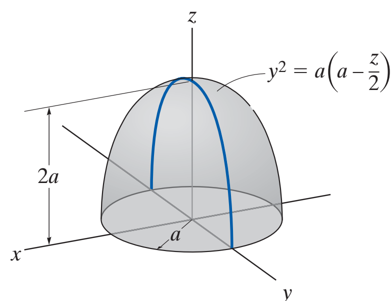

**Probs. 9-120/121**

**9-122.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área de la sección transversal de la viga.



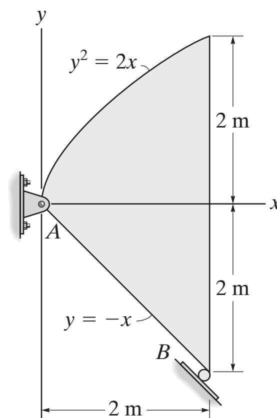

**Prob. 9-122**

**9-123.** Localice el centroide $\bar{z}$ del sólido.



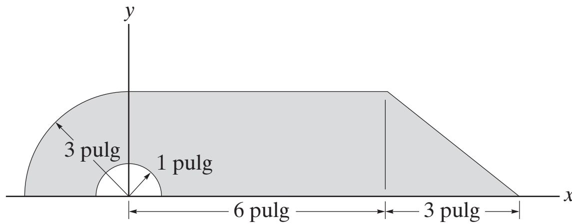

**Prob. 9-123**

*__9-124.__ La placa de acero tiene 0.3 m de espesor y una densidad de 7850 kg/m$^3$. Determine la ubicación de su centro de masa. Además calcule las reacciones en el pasador y en el soporte de rodillo.



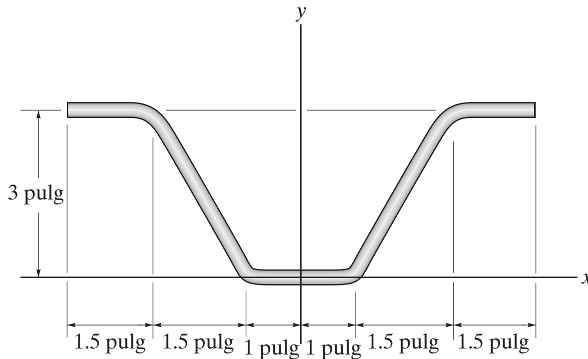

**Prob. 9-124**

•**9-125.** Localice el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ del área.



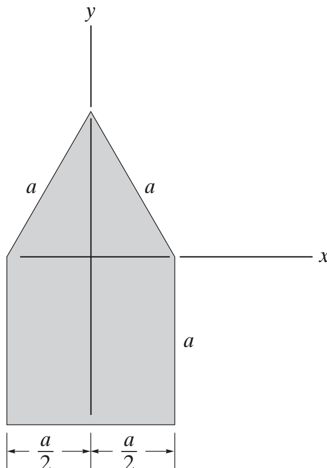

**Prob. 9-125**

**9-126.** Determine la ubicación $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide para el perfil estructural. Desprecie el espesor del elemento.



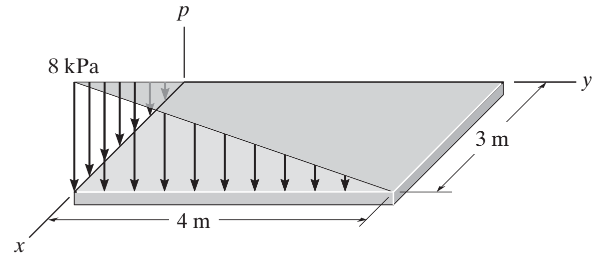

**Prob. 9-126**

**9-127.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área sombreada.



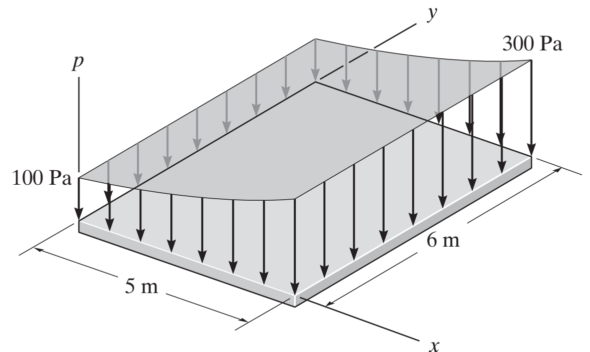

**Prob. 9-127**

*__9-128.__ La carga sobre la placa varía linealmente a lo largo de los lados de la placa, de manera que $p = \frac{2}{3}[x(4 - y)]$ kPa. Determine la fuerza resultante y su posición $(\bar{x}, \bar{y})$ sobre la placa.




**Prob. 9-128**

•**9-129.** La carga de presión sobre la placa se describe mediante la función $p = \{-240/(x + 1) + 340\}$ Pa. Determine la magnitud de la fuerza resultante y las coordenadas del punto donde la línea de acción de la fuerza interseca la placa.




**Prob. 9-129**



El diseño de un elemento estructural, como una viga o una columna, requiere el cálculo del momento de inercia de su sección transversal. En este capítulo estudiaremos cómo se realiza ese cálculo.

# Momentos de inercia

# 10

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar un método para determinar el momento de inercia para un área.
- Introducir el producto de inercia y mostrar cómo se determinan los momentos de inercia máximo y mínimo para un área.
- Analizar el momento de inercia de masa.

## 10.1 Definición de momentos de inercia para áreas

Siempre que una carga distribuida actúa en forma perpendicular a un área y que su intensidad varía linealmente, el cálculo del momento de la distribución de carga con respecto a un eje implicará una cantidad llamada el *momento de inercia del área*. Por ejemplo, considere la placa de la figura 10-1, la cual está sometida a una presión $p$ del fluido. Como se analizó en la sección 9.5, esta presión $p$ varía en forma lineal con la profundidad, de tal manera que $p = \gamma y$, donde $\gamma$ es el peso específico del fluido. Así, la fuerza que actúa sobre el área diferencial $dA$ de la placa es $dF = p\,dA = (\gamma y)dA$. Por tanto, el momento de esta fuerza con respecto al eje $x$ es $dM = y\,dF = \gamma y^2 dA$, y al integrar $dM$ sobre toda el área de la placa resulta $M = \gamma \int y^2 dA$. La integral $\int y^2 dA$ se denomina el *momento de inercia* $I_x$ del área con respecto al eje $x$. Las integrales de esta forma aparecen con frecuencia en las fórmulas que se utilizan en mecánica de fluidos, mecánica de materiales, mecánica estructural y diseño mecánico, por lo que los ingenieros necesitan conocer los métodos empleados para su cálculo.

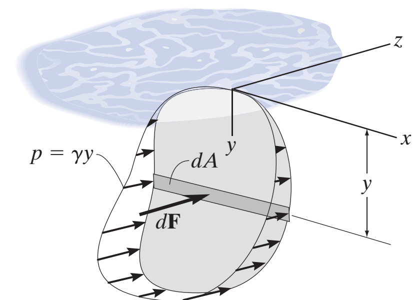



**Fig. 10-1**

**Momento de inercia.** Por definición, los momentos de inercia de un área diferencial $dA$ con respecto a los ejes $x$ y $y$ son $dI_x = y^2\,dA$ y $dI_y = x^2\,dA$, respectivamente, figura 10-2. Los *momentos de inercia* se determinan por integración para toda el área; es decir,

$$I_x = \int_A y^2\,dA$$
$$I_y = \int_A x^2\,dA \tag{10-1}$$

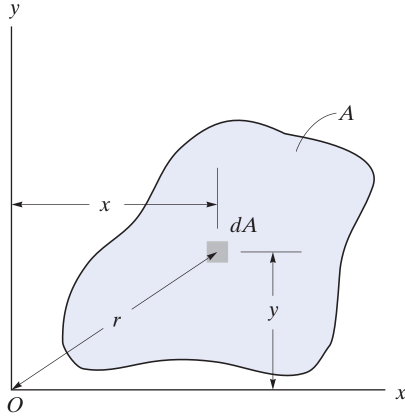



Fig. 10-2

También podemos formular esta cantidad para $dA$ con respecto al "polo" $O$ o eje $z$, figura 10-2. A éste se le llama *momento de inercia polar*. Se define como $dJ_O = r^2\,dA$, donde $r$ es la distancia perpendicular desde el polo (eje $z$) hasta el elemento $dA$. Para toda el área, el *momento de inercia polar* es

$$J_O = \int_A r^2\,dA = I_x + I_y \tag{10-2}$$

Esta relación entre $J_O$ e $I_x$, $I_y$ es posible puesto que $r^2 = x^2 + y^2$, figura 10-2.

A partir de las formulaciones anteriores se ve que $I_x$, $I_y$ y $J_O$ *siempre* serán *positivos* ya que implican el producto de una distancia al cuadrado y un área. Además, las unidades para el momento de inercia implican la longitud elevada a la cuarta potencia, por ejemplo, $m^4$, $mm^4$ o $pie^4$, $pulg^4$.

## 10.2 Teorema de los ejes paralelos para un área

El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia. Para desarrollar este teorema, consideraremos determinar el momento de inercia del área sombreada que se muestra en la figura 10-3 con respecto al eje $x$. Para iniciar, elegimos un elemento diferencial $dA$ que está ubicado a una distancia arbitraria $y'$ del eje *centroidal* $x'$. Si la distancia entre los ejes paralelos $x$ y $x'$ se define como $d_y$, entonces el momento de inercia de $dA$ con respecto al eje $x$ es $dI_x = (y' + dy)^2\,dA$. Para toda el área,

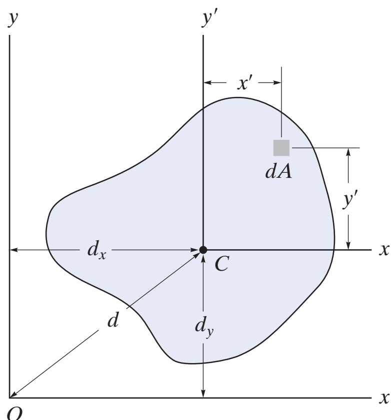



Fig. 10-3

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2\,dA$$
$$= \int_A y'^2\,dA + 2d_y \int_A y'\,dA + d_y^2 \int_A dA$$

La primera integral representa el momento de inercia del área con respecto al eje centroidal $\bar{I}_{x'}$. La segunda integral es cero ya que el eje $x'$ pasa a través del centroide $C$ del área; es decir, $\int y' \, dA = \bar{y}' \int dA = 0$ puesto que $\bar{y}' = 0$. Observamos que como la tercera integral representa el área total $A$, el resultado final es, por tanto,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \qquad (10\text{-}3)$$

Para $I_y$, se puede escribir una expresión similar; es decir,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \qquad (10\text{-}4)$$

Y por último, para el momento de inercia polar, como $\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'}$ y $d^2 = d_x^2 + d_y^2$, tenemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad (10\text{-}5)$$

La forma de cada una de estas tres ecuaciones establece que *el momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes*.



Para predecir la resistencia y la deflexión de esta viga, es necesario calcular el momento de inercia del área de su sección transversal.

## 10.3 Radio de giro de un área

El *radio de giro* de un área con respecto a un eje tiene unidades de longitud y es una cantidad que se usa a menudo en mecánica estructural para el diseño de columnas. Si se *conocen* las áreas y los momentos de inercia, los radios de giro se determinan a partir de las fórmulas

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (10\text{-}6)$$

$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

La forma de estas ecuaciones es fácil de recordar, ya que es semejante a la que se usa para encontrar el momento de inercia para un área diferencial con respecto a un eje. Por ejemplo, $I_x = k_x^2 A$; mientras que para un área diferencial $dI_x = y^2 \, dA$.

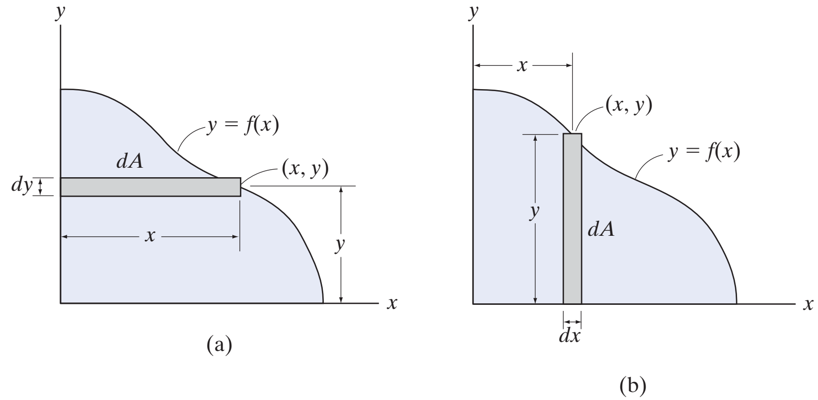



**Fig. 10-4**

## Procedimiento para el análisis

En la mayoría de los casos, el momento de inercia puede determinarse con una integración simple. El siguiente procedimiento muestra dos formas en las que se puede hacer esto.

- Si la curva que define la frontera del área se expresa como $y = f(x)$, entonces seleccione un elemento diferencial rectangular de modo que tenga una longitud finita y un ancho diferencial.
- El elemento debe estar ubicado de manera que interseque la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$.

### Caso 1

- Oriente el elemento de forma que su longitud sea *paralela* al eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia. Esta situación ocurre cuando el elemento rectangular que se muestra en la figura 10-4*a* se usa para determinar $I_x$ del área. Aquí, todo el elemento está a una distancia $y$ del eje $x$ puesto que tiene un espesor $dy$. Así, $I_x = \int y^2\, dA$. Para determinar $I_y$, el elemento se orienta de la manera que se muestra en la figura 10-4*b*. Este elemento se encuentra a la *misma* distancia $x$ del eje $y$ de manera que $I_y = \int x^2\, dA$.

### Caso 2

- La longitud del elemento puede estar orientada de manera *perpendicular* al eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia; sin embargo, la ecuación 10-1 *no es aplicable* ya que todos los puntos del elemento *no* se encuentran a la misma distancia del brazo de momento desde el eje. Por ejemplo, si el elemento rectangular de la figura 10-4*a* se usa para determinar $I_y$, primero será necesario calcular el momento de inercia del *elemento* con respecto a un eje paralelo al eje $y$ que pase por el centroide del elemento, y luego determinar el momento de inercia del *elemento* con respecto al eje $y$ por el teorema de los ejes paralelos. Mediante la integración de este resultado se obtendrá $I_y$. Vea los ejemplos 10.2 y 10.3.

## EJEMPLO 10.1

Determine el momento de inercia del área rectangular de la figura 10-5 con respecto a (a) el eje centroidal $x'$, (b) el eje $x_b$, que pasa por la base del rectángulo y (c) el polo o eje $z'$ perpendicular al plano $x'$-$y'$ y que pasa a través del centroide $C$.

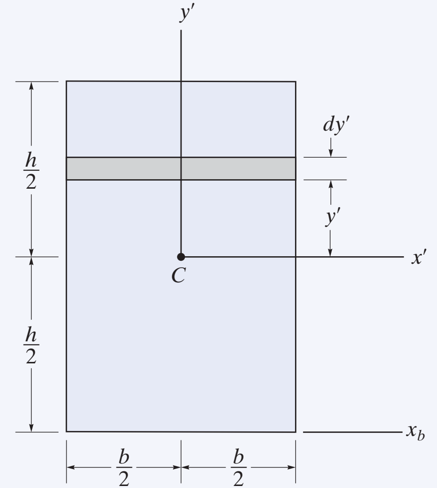



**Fig. 10-5**

### SOLUCIÓN (CASO 1)

**Parte (a).** Para la integración se elige el elemento diferencial que se muestra en la figura 10-5. Debido a su ubicación y orientación, *todo el elemento* está a una distancia $y'$ del eje $x'$. Aquí es necesario integrar desde $y' = -h/2$ a $y' = h/2$. Como $dA = b\,dy'$, entonces

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2\,dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2(b\,dy') = b\int_{-h/2}^{h/2} y'^2\,dy'$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Parte (b).** El momento de inercia con respecto a un eje que pase por la base del rectángulo se puede obtener usando el resultado de la parte (a) y aplicando el teorema de los ejes paralelos, ecuación 10-3.

$$I_{x_b} = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$

$$= \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

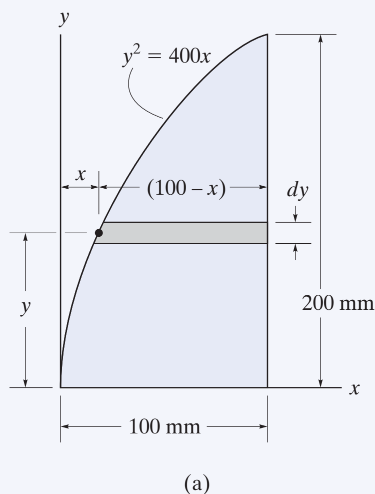
**Parte (c).** Para obtener el momento de inercia polar con respecto al punto $C$, debemos obtener primero $\bar{I}_{y'}$, la cual puede determinarse al intercambiar las dimensiones $b$ y $h$ en el resultado de la parte (a), es decir,

$$\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$$

Con la ecuación 10-2, el momento de inercia polar con respecto a $C$ es, por tanto,

$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}bh(h^2 + b^2) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 10.2




(a)

Determine el momento de inercia del área sombreada en gris de la figura 10-6*a*, con respecto al eje *x*.

### SOLUCIÓN I (CASO 1)

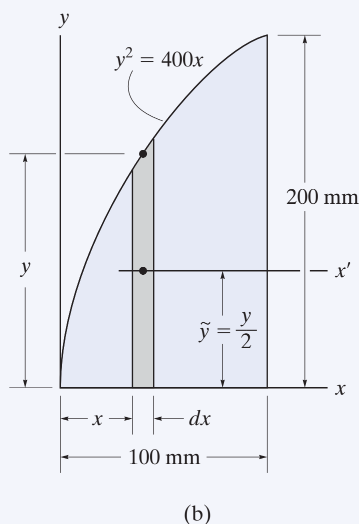
Para la integración se elige un elemento diferencial de área que sea *paralelo* al eje *x*, como se muestra en la figura 10-6*a*. Como este elemento tiene un espesor $dy$ e interseca la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$, su área es $dA = (100 - x)\,dy$. Además, el elemento se encuentra a la misma distancia $x$ desde el eje. Por consiguiente, al integrar con respecto a $y$, desde $y = 0$ hasta $y = 200$ mm, se obtiene

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_0^{200\text{ mm}} y^2(100 - x)\,dy$$

$$= \int_0^{200\text{ mm}} y^2\left(100 - \frac{y^2}{400}\right)dy = \int_0^{200\text{ mm}} \left(100y^2 - \frac{y^4}{400}\right)dy$$

$$= 107(10^6)\text{ mm}^4$$ ***Resp.***

### SOLUCIÓN II (CASO 2)




(b)

**Fig. 10-6**

Para la integración, se elige un elemento diferencial *paralelo* al eje $y$, como se muestra en la figura 10-6*b*. El elemento interseca la curva en el *punto arbitrario* $(x, y)$. En este caso, *no* todos los puntos del elemento se encuentran a la misma distancia del eje $x$, y por lo tanto debe usarse el teorema de los ejes paralelos para determinar el *momento de inercia del elemento* con respecto a este eje. Para un rectángulo con base $b$ y altura $h$, el momento de inercia con respecto a su eje centroidal ya fue determinado en la parte (a) del ejemplo 10.1. Se encontró que $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$. Para el elemento diferencial mostrado en la figura 10-6*b*, $b = dx$ y $h = y$, y entonces $d\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}dx\,y^3$. Como el centroide del elemento está en $\tilde{y} = y/2$ desde el eje $x$, el momento de inercia del elemento con respecto a este eje es

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA\,\tilde{y}^2 = \frac{1}{12}dx\,y^3 + y\,dx\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}y^3\,dx$$

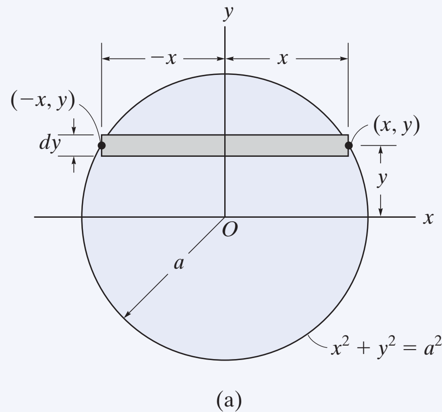
(Este resultado también puede obtenerse a partir de la parte (b) del ejemplo 10.1). Al integrar con respecto a $x$, desde $x = 0$ hasta $x = 100$ mm, resulta

$$I_x = \int dI_x = \int_0^{100\text{ mm}} \frac{1}{3}y^3\,dx = \int_0^{100\text{ mm}} \frac{1}{3}(400x)^{3/2}\,dx$$

$$= 107(10^6)\text{ mm}^4$$ ***Resp.***

## EJEMPLO 10.3

Determine el momento de inercia con respecto al eje $x$ del área circular que se muestra en la figura 10-7$a$.



(a)

### SOLUCIÓN I (CASO 1)

Si usamos el elemento diferencial que se muestra en la figura 10-7$a$, como $dA = 2x\,dy$, tenemos

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_A y^2(2x)\,dy$$

$$= \int_{-a}^{a} y^2\left(2\sqrt{a^2 - y^2}\right)dy = \frac{\pi a^4}{4} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

### SOLUCIÓN II (CASO 2)

Cuando se elige el elemento diferencial que se muestra en la figura 10-7$b$, el centroide del elemento se encuentra en el eje $x$, y como $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ para un rectángulo, tenemos

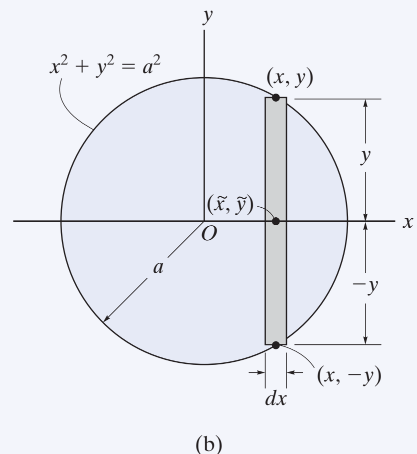
$$dI_x = \frac{1}{12}dx(2y)^3$$

$$= \frac{2}{3}y^3\,dx$$

Integrar con respecto a $x$ resulta

$$I_x = \int_{-a}^{a}\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{\pi a^4}{4} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** por comparación, la solución I requiere la realización de menos cálculos. Por tanto, si una integral que utiliza un elemento particular parece difícil de evaluar, trate de resolver el problema con un elemento orientado en la otra dirección.



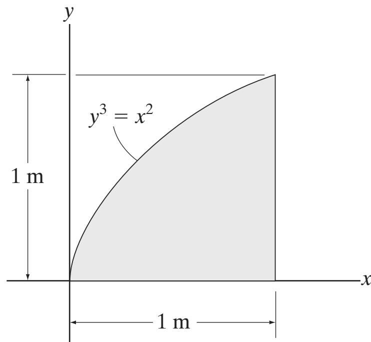
(b)

**Fig. 10-7**

10

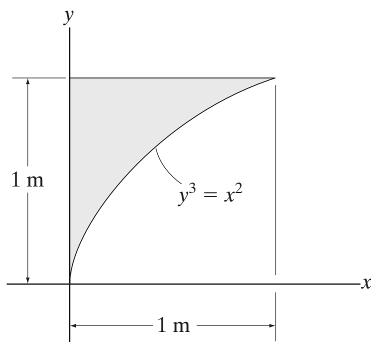
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F10-1.** Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje $x$.



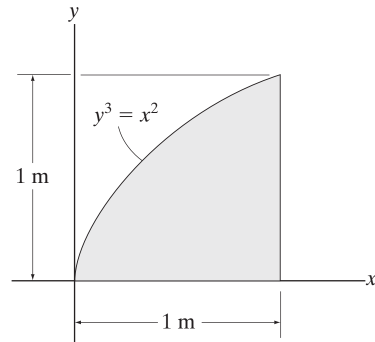

F10-1

**F10-2.** Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje $x$.



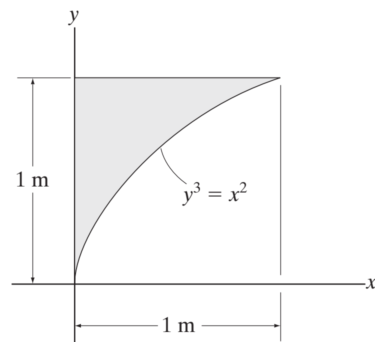

F10-2

**F10-3.** Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje $y$.




F10-3

**F10-4.** Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje $y$.



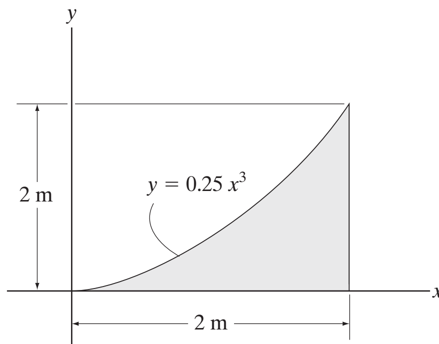

F10-4

10

# PROBLEMAS

•**10-1.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

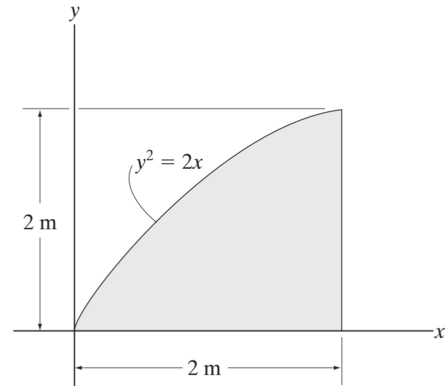
**10-2.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-1/2**

•**10-5.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

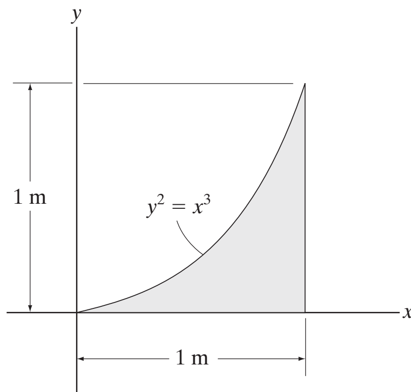
**10-6.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-5/6**

**10-3.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

***10-4.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.

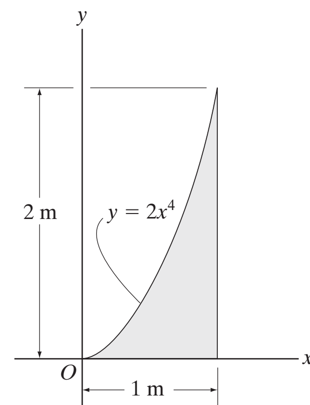



**Probs. 10-3/4**

**10-7.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

***10-8.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.

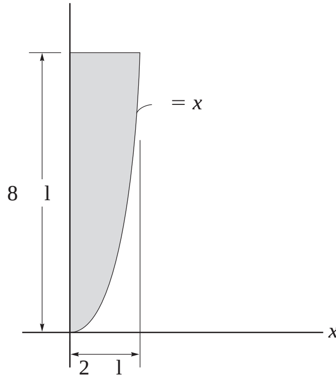
•**10-9.** Determine el momento de inercia polar del área con respecto al eje $z$ que pasa a través del punto $O$.




**Probs. 10-7/8/9**

**10-10.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

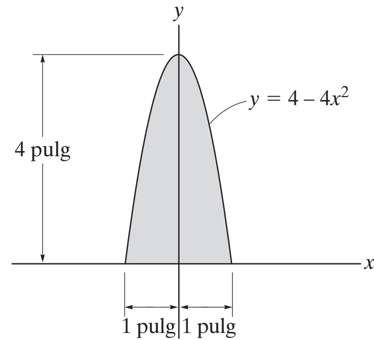
**10-11.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




Probs. 10-10/11

**10-14.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$. Con elementos rectangulares diferenciales, resuelva el problema de dos maneras: (a) con espesor $dx$, y (b) con espesor $dy$.

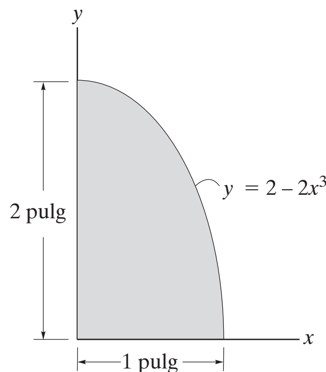
**10-15.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$. Con elementos rectangulares diferenciales, resuelva el problema de dos maneras: (a) con espesor $dx$, y (b) con espesor $dy$.




Probs. 10-14/15

*__10-12.__ Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

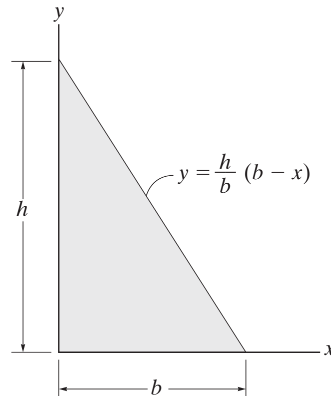
•**10-13.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




Probs. 10-12/13

*__10-16.__ Determine el momento de inercia del área triangular con respecto al eje $x$.

•**10-17.** Determine el momento de inercia del área triangular con respecto al eje $y$.

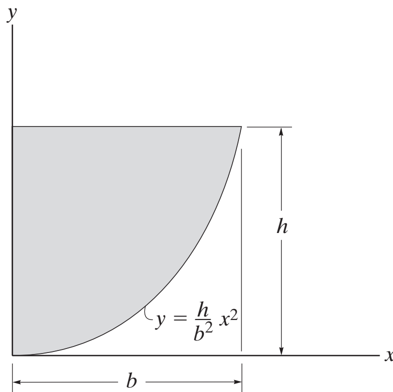



Probs. 10-16/17

10

**10-18.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

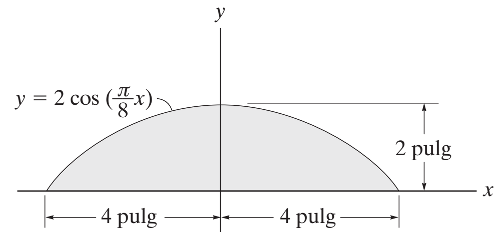
**10-19.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-18/19**

**10-22.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

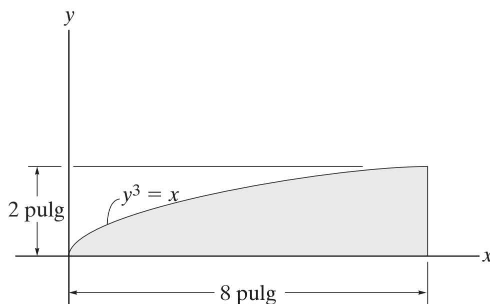
**10-23.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-22/23**

***10-20.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

•**10-21.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.

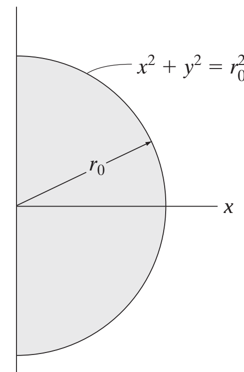



**Probs. 10-20/21**

***10-24.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.

•**10-25.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.

**10-26.** Determine el momento de inercia polar del área con respecto al eje $z$ que pasa a través del punto $O$.




**Probs. 10-24/25/26**

## 10.4 Momentos de inercia para áreas compuestas

Un área compuesta consiste en una serie de partes o formas "más simples" conectadas, como rectángulos, triángulos y círculos. Siempre que el momento de inercia de cada una de esas partes se conoce o puede determinarse con respecto a un eje común, entonces el momento de inercia del área compuesta es igual a la *suma algebraica* de los momentos de inercia de todas sus partes.

### Procedimiento para el análisis

El momento de inercia para un área compuesta con respecto a un eje de referencia puede determinarse por el siguiente procedimiento.

**Partes compuestas.**

- Con un croquis, divida el área en sus partes componentes e indique la distancia perpendicular desde el centroide de cada parte hasta el eje de referencia.

**Teorema de los ejes paralelos.**

- Si el eje centroidal para cada parte no coincide con el eje de referencia, deberá usarse el teorema de los ejes paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, para determinar el momento de inercia de la parte con respecto al eje de referencia. Para el cálculo de $\bar{I}$ use la tabla que aparece en la cubierta posterior interna del libro.

**Suma.**

- El momento de inercia de toda el área con respecto al eje de referencia se determina por la suma de los resultados de sus partes componentes con respecto a este eje.
- Si una parte componente tiene un "agujero", su momento de inercia se encuentra al "restar" el momento de inercia del agujero del momento de inercia de toda la parte, incluido el agujero.





Para efectuar el diseño o análisis de esta viga en forma de T, los ingenieros deben ser capaces de localizar el centroide del área de su sección transversal, y después encontrar el momento de inercia de esta área con respecto al eje centroidal.

## EJEMPLO 10.4

Determine el momento de inercia del área que se muestra en la figura 10-8*a* con respecto al eje *x*.

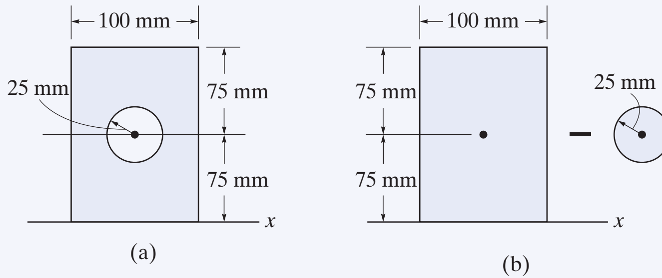



**Fig. 10-8**

### SOLUCIÓN

**Partes compuestas.** El área puede obtenerse al *restar* el círculo del rectángulo de la figura 10-8*b*. El centroide de cada área está ubicado en la figura.

**Teorema de los ejes paralelos.** Los momentos de inercia con respecto al eje *x* se determinan con el teorema de los ejes paralelos y los datos proporcionados en la tabla de la cubierta posterior interna de este libro.

*Círculo*

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\text{ mm}^4$$

*Rectángulo*

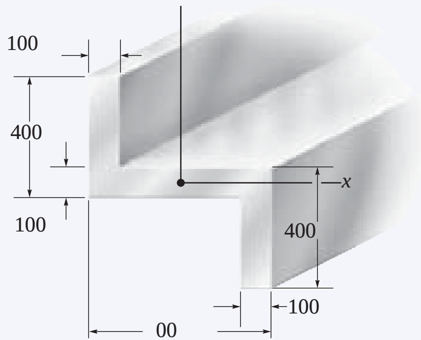
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\text{ mm}^4$$

**Suma.** Entonces, el momento de inercia del área compuesta es

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

10

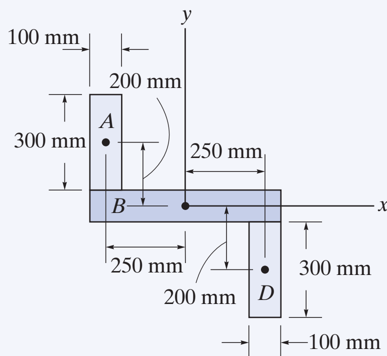
## EJEMPLO 10.5




Determine los momentos de inercia para el área de la sección transversal del elemento que se muestra en la figura 10-9*a* con respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

### SOLUCIÓN

**Partes compuestas.** La sección transversal puede subdividirse en las tres áreas rectangulares *A*, *B* y *D* que se muestran en la figura 10-9*b*. Para efectuar el cálculo, el centroide de cada uno de esos rectángulos está localizado en la figura.




(b)

**Fig. 10-9**

**Teorema de los ejes paralelos.** Con base en la tabla de la cubierta posterior interna de este libro, o en el ejemplo 10.1, el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{12}bh^3$. Por lo tanto, con el teorema de los ejes paralelos para los rectángulos *A* y *D*, los cálculos son como sigue:

*Rectángulos A y D*

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$

$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$

$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

*Rectángulo B*

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\text{ mm}^4$$

**Suma.** Entonces, los momentos de inercia para toda la sección transversal son

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$

$$= 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

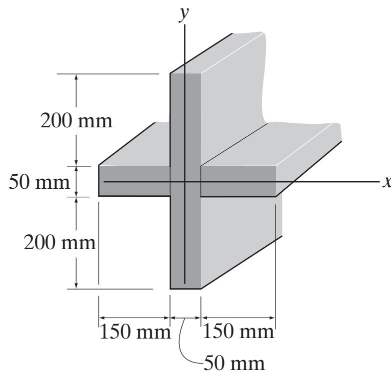
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

$$= 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

10

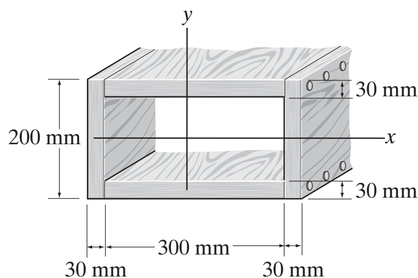
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F10-5.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes centroidales $x$ y $y$.



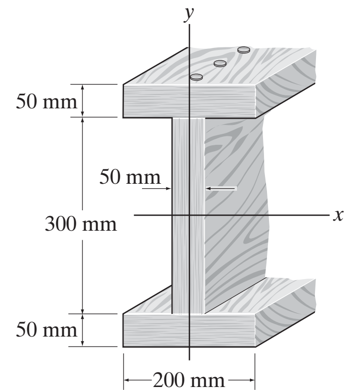

**F10-5**

**F10-6.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes centroidales $x$ y $y$.



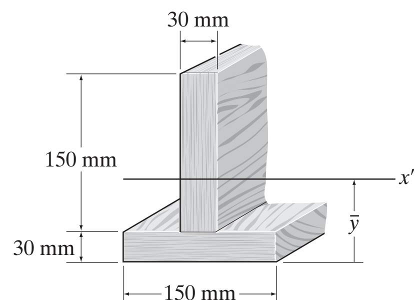

**F10-6**

**F10-7.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal del canal con respecto al eje $y$.




**F10-7**

**F10-8.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga en forma de T, con respecto al eje $x'$ que pasa por el centroide de la sección transversal.



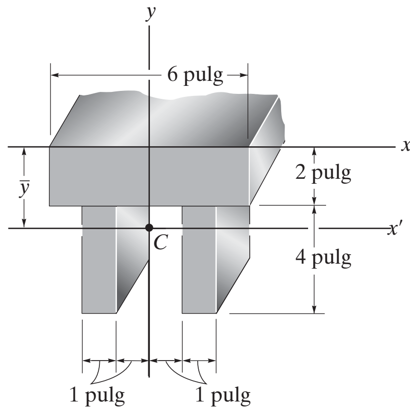

**F10-8**

## PROBLEMAS

**10-27.** Determine la distancia $\overline{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga; después determine el momento de inercia con respecto al eje $x'$.

***10-28.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.

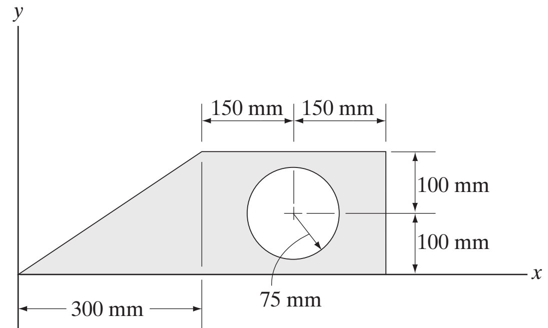
**•10-29.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-27/28/29**

***10-32.** Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje $x$.

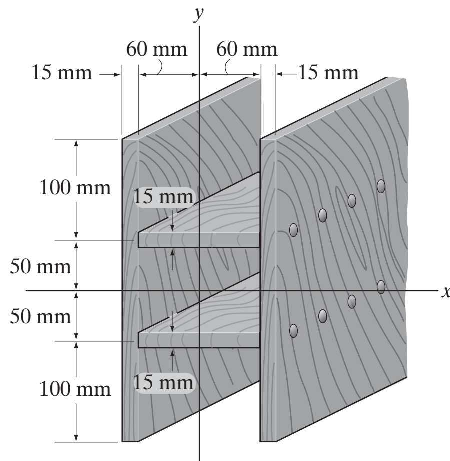
**•10-33.** Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-32/33**

**10-30.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.

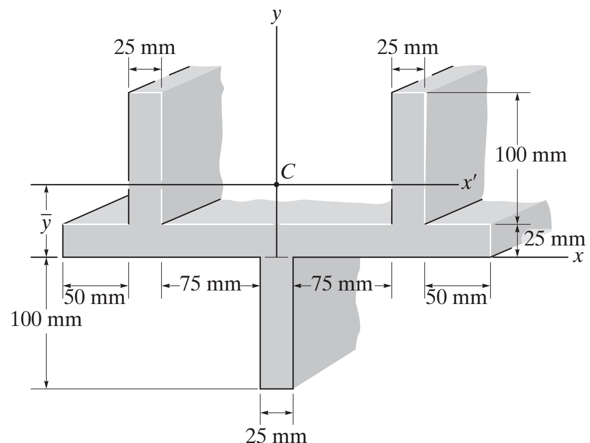
**10-31.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-30/31**

**10-34.** Determine la distancia $\overline{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga; determine el momento de inercia con respecto al eje $x'$.

**10-35.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.

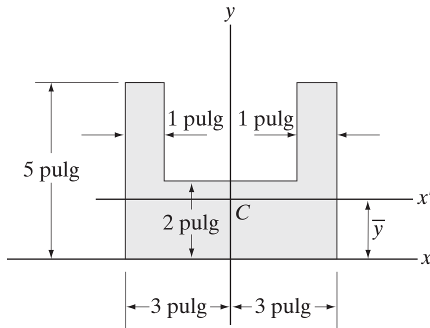



**Probs. 10-34/35**

10

*10-36. Localice el centroide $\overline{y}$ del área compuesta, después determine el momento de inercia de esta área con respecto al eje centroidal $x'$.

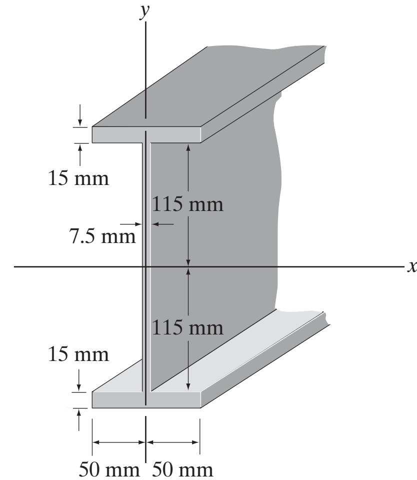
•10-37. Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-36/37**

•10-41. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.

10-42. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.

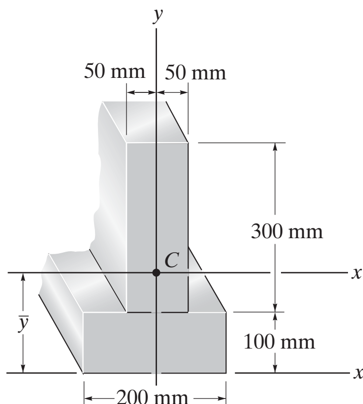



**Probs. 10-41/42**

10-38. Determine la distancia $\overline{y}$ al centroide del área de la sección transversal de la viga; después encuentre el momento de inercia con respecto al eje $x'$.

10-39. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.

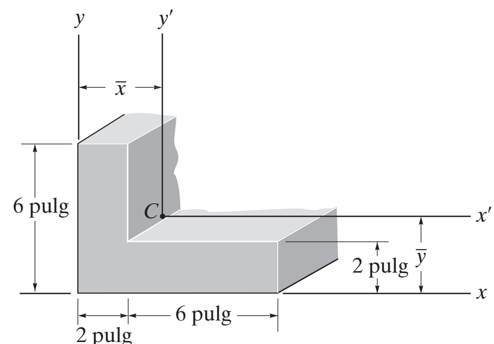
*10-40. Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-38/39/40**

10-43. Localice el centroide $\overline{y}$ del área de la sección transversal del ángulo; después, encuentre el momento de inercia $I_{x'}$ con respecto al eje centroidal $x'$.

*10-44. Localice el centroide $\overline{x}$ del área de la sección transversal del ángulo; después, encuentre el momento de inercia $I_{y'}$ con respecto al eje centroidal $y'$.

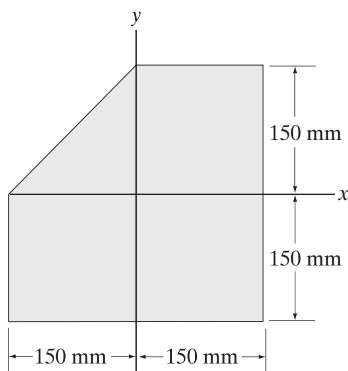



**Probs. 10-43/44**

10

**•10-45.** Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje *x*.

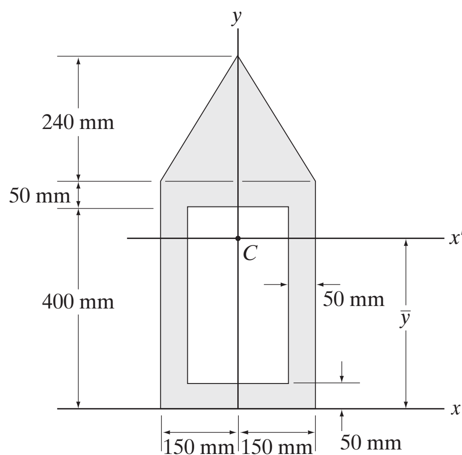
**10-46.** Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje *y*.




**Probs. 10-45/46**

**10-47.** Determine el momento de inercia del área compuesta con respecto al eje centroidal *y*.

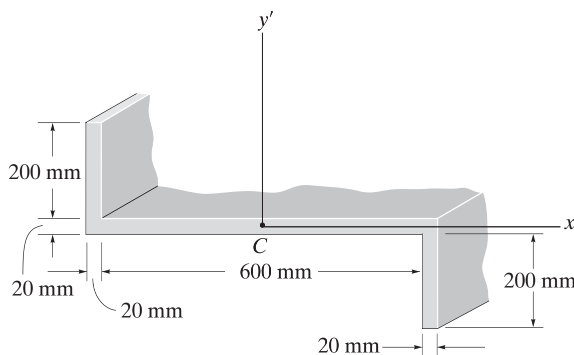
***10-48.** Localice el centroide $\bar{y}$ del área compuesta, después determine el momento de inercia de esta área con respecto al eje $x'$.




**Probs. 10-47/48**

**•10-49.** Determine el momento de inercia $I_{x'}$ de la sección. El origen de coordenadas está en el centroide *C*.

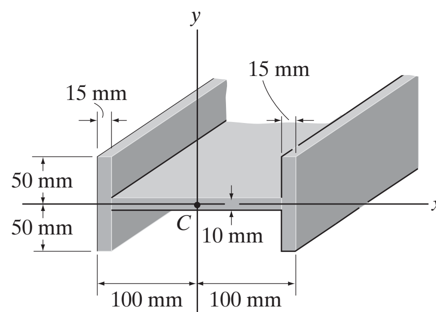
**10-50.** Determine el momento de inercia $I_{y'}$ de la sección. El origen de coordenadas está en el centroide *C*.




**Probs. 10-49/50**

**10-51.** Determine el momento de inercia $I_x$ de la viga con respecto al eje centroidal *x*.

***10-52.** Determine el momento de inercia $I_y$ de la viga con respecto al eje centroidal *y*.

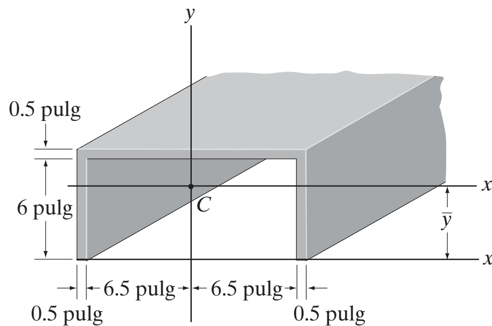



**Probs. 10-51/52**

10

•**10-53.** Localice el centroide $\overline{y}$ del área de la sección transversal del canal, después determine el momento de inercia de esta área con respecto al eje centroidal $x'$.

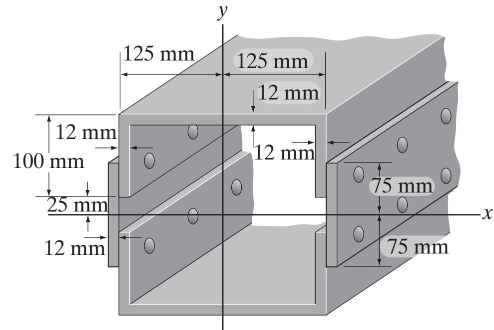
**10-54.** Determine el momento de inercia del área del canal con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-53/54**

•**10-57.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.

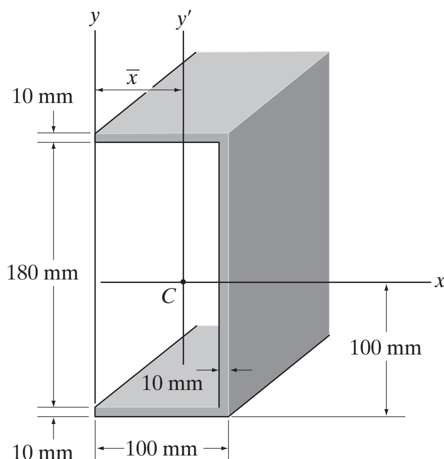
**10-58.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$.




**Probs. 10-57/58**

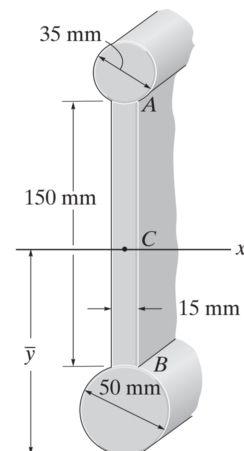
**10-55.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje $x$.

*__10-56.__ Localice el centroide $\overline{x}$ del área de la sección transversal de la viga, y después determine el momento de inercia de esta área con respecto al eje centroidal $y'$.




**Probs. 10-55/56**

**10-59.** Determine el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x'$ que pasa a través del centroide $C$ de la sección transversal. $\overline{y} = 104.3$ mm.




**Prob. 10-59**

## *10.5 Producto de inercia para un área

En la siguiente sección se mostrará que la propiedad de un área, llamada el producto de inercia, es necesaria a fin de determinar los momentos de inercia *máximo* y *mínimo* para el área. Estos valores máximo y mínimo son propiedades importantes necesarias para diseñar elementos estructurales y mecánicos como vigas, columnas y flechas.

El *producto de inercia* del área de la figura 10-10 con respecto a los ejes $x$ y $y$ se define como

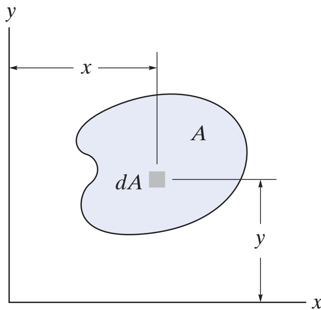
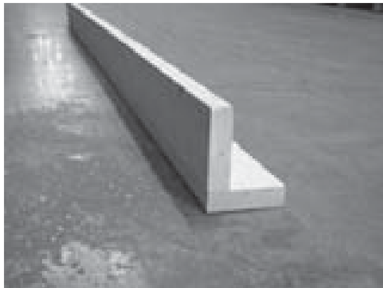



Fig. 10-10

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA \qquad (10\text{-}7)$$

Si el elemento de área elegido tiene un tamaño diferencial en dos direcciones, como se muestra en la figura 10-10, para evaluar $I_{xy}$ debe realizarse una integración doble. Sin embargo, con frecuencia es más fácil elegir un elemento que tenga un tamaño diferencial o espesor en sólo una dirección, en cuyo caso la evaluación requiere sólo una integración simple (vea el ejemplo 10.6).

Igual que el momento de inercia, el producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia, por ejemplo, $m^4$, $mm^4$ o $pies^4$, $pulg^4$. Sin embargo, como $x$ o $y$ pueden ser cantidades negativas, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes coordenados. Por ejemplo, el producto de inercia $I_{xy}$ para área será *cero* si el eje $x$, o el eje $y$, es un eje de *simetría* para el área, como en la figura 10-11. Aquí, cada elemento $dA$ localizado en el punto $(x, y)$ tiene un elemento $dA$ correspondiente en $(x, -y)$. Como los productos de inercia para esos elementos son, respectivamente, $xy\, dA$ y $-xy\, dA$, la suma algebraica o integración de todos los elementos que se elijan de esta manera se cancelarán uno a uno. En consecuencia, el producto de inercia para el área total se convierte en cero. De la definición también se infiere que el "signo" de esta cantidad depende del cuadrante donde se ubique el área. Como se muestra en la figura 10-12, si el área se gira de un cuadrante a otro, el signo de $I_{xy}$ cambiará.



La efectividad de esta viga para resistir la flexión puede determinarse una vez que se conozcan sus momentos de inercia y su producto de inercia.

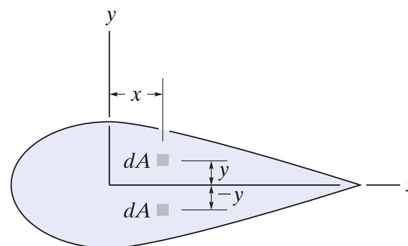



Fig. 10-11

10

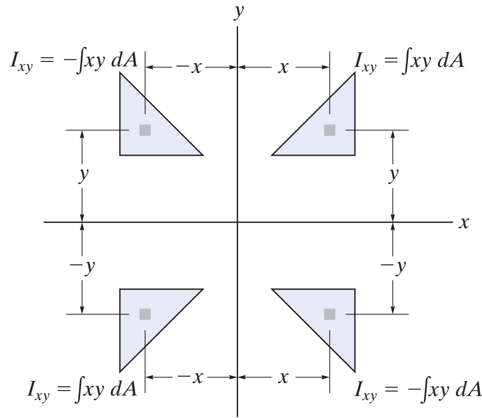



**Fig. 10-12**

**Teorema de los ejes paralelos.** Considere el área sombreada que se muestra en la figura 10-13, donde $x'$ y $y'$ representan un conjunto de ejes que pasan a través del *centroide del área*, y $x$ y $y$ representan un conjunto correspondiente de ejes paralelos. Como el producto de inercia de $dA$ con respecto a los ejes $x$ y $y$ es $dI_{xy} = (x' + d_x)(y' + d_y)\, dA$, entonces para toda el área,

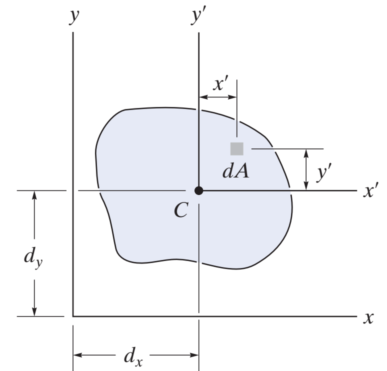



**Fig. 10-13**

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\, dA$$

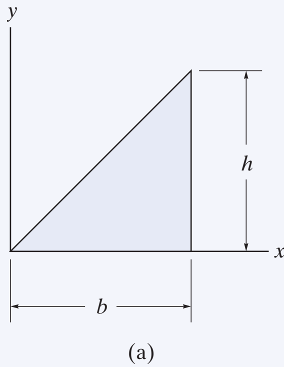
$$= \int_A x'y'\, dA + d_x \int_A y'\, dA + d_y \int_A x'\, dA + d_x d_y \int_A dA$$

El primer término del lado derecho representa el producto de inercia del área con respecto al eje centroidal, $\bar{I}_{x'y'}$. Las integrales en los términos segundo y tercero son cero, ya que los momentos del área se toman con respecto al eje centroidal. Al observar que la cuarta integral representa el área total $A$, el teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia se convierte en

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \tag{10-8}$$

Es importante que los *signos algebraicos* para $d_x$ y $d_y$ se mantengan al aplicar esta ecuación.

## EJEMPLO 10.6




(a)

Determine el producto de inercia $I_{xy}$ del triángulo que se muestra en la figura 10-14*a*.

### SOLUCIÓN I

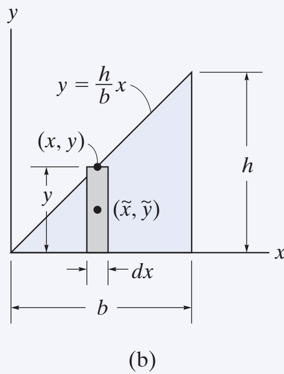
Un elemento diferencial con espesor $dx$, como se muestra en la figura 10-14*b*, tiene un área $dA = y\,dx$. El producto de inercia de este elemento con respecto a los ejes $x$ y $y$ se determina con el teorema de los ejes paralelos,

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

donde $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ ubican el *centroide* del elemento o el origen de los ejes $x'$, $y'$. (Vea la figura 10-13). Como $d\bar{I}_{x'y'} = 0$, debido a la simetría, y $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y/2$, entonces

$$dI_{xy} = 0 + (y\,dx)x\left(\frac{y}{2}\right) = \left(\frac{h}{b}x\,dx\right)x\left(\frac{h}{2b}x\right)$$

$$= \frac{h^2}{2b^2}x^3\,dx$$




(b)

Al integrar con respecto a $x$ desde $x = 0$ hasta $x = b$ se obtiene

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^2h^2}{8} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

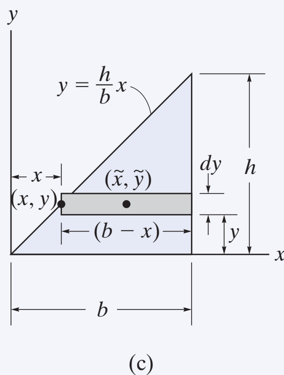
### SOLUCIÓN II

También puede usarse el elemento diferencial que tiene un espesor $dy$, como se muestra en la figura 10-14*c*. Su área es $dA = (b - x)\,dy$. El *centroide* se localiza en el punto $\tilde{x} = x + (b - x)/2 = (b + x)/2$, $\tilde{y} = y$, por lo que el producto de inercia del elemento se vuelve

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + dA\,\tilde{x}\,\tilde{y}$$

$$= 0 + (b - x)\,dy\left(\frac{b + x}{2}\right)y$$

$$= \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy\left[\frac{b + (b/h)y}{2}\right]y = \frac{1}{2}y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$




(c)

**Fig. 10-14**

Al integrar con respecto a $y$ desde $y = 0$ hasta $y = h$ resulta

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^h y\left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy = \frac{b^2h^2}{8} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

10

## EJEMPLO 10.7

Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal del elemento que se muestra en la figura 10-15*a*, con respecto a los ejes centroidales *x* y *y*.

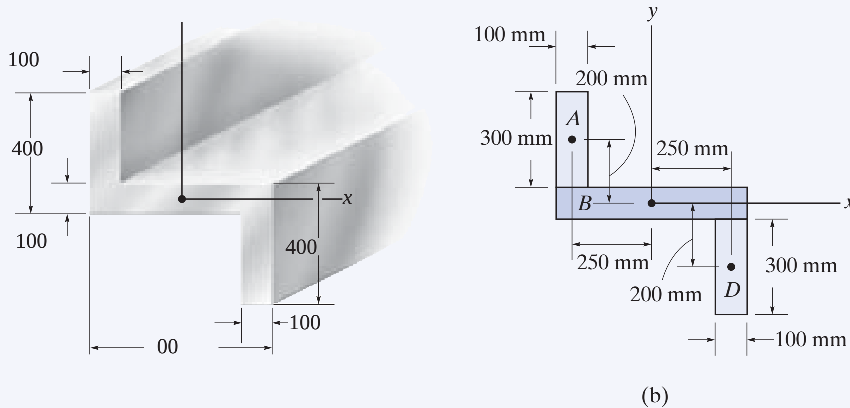



**Fig. 10-15**

### SOLUCIÓN

Igual que en el ejemplo 10.5, la sección transversal puede subdividirse en tres áreas rectangulares compuestas *A*, *B* y *D*, figura 10-15*b*. Las coordenadas para el centroide de cada uno de esos rectángulos se muestran en la figura. Debido a la simetría, el producto de inercia de *cada rectángulo* es *cero* con respecto a cada conjunto de ejes $x'$, $y'$ que pasan a través del centroide de cada rectángulo. Si usamos el teorema de los ejes paralelos, tenemos

*Rectángulo A*

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$
$$= 0 + (300)(100)(-250)(200) = -1.50(10^9)\text{ mm}^4$$

*Rectángulo B*

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$
$$= 0 + 0 = 0$$

*Rectángulo D*

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + Ad_x d_y$$
$$= 0 + (300)(100)(250)(-200) = -1.50(10^9)\text{ mm}^4$$

Por tanto, el producto de inercia de toda la sección transversal es

$$I_{xy} = -1.50(10^9) + 0 - 1.50(10^9) = -3.00(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** este resultado negativo se debe al hecho de que los rectángulos *A* y *D* tienen centroides ubicados con coordenadas *x* negativa y *y* negativa, respectivamente.

## *10.6 Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados

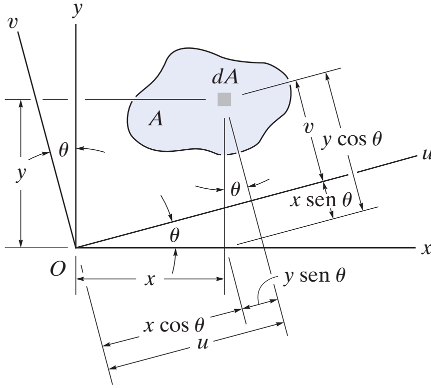



**Fig. 10-16**

En el diseño estructural y mecánico, a veces es necesario calcular los momentos y el producto de inercia de $I_u$, $I_v$ e $I_{uv}$ para un área con respecto a un conjunto de ejes inclinados $u$ y $v$ cuando *se conocen* los valores para $\theta$, $I_x$, $I_y$ e $I_{xy}$. Para hacer esto usaremos *ecuaciones de transformación*, las cuales relacionan las coordenadas $x$, $y$ y $u$, $v$. A partir de la figura 10-16, estas ecuaciones son

$$u = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$v = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Con estas ecuaciones, los momentos y el producto de inercia de $dA$ con respecto a los ejes $u$ y $v$ se convierten

$$dI_u = v^2\,dA = (y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$
$$dI_v = u^2\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\,dA$$
$$dI_{uv} = uv\,dA = (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,dA$$

Al desarrollar cada expresión e integrarlas, así como tener presente que $I_x = \int y^2\,dA$, $I_y = \int x^2\,dA$ e $I_{xy} = \int xy\,dA$, obtenemos

$$I_u = I_x\cos^2\theta + I_y\,\mathrm{sen}^2\theta - 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_v = I_x\,\mathrm{sen}^2\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_{uv} = I_x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - I_y\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse mediante las identidades trigonométricas $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$, en cuyo caso

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$
$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta \qquad (10\text{-}9)$$
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Observe que si se suman la primera y la segunda ecuaciones, podemos mostrar que el momento de inercia polar con respecto al eje $z$ que pasa a través del punto $O$ es, como se esperaba, *independiente* de la orientación de los ejes $u$ y $v$; es decir,

$$J_O = I_u + I_v = I_x + I_y$$

**Momentos de inercia principales.** Las ecuaciones 10-9 muestran que $I_u$, $I_v$ e $I_{uv}$ dependen del ángulo de inclinación $\theta$ de los ejes $u$, $v$. Ahora determinaremos la orientación de esos ejes con respecto a los cuales los momentos de inercia del área son máximo y mínimo. Este sistema particular de ejes se llama *ejes principales* del área, y los momentos de inercia correspondientes con respecto a esos ejes se llaman *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes principales para cada origen $O$ elegido. Sin embargo, para el diseño estructural y mecánico, el origen $O$ se ubica en el centroide del área.

El ángulo que define la orientación de los ejes principales puede encontrarse al diferenciar la primera de las ecuaciones 10-9 con respecto a $\theta$ y establecer el resultado igual a cero. De modo que,

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\text{sen } 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Por tanto, en $\theta = \theta_p$,

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \qquad (10\text{-}10)$$

Las dos raíces, $\theta_{p_1}$ y $\theta_{p_2}$ de esta ecuación están separadas en 90° y especifican la inclinación de los ejes principales. Para sustituirlos en la ecuación 10-9, debemos encontrar primero el seno y el coseno de $2\theta_{p_1}$ y $2\theta_{p_2}$. Esto puede hacerse mediante los triángulos de la figura 10-17, que se basan en la ecuación 10-10.

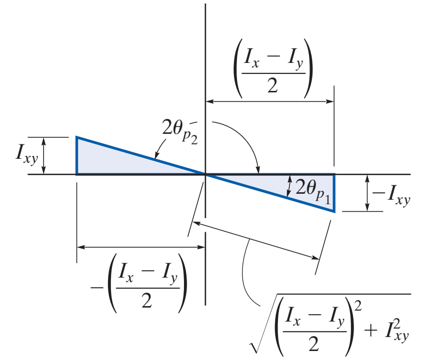


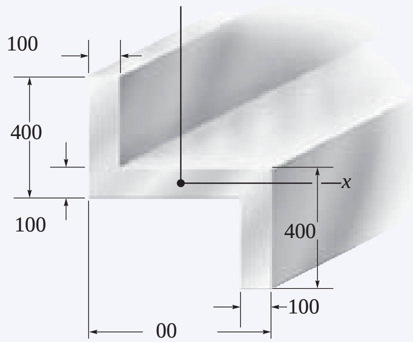
**Fig. 10-17**

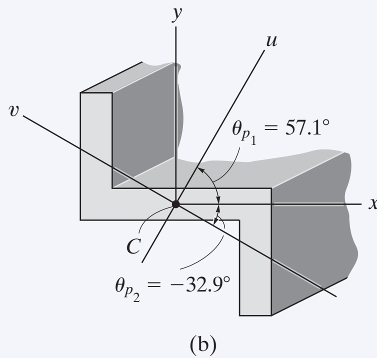
Si sustituimos cada una de las relaciones de seno y coseno en la primera o la segunda de las ecuaciones 10-9, y simplificamos, obtenemos

$$I_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (10\text{-}11)$$

Según el signo que se elija, este resultado proporciona el momento de inercia máximo o mínimo para el área. Además, si las relaciones trigonométricas anteriores para $\theta_{p_1}$ y $\theta_{p_2}$ se sustituyen en la tercera de las ecuaciones 10-9, se puede ver que $I_{uv} = 0$; es decir, el *producto de inercia con respecto a los ejes principales es cero*. Como en la sección 10.6 se indicó que el producto de inercia es cero con respecto a cualquier eje simétrico, se infiere que *cualquier eje simétrico representa un eje principal de inercia para el área*.

## EJEMPLO 10.8




(b)

**Fig. 10-18**

Determine los momentos de inercia principales y la orientación de los ejes principales para el área de sección transversal del elemento que se muestra en la figura 10-18*a* con respecto a un eje que pase a través del centroide.

### SOLUCIÓN

Los momentos y productos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes *x*, *y* se han determinado en los ejemplos 10.5 y 10.7. Los resultados son

$$I_x = 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \quad I_y = 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -3.00(10^9)\text{ mm}^4$$

Con la ecuación 10-10, los ángulos de inclinación de los ejes principales *u* y *v* son

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{-[-3.00(10^9)]}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

$$2\theta_p = -65.8° \text{ y } 114.2°$$

Entonces, por inspección de la figura 10-18*b*,

$$\theta_{p_2} = -32.9° \quad \text{y} \quad \theta_{p_1} = 57.1° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Los momentos de inercia principales con respecto a estos ejes se determinan con la ecuación 10-11. Por consiguiente,

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2}$$

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9)$$

o bien

$$I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 0.960(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**NOTA:** el momento de inercia máximo, $I_{\text{máx}} = 7.54(10^9)$ mm$^4$, ocurre con respecto al eje *u*, ya que *por inspección* se observa que la mayor parte del área de la sección transversal está muy alejada de este eje. O, dicho de otra manera, $I_{\text{máx}}$ ocurre con respecto al eje *u* ya que éste se encuentra ubicado dentro de ±45° del eje *y*, el cual tiene el mayor valor de $I$ ($I_y > I_x$). Además, esto puede concluirse también al sustituir los datos con $\theta = 57.1°$ en la primera de las ecuaciones 10-9 y al despejar $I_u$.

10

# *10.7 Círculo de Mohr para momentos de inercia

Las ecuaciones 10-9, 10-10 y 10-11 tienen una solución gráfica que, por lo general, es fácil de usar y recordar. Al elevar al cuadrado la primera y la tercera de las ecuaciones 10-9 y sumarlas, se encuentra que

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

Aquí, $I_x$, $I_y$ e $I_{xy}$ son *constantes conocidas*. Así, la ecuación anterior puede escribirse en forma compacta como

$$(I_u - a)^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

Cuando esta ecuación se grafica sobre un sistema de ejes que representan los respectivos momento de inercia y producto de inercia, como se muestra en la figura 10-19, la gráfica resultante representa un *círculo* de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

con su centro ubicado en el punto $(a, 0)$, donde $a = (I_x + I_y)/2$. El círculo construido de esta manera se llama *círculo de Mohr*, en honor del ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918).

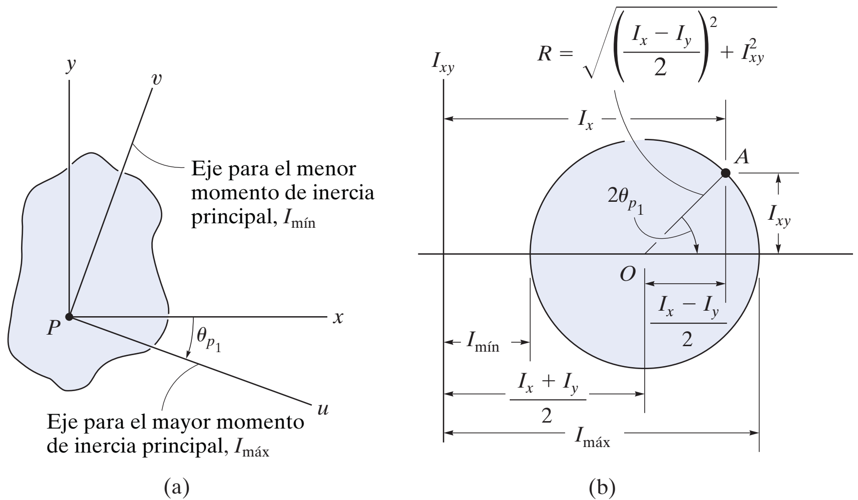



**Fig. 10-19**

## Procedimiento para el análisis

El principal propósito de usar aquí el círculo de Mohr es tener un medio conveniente para encontrar los momentos de inercia principales para el área. El siguiente procedimiento proporciona un método adecuado para lograrlo.

### Determine $I_x$, $I_y$ e $I_{xy}$.

- Establezca los ejes $x$, $y$ y determine $I_x$, $I_y$ e $I_{xy}$, figura 10-19*a*.

### Construya el círculo.

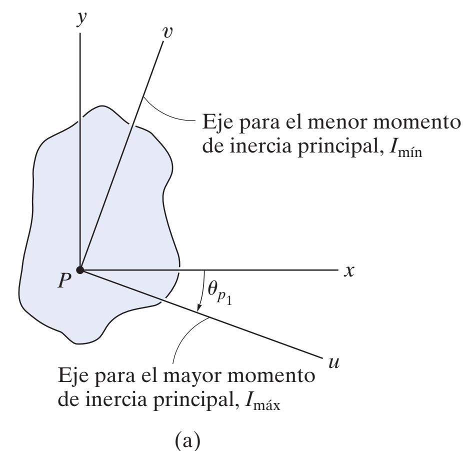
- Construya un sistema coordenado rectangular de modo que la abscisa represente el momento de inercia $I$, y la ordenada represente el producto de inercia $I_{xy}$, figura 10-19*b*.
- Determine el centro $O$ del círculo que se localiza a una distancia $(I_x + I_y)/2$ del origen, y grafique el punto $A$ de referencia con coordenadas $(I_x, I_{xy})$. Recuerde que $I_x$ es siempre positivo, mientras que $I_{xy}$ puede ser positivo o negativo.
- Conecte el punto de referencia $A$ con el centro del círculo y determine la distancia $OA$ por trigonometría. Esta distancia representa el radio del círculo, figura 10-19*b*. Por último, trace el círculo.

### Momentos principales de inercia.

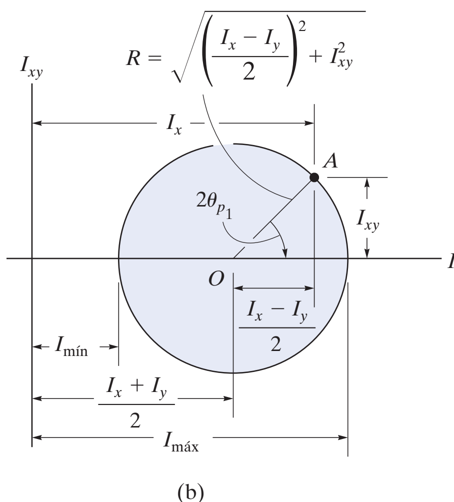
- Los puntos donde el círculo interseca al eje $I$ proporcionan los valores de los momentos de inercia principales $I_{mín}$ e $I_{máx}$. Observe que, tal como se esperaba, el *producto de inercia será cero en estos puntos*, figura 10-19*b*.

### Ejes principales.

- Para encontrar la orientación del eje principal mayor, determine por trigonometría el ángulo $2\theta_{p_1}$, *medido desde el radio OA hasta el eje I positivo*, figura 10-19*b*. Este ángulo representa el *doble* del ángulo desde el eje $x$ hasta el eje del momento de inercia máximo $I_{máx}$, figura 10-19*a*. Tanto el ángulo sobre el círculo, $2\theta_{p_1}$, como el ángulo $\theta_{p_1}$, *deben medirse en el mismo sentido*, como se muestra en la figura 10-19. El eje para el momento de inercia mínimo $I_{mín}$ es perpendicular al eje para $I_{máx}$.




(a)



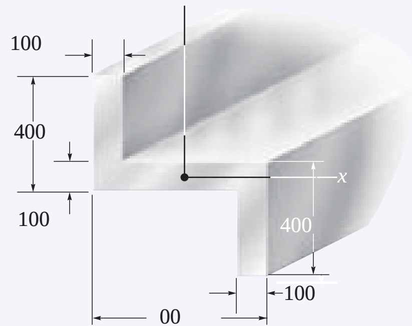

(b)

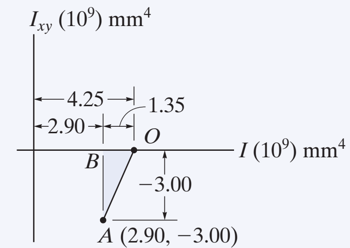
**Fig. 10-19**

Con trigonometría puede verificarse que el procedimiento anterior está de acuerdo con las ecuaciones desarrolladas en la sección 10.6.

## EJEMPLO 10.9

Con el círculo de Mohr, determine los momentos de inercia principales y la orientación de los ejes principales mayores para el área de la sección transversal de la viga que se muestra en la figura 10-20*a*, con respecto a un eje que pase a través del centroide.




(b)

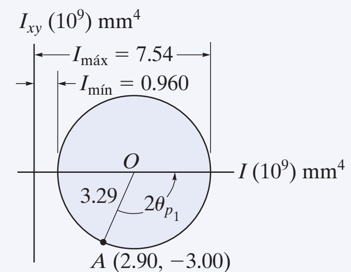
### SOLUCIÓN

**Determine $I_x$, $I_y$, $I_{xy}$.** Los momentos de inercia y el producto de inercia se determinaron en los ejemplos 10.5 y 10.7 con respecto a los ejes $x$, $y$ mostrados en la figura 10-20*a*. Los resultados son $I_x = 2.90(10^9)$ mm$^4$, $I_y = 5.60(10^9)$ mm$^4$ e $I_{xy} = -3.00(10^9)$ mm$^4$.

**Construya el círculo.** Los ejes $I$ e $I_{xy}$ se muestran en la figura 10-20*b*. El centro del círculo $O$ se encuentra a una distancia $(I_x + I_y)/2 = (2.90 + 5.60)/2 = 4.25$ del origen. Cuando el punto de referencia $A(I_x, I_{xy})$ o $A(2.90, -3.00)$ se conecta al punto $O$, el radio $OA$ se determina a partir del triángulo $OBA$ con el teorema de Pitágoras.

$$OA = \sqrt{(1.35)^2 + (-3.00)^2} = 3.29$$

El círculo está construido en la figura 10-20*c*.




(c)

**Momentos de inercia principales.** El círculo interseca el eje $I$ en los puntos (7.54, 0) y (0.960, 0). Por tanto,

$$I_{máx} = (4.25 + 3.29)10^9 = 7.54(10^9) \text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

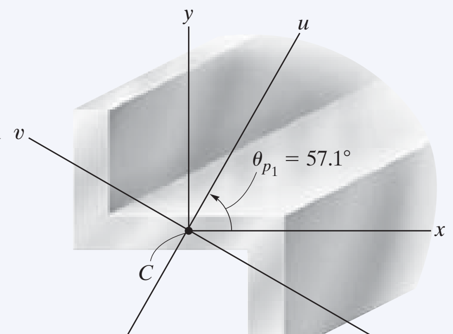
$$I_{mín} = (4.25 - 3.29)10^9 = 0.960(10^9) \text{ mm}^4 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Ejes principales.** Como se muestra en la figura 10-20*c*, el ángulo $2\theta_{p_1}$ se determina a partir del círculo al medir en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde $OA$ hacia la dirección del eje $I$ *positivo*. Por consiguiente,

$$2\theta_{p_1} = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{|BA|}{|OA|}\right) = 180° - \text{sen}^{-1}\left(\frac{3.00}{3.29}\right) = 114.2°$$

$$I_{máx} = 7.54(10^9) \text{ mm}^4$$

El eje principal para $I_{máx} = 7.54(10^9)$ mm$^4$ está, por tanto, orientado a un ángulo $\theta_{p_1} = 57.1°$, medido en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*, desde el eje *x positivo* hacia el eje *u positivo*. El eje $v$ es perpendicular a este eje. Los resultados se muestran en la figura 10-20*d*.




(d)

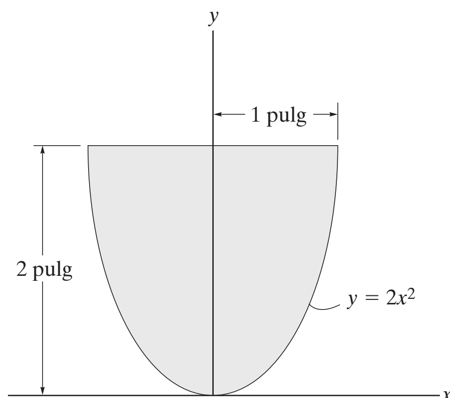
**Fig. 10-20**

10

# PROBLEMAS

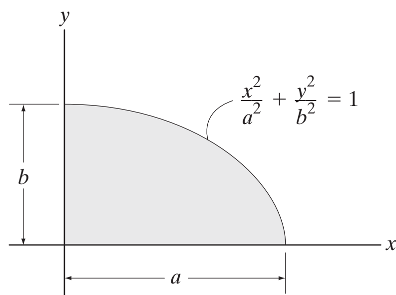
***10-60.** Determine el producto de inercia del área parabólica con respecto a los ejes $x$ y $y$.

**•10-61.** Determine el producto de inercia $I_{xy}$ de la mitad derecha del área parabólica del problema 10-60, limitada por las rectas $y = 2$ pulg y $x = 0$.



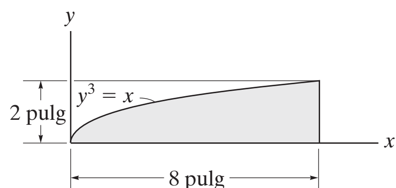

**Probs. 10-60/61**

**10-62.** Determine el producto de inercia del área de un cuarto de elipse con respecto a los ejes $x$ y $y$.



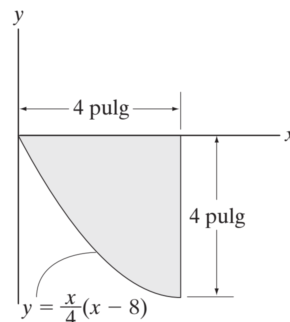

**Prob. 10-62**

**10-63.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.



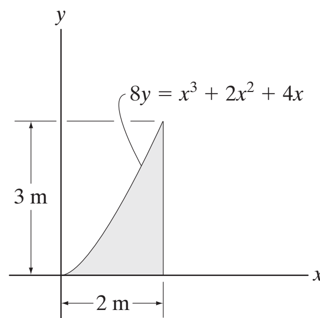

**Prob. 10-63**

***10-64.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.



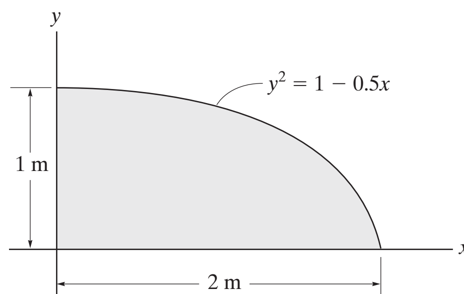

**Prob. 10-64**

**•10-65.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.



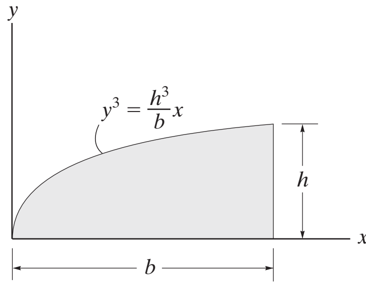

**Prob. 10-65**

**10-66.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.



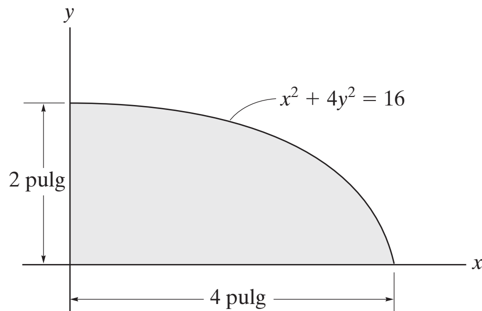

**Prob. 10-66**

**10-67.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.



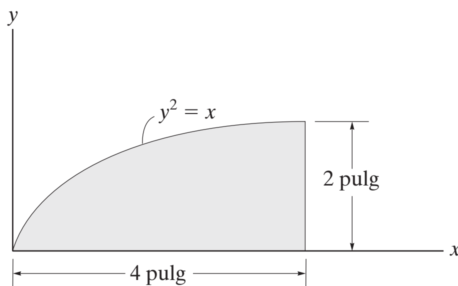

**Prob. 10-67**

***10-68.** Determine el producto de inercia para el área de la elipse con respecto a los ejes $x$ y $y$.



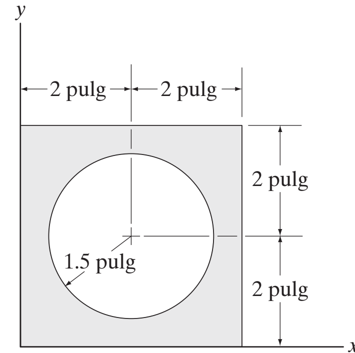

**Prob. 10-68**

**•10-69.** Determine el producto de inercia para el área parabólica con respecto a los ejes $x$ y $y$.



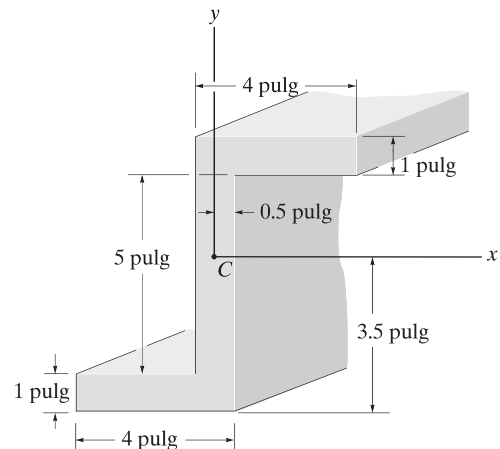

**Prob. 10-69**

**10-70.** Determine el producto de inercia del área compuesta con respecto a los ejes $x$ y $y$.




**Prob. 10-70**

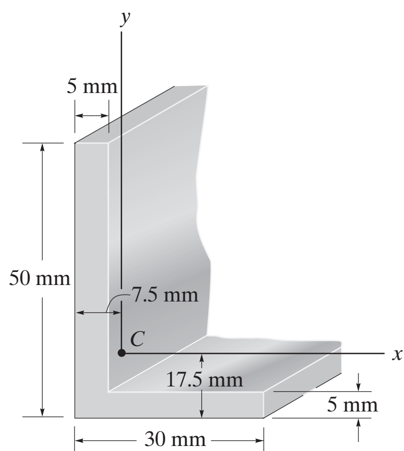
**10-71.** Determine el producto de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes $x$ y $y$, que tienen su origen ubicado en el centroide $C$.




**Prob. 10-71**

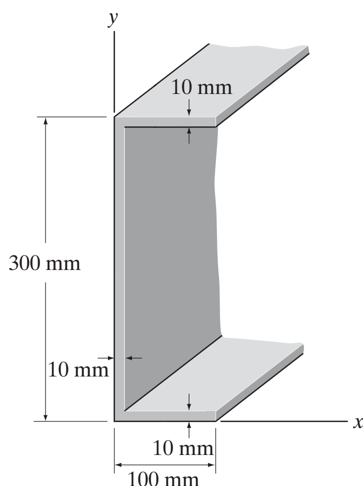
10

***10-72.** Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes $x$ y $y$, que tienen su origen ubicado en el centroide $C$.



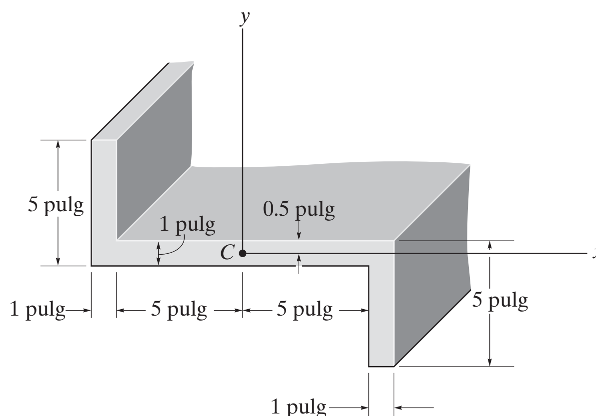

Prob. 10-72

•**10-73.** Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes $x$ y $y$.



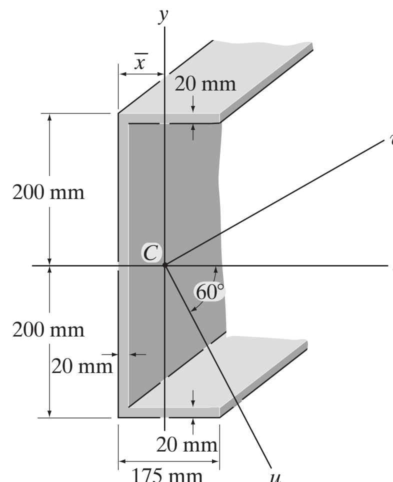

Prob. 10-73

**10-74.** Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes $x$ y $y$, que tienen su origen ubicado en el centroide $C$.



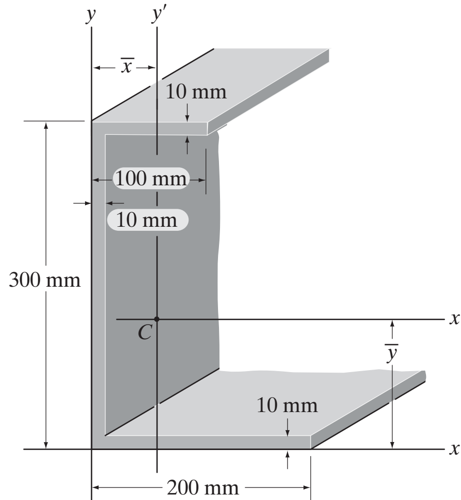

Prob. 10-74

**10-75.** Localice el centroide $\overline{x}$ del área de la sección transversal de la viga y después determine los momentos de inercia y el producto de inercia de esta área con respecto a los ejes $u$ y $v$. Los ejes tienen su origen en el centroide $C$.



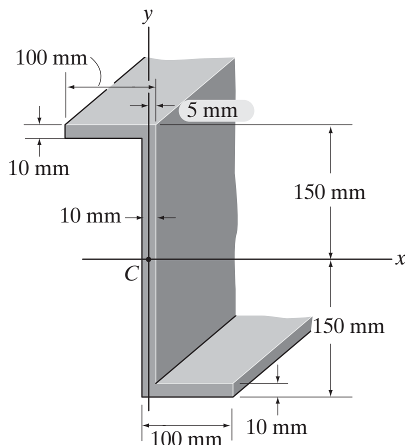

Prob. 10-75

*10-76. Localice el centroide ($\bar{x}$, $\bar{y}$) del área de la sección transversal de la viga y después determine el producto de inercia de esta área con respecto a los ejes centroidales $x'$ y $y'$.



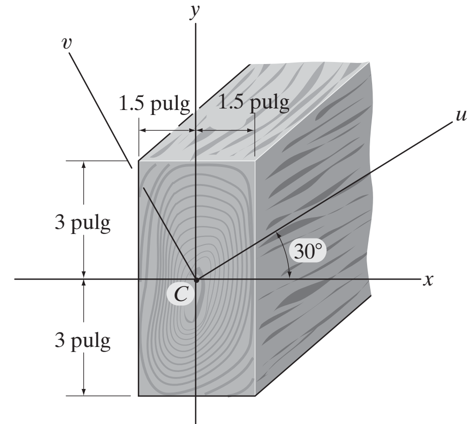

**Prob. 10-76**

•10-77. Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes centroidales $x$ y $y$.



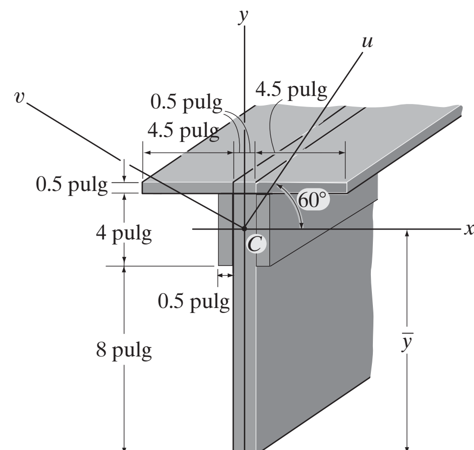

**Prob. 10-77**

10-78. Determine los momentos de inercia y el producto de inercia del área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes $u$ y $v$.




**Prob. 10-78**

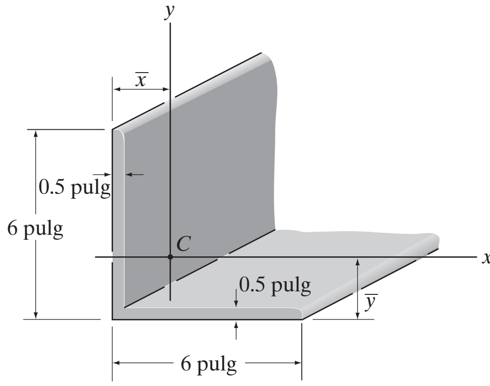
10-79. Localice el centroide $\bar{y}$ del área de la sección transversal de la viga y después determine los momentos de inercia y el producto de inercia de esta área con respecto a los ejes $u$ y $v$.




**Prob. 10-79**

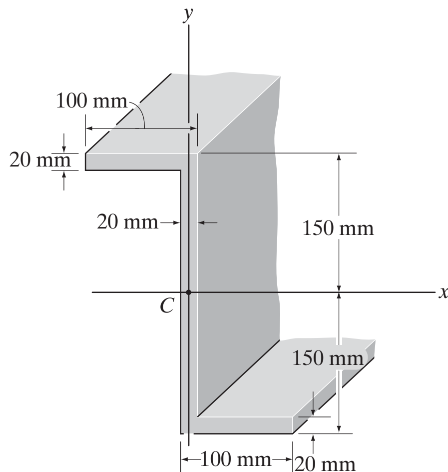
10

*__10-80.__ Localice el centroide $\overline{x}$ y $\overline{y}$ del área de la sección transversal y después determine la orientación de los ejes principales, los cuales tienen su origen en el centroide *C* del área. Además, encuentre los momentos de inercia principales.



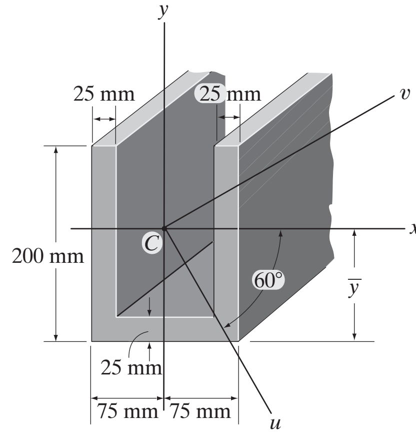

**Prob. 10-80**

•**10-81.** Determine la orientación de los ejes principales, los cuales tienen su origen en el centroide *C* del área de la sección transversal de la viga. Además, encuentre los momentos de inercia principales.




**Prob. 10-81**

**10-82.** Localice el centroide $\overline{y}$ del área de la sección transversal de la viga y después determine los momentos de inercia de esta área y el producto de inercia con respecto a los ejes *u* y *v*. Los ejes tienen su origen en el centroide *C*.




**Prob. 10-82**

**10-83.** Resuelva el problema 10-75 con el círculo de Mohr.

*__10-84.__ Resuelva el problema 10-78 con el círculo de Mohr.

•**10-85.** Resuelva el problema 10-79 con el círculo de Mohr.

**10-86.** Resuelva el problema 10-80 con el círculo de Mohr.

**10-87.** Resuelva el problema 10-81 con el círculo de Mohr.

*__10-88.__ Resuelva el problema 10-82 con el círculo de Mohr.

10

## 10.8 Momento de inercia de masa

El momento de inercia de masa de un cuerpo es una medida de la resistencia del cuerpo a la aceleración angular. Como este momento se usa en dinámica para estudiar el movimiento rotatorio, a continuación se analizarán los métodos para realizar su cálculo.*

Considere el cuerpo rígido que se muestra en la figura 10-21. Definimos el *momento de inercia de masa* del cuerpo con respecto al eje $z$ como

$$I = \int_m r^2\, dm \tag{10-12}$$

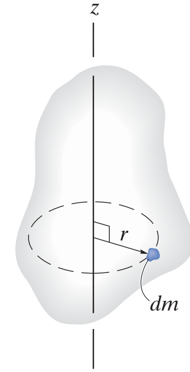



Fig. 10-21

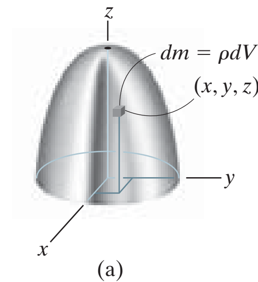
Aquí, $r$ es la distancia perpendicular desde el eje hasta el elemento arbitrario $dm$. Como la formulación implica a $r$, el valor de $I$ es *único* para cada eje con respecto al cual se calcula. Sin embargo, el eje que generalmente se elige pasa por el centro de masa $G$ del cuerpo. Las unidades que se utilizan comúnmente para esta medida son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2$.

Si el cuerpo consiste en material con densidad $\rho$, entonces $dm = \rho\, dV$, figura 10-22*a*. Al sustituir esto en la ecuación 10-12, el momento de inercia del cuerpo se calcula entonces con elementos de volumen para la integración; es decir,

$$I = \int_V r^2 \rho\, dV \tag{10-13}$$

Para la mayoría de las aplicaciones, $\rho$ será una *constante*, por lo que este término puede factorizarse fuera de la integral, y la integración es entonces meramente una función de la geometría.

$$I = \rho \int_V r^2\, dV \tag{10-14}$$




(a)

Fig. 10-22

*Otra propiedad del cuerpo que mide la simetría de la masa del cuerpo con respecto a un sistema coordenado es el producto de inercia de masa. Esta propiedad se aplica a menudo al movimiento tridimensional de un cuerpo y se analiza en *Engineering Mechanics: Dynamics* (Capítulo 21).

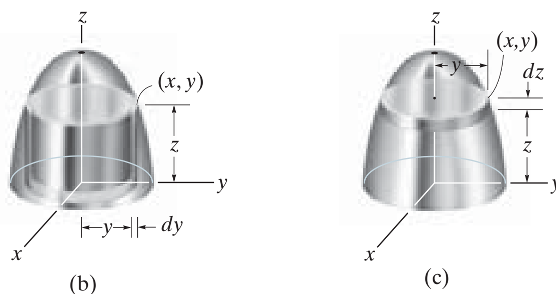



**Fig. 10-22**

## Procedimiento para el análisis

Si un cuerpo es simétrico con respecto a un eje, como en la figura 10-22, entonces su momento de inercia de masa con respecto al eje puede determinarse con una integración simple. Los elementos de cascarón o de disco se usan para este propósito.

### Elemento de cascarón.

- Si un *elemento de cascarón* con altura $z$, radio $y$ y espesor $dy$ se elige para la integración, figura 10-22*b*, entonces su volumen es $dV = (2\pi y)(z)\,dy$.
- Este elemento se puede usar en las ecuaciones 10-13 o 10-14 para determinar el momento de inercia $I_z$ del cuerpo con respecto al eje $z$ ya que *todo el elemento*, debido a su "delgadez", se encuentra a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ del eje $z$ (vea el ejemplo 10.10).

### Elemento de disco.

- Si un elemento de disco, con radio $y$ y espesor $dz$ se elige para la integración, figura 10-22*c*, entonces el volumen es $dV = (\pi y^2)\,dz$.
- En este caso el elemento es *finito* en la dirección radial, y en consecuencia *no* todas sus partes se encuentran a la *misma distancia radial* $r$ del eje $z$. Como resultado, las ecuaciones 10-13 o 10-14 *no se pueden* usar para determinar $I_z$. En vez de realizar la integración con este elemento, primero es necesario determinar el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje $z$ y luego integrar este resultado (vea el ejemplo 10.11).

## EJEMPLO 10.10

Determine el momento de inercia de masa del cilindro que se muestra en la figura 10-23*a* con respecto al eje $z$. La densidad $\rho$ del material es constante.

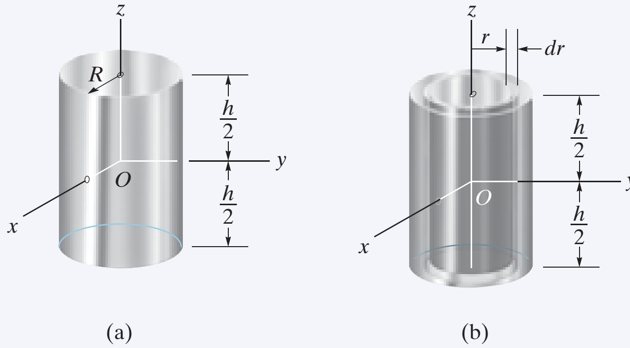



**Fig. 10-23**

### SOLUCIÓN

**Elemento de cascarón.** Este problema se puede resolver con el *elemento de cascarón* que se muestra la figura 10-23*b* y sólo se requiere una integración simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h)\,dr$, de modo que su masa es $dm = \rho\,dV = \rho(2\pi hr\,dr)$. Como *todo el elemento* se encuentra a la misma distancia $r$ del eje $z$, el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2\,dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

Al integrar sobre todo el cilindro resulta

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2}R^4 h$$

Como la masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

entonces

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

10

## EJEMPLO 10.11

Un sólido se genera al girar el área sombreada en azul mostrada en la figura 10-24*a* con respecto al eje *y*. Si la densidad del material es de 5 slug/pie$^3$, determine el momento de inercia de masa con respecto al eje *y*.

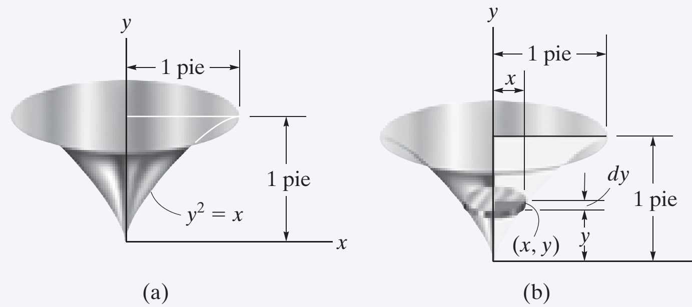



**Fig. 10-24**

### SOLUCIÓN

**Elemento de disco.** El momento de inercia se determinará con este *elemento de disco*, como se muestra en la figura 10-24*b*. Aquí, el elemento interseca la curva en el punto arbitrario $(x, y)$ y tiene una masa

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi\, x^2)\, dy$$

Aunque todos los puntos del elemento *no* están ubicados a la misma distancia del eje *y*, es posible determinar el momento de inercia $dI_y$ *del elemento* con respecto al eje *y*. En el ejemplo anterior se mostró que el momento de inercia de un cilindro homogéneo con respecto a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2}mR^2$, donde *m* y *R* son la masa y el radio del cilindro. Como la altura del cilindro no está implicada en esta fórmula, también la podemos usar para un disco. Así, para el elemento de disco que se muestra en la figura 10-24*b*, tenemos

$$dI_y = \frac{1}{2}(dm)x^2 = \frac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Sustituimos $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/pie$^3$, e integramos con respecto a *y*, desde $y = 0$ hasta $y = 1$ pie, y obtenemos el momento de inercia para todo el sólido.

$$I_y = \frac{5\pi}{2}\int_0^{1\text{pie}} x^4\, dy = \frac{5\pi}{2}\int_0^{1\text{pie}} y^8\, dy = 0.873 \text{ slug}\cdot\text{pie}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

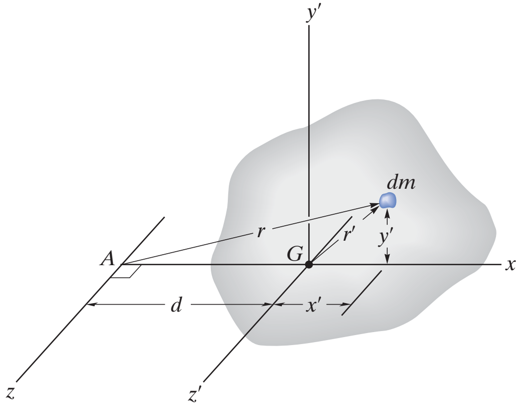



**Fig. 10-25**

**Teorema de los ejes paralelos.** Si se conoce el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pase por el centro de masa del cuerpo, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier otro *eje paralelo* puede determinarse con el *teorema de los ejes paralelos*. Para derivar este teorema, considere el cuerpo que se muestra en la figura 10-25. El eje $z'$ pasa por el centro de masa $G$, mientras que el correspondiente eje $z$ paralelo se encuentra a una distancia constante $d$. Al seleccionar el elemento diferencial de masa $dm$ que se localiza en el punto $(x', y')$ y con el teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $z$ es

$$I = \int_m r^2\,dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\,dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\,dm + 2d\int_m x'\,dm + d^2\int_m dm$$

Como $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa a $I_G$. La segunda integral es igual a *cero*, ya que el eje $z'$ pasa por el centro de masa del cuerpo, es decir, $\int x'\,dm = \bar{x}\int dm = 0$ ya que $\bar{x} = 0$. Por último, la tercera integral representa la masa total $m$ del cuerpo. Por consiguiente, el momento de inercia con respecto al eje $z$ puede escribirse como

$$I = I_G + md^2 \qquad (10\text{-}15)$$

10

donde

$I_G$ = momento de inercia con respecto al eje $z'$ que pasa por el centro de masa $G$
$m$ = masa del cuerpo
$d$ = distancia entre los ejes paralelos

**Radio de giro.** En ocasiones, el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje específico se reporta en los manuales mediante el *radio de giro k*. Este valor tiene unidades de longitud, y cuando se conoce junto con la masa $m$ del cuerpo, el momento de inercia se puede determinar a partir de la ecuación

$$I = mk^2 \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{10-16}$$

Observe la *similitud* entre la definición de $k$ en esta fórmula y $r$ en la ecuación $dI = r^2\,dm$, la cual define el momento de inercia de un elemento diferencial de masa $dm$ del cuerpo con respecto a un eje.

**Cuerpos compuestos.** Si un cuerpo está construido a partir de un número de formas simples como discos, esferas y barras, el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje $z$ puede determinarse al sumar algebraicamente los momentos de inercia de todas las formas componentes calculados con respecto al mismo eje. La suma algebraica es necesaria ya que una parte componente se debe considerar como una cantidad negativa si ya ha sido incluida dentro de otra parte —como en el caso de un "agujero" sustraído de una placa sólida—. Además, el teorema de los ejes paralelos es necesario para los cálculos si el centro de masa de cada parte componente no se encuentra sobre el eje $z$. A este respecto, en la tabla que se encuentra en la cubierta interna de este libro se proporcionan fórmulas para el momento de inercia de masa de algunas formas comunes, como discos, esferas y barras.



Este volante, que opera un cortador de metal, tiene un momento grande de inercia con respecto a su centro. Una vez que comienza a girar es difícil detenerlo y, por consiguiente, es posible transferir de manera efectiva un movimiento uniforme a la hoja cortadora.

10

## EJEMPLO 10.12

Si la placa que se muestra en la figura 10-26*a* tiene densidad de 8000 $kg/m^3$ y un espesor de 10 mm, determine su momento de inercia de masa con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por el punto $O$.

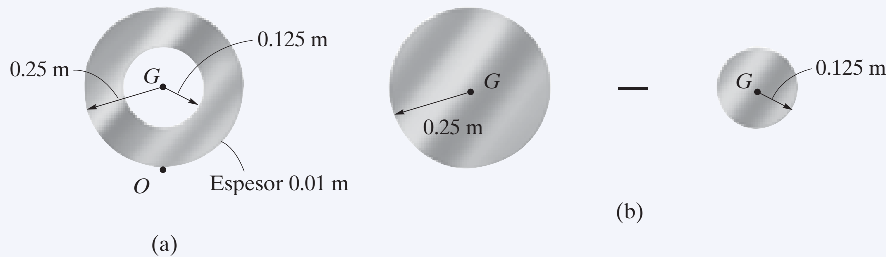



**Fig. 10-26**

### SOLUCIÓN

La placa consta de dos partes compuestas, el disco de 250 mm de radio *menos* un disco de 125 mm de radio, figura 10-26*b*. El momento de inercia con respecto a $O$ puede determinarse por el cálculo del momento de inercia de cada una de esas partes con respecto a $O$, y sumar luego *algebraicamente* los resultados. Los cálculos se realizan con el teorema de los ejes paralelos junto con los datos dados en la cubierta posterior interna de este libro.

**Disco.** El momento de inercia de un disco con respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por $G$ es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco está a una distancia de 0.25 m del punto $O$. Entonces,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000 \text{ kg/m}^3 \, [\pi(0.25 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 15.71 \text{ kg}$$

$$(I_O)_d = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2 + (15.71 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$
$$= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Agujero.** Para el disco (agujero) más pequeño, tenemos

$$m_h = \rho_h V_h = 8000 \text{ kg/m}^3 \, [\pi(0.125 \text{ m})^2(0.01 \text{ m})] = 3.93 \text{ kg}$$

$$(I_O)_h = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(3.93 \text{ kg})(0.125 \text{ m})^2 + (3.93 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2$$
$$= 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto, el momento de inercia de la placa con respecto al punto $O$ es

$$I_O = (I_O)_d - (I_O)_h$$
$$= 1.473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 0.276 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$= 1.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$ ***Resp.***

## EJEMPLO 10.13

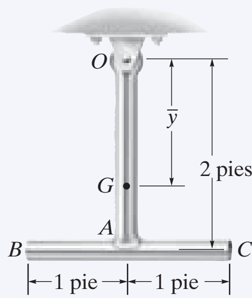



**Fig. 10-27**

El péndulo que se muestra en la figura 10-27 consiste en dos barras delgadas cada una con un peso de 10 lb. Determine el momento de inercia de masa del péndulo con respecto a un eje que pase por (a) el pasador en $O$, y (b) el centro de masa $G$ del péndulo.

### SOLUCIÓN

**Parte (a).** Con la tabla proporcionada en la cubierta posterior interna de este libro, el momento de inercia de la barra $OA$ con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto extremo $O$ de la barra, es $I_O = 1/3ml^2$. Por consiguiente,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(2\text{ pies})^2 = 0.414\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$$

Observe que este mismo valor puede calcularse con $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ y el teorema de los ejes paralelos; es decir,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(2\text{ pies})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(1\text{ pie})^2$$
$$= 0.414\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$$

Para la barra $BC$ tenemos

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(2\text{ pies})^2 + \frac{10\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(2\text{ pies})^2$$
$$= 1.346\text{ slug}\cdot\text{pies}^2$$

El momento de inercia del péndulo con respecto a $O$ es, por tanto

$$I_O = 0.414 + 1.346 = 1.76\text{ slug}\cdot\text{pie}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

**Parte (b).** El centro de masa $G$ se localizará con respecto al pasador situado en $O$. Si suponemos que esta distancia es $\bar{y}$, figura 10-27, y usamos la fórmula para determinar el centro de masa, tenemos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32.2) + 2(10/32.2)}{(10/32.2) + (10/32.2)} = 1.50\text{ pies}$$

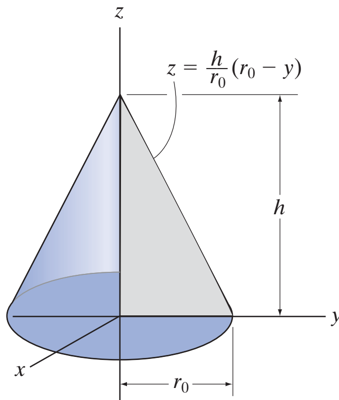
El momento de inercia $I_G$ puede calcularse de la misma manera que $I_O$, lo cual requiere aplicaciones sucesivas del teorema de los ejes paralelos para transferir los momentos de inercia de las barras $OA$ y $BC$ a $G$. Sin embargo, una solución más directa significa aplicar el teorema de los ejes paralelos con el resultado para $I_O$ determinado anteriormente; es decir,

$$I_O = I_G + md^2; \quad 1.76\text{ slug}\cdot\text{pie}^2 = I_G + \left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(1.50\text{ pies})^2$$

$$I_G = 0.362\text{ slug}\cdot\text{pie}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

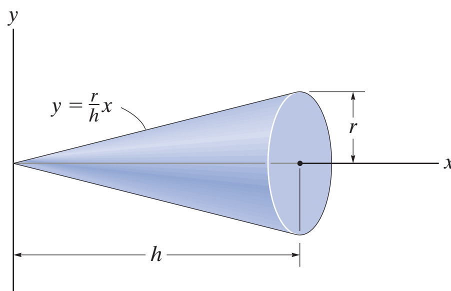
## PROBLEMAS

**•10-89.** Determine el momento de inercia de masa $I_z$ del cono que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $z$. La densidad del material es $\rho$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del cono.



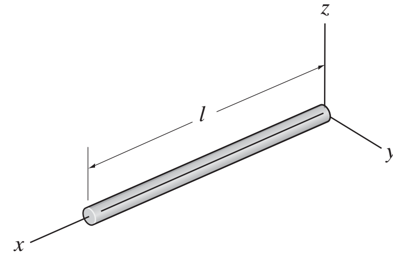

Prob. 10-89

**10-90.** Determine el momento de inercia de masa $I_x$ del cono circular recto y exprese el resultado en términos de la masa total $m$ del cono. El cono tiene densidad constante $\rho$.



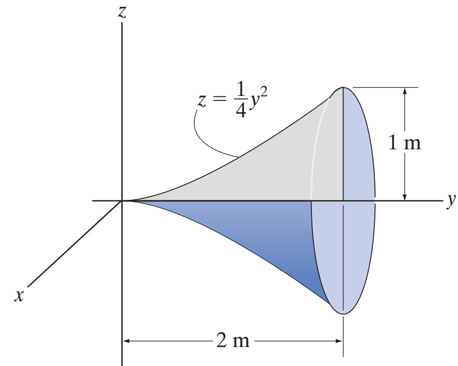

Prob. 10-90

**10-91.** Determine el momento de inercia de masa $I_y$ de la barra delgada. La barra está hecha de un material que tiene una densidad variable $\rho = \rho_0(1 + x/l)$, donde $\rho_0$ es constante. El área de la sección transversal de la barra $A$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ de la barra.



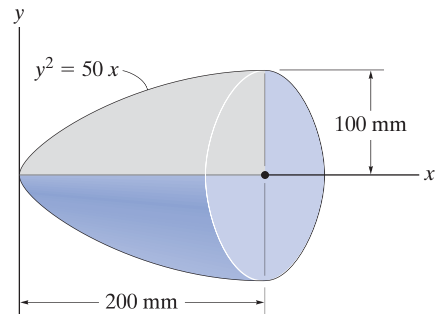

Prob. 10-91

***10-92.** Determine el momento de inercia de masa $I_y$ del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $y$. La densidad del material es $\rho$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del sólido.




Prob. 10-92

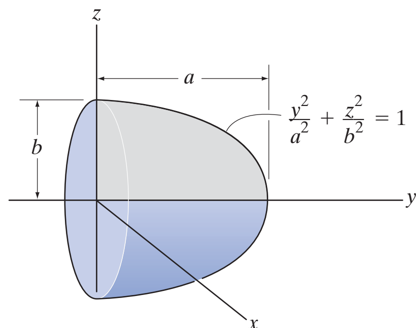
**•10-93.** El paraboloide se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $x$. Determine el radio de giro $k_x$. La densidad del material es $\rho = 5\ \text{Mg/m}^3$.




Prob. 10-93

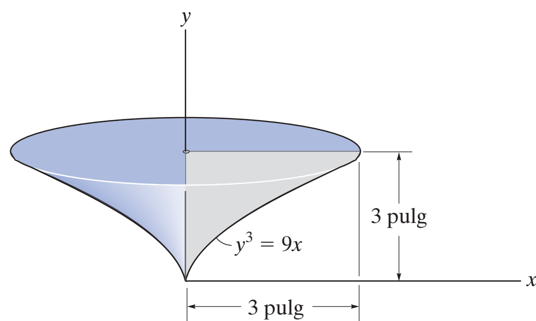
10

**10-94.** Determine el momento de inercia de masa $I_y$ del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $y$. La densidad del material es $\rho$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del sólido semielipsoide.



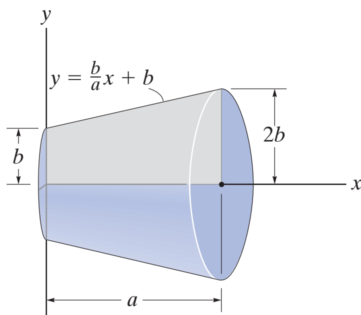

**Prob. 10-94**

***10-96.** El sólido se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $y$. Determine el radio de giro $k_y$. El peso específico del material es $\gamma = 380$ lb/pie$^3$.



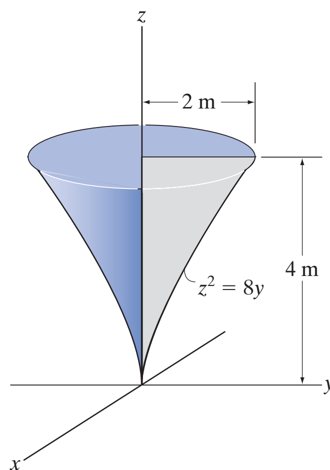

**Prob. 10-96**

**10-95.** El cono truncado se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $x$. Determine momento de inercia $I_x$ y exprese el resultado en términos de la masa total $m$ del cono truncado. El material tiene una densidad constante $\rho$.




**Prob. 10-95**

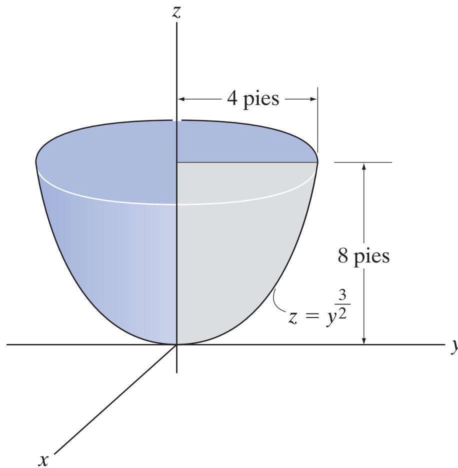
**•10-97.** Determine el momento de inercia de masa $I_z$ del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $z$. La densidad del material es $\rho = 7.85$ Mg/m$^3$.




**Prob. 10-97**

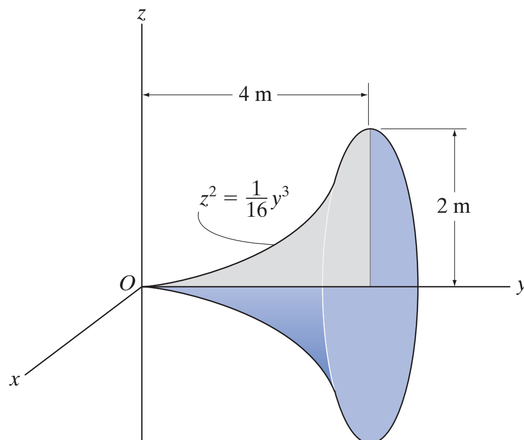
10

**10-98.** Determine el momento de inercia de masa $I_z$ del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $z$. El sólido está hecho de un material homogéneo que pesa 400 lb.



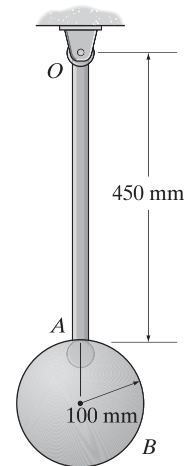

**Prob. 10-98**

**10-99.** Determine el momento de inercia de masa $I_y$ del sólido que se forma al girar el área sombreada (gris claro) alrededor del eje $y$. La masa total del sólido es de 1500 kg.



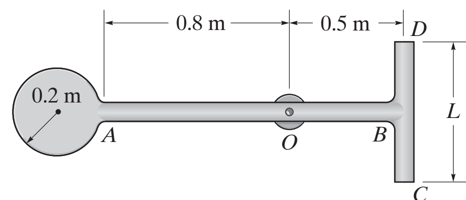

**Prob. 10-99**

***10-100.** Determine el momento de inercia de masa del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por el punto $O$. La barra esbelta tiene una masa de 10 kg y la esfera tiene una masa de 15 kg.



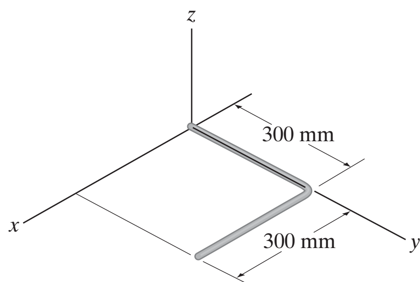

**Prob. 10-100**

**•10-101.** El péndulo consiste en un disco con masa de 6 kg y las barras esbeltas $AB$ y $DC$ que tienen masa por unidad de longitud de 2 kg/m. Determine la longitud $L$ de $DC$ de manera que el centro de masa esté en la chumacera $O$. ¿Cuál es el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto $O$?




**Prob. 10-101**

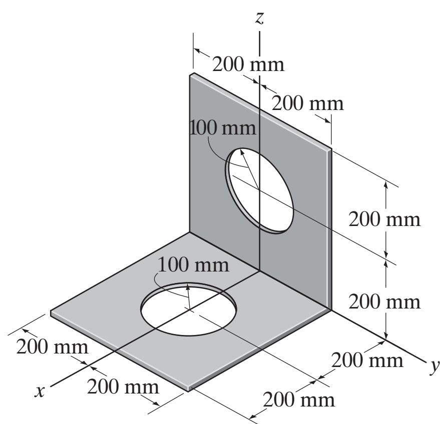
**10-102.** Determine el momento de inercia de masa de la barra doblada de 2 kg con respecto al eje $z$.




Prob. 10-102

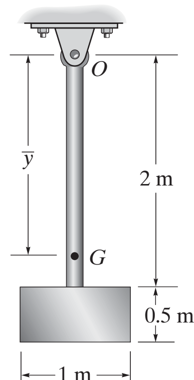
**10-103.** La placa delgada tiene una masa por unidad de área de 10 kg/m$^2$. Determine su momento de inercia de masa con respecto al eje $y$.

*__10-104.__ La placa delgada tiene una masa por unidad de área de 10 kg/m$^2$. Determine su momento de inercia de masa con respecto al eje $z$.



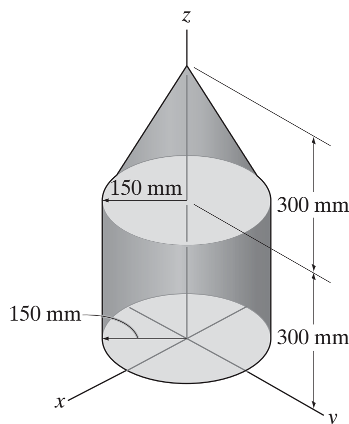

Probs. 10-103/104

•**10-105.** El péndulo consiste en la barra esbelta de 3 kg y la placa delgada de 5 kg. Determine la ubicación $\overline{y}$ del centro de masa $G$ del péndulo; después encuentre el momento de inercia de masa del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto $G$.




Prob. 10-105

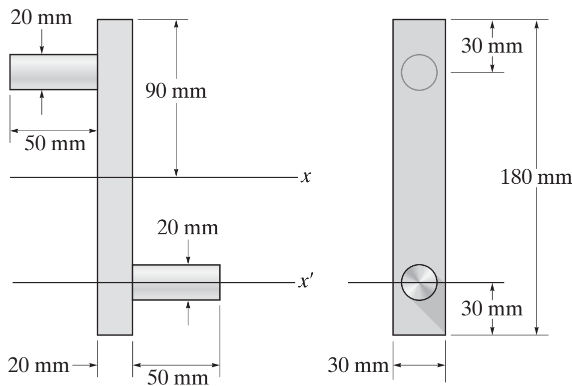
**10-106.** El ensamble de cono y cilindro está hecho de un material homogéneo que tiene una densidad de 7.85 Mg/m$^3$. Determine su momento de inercia de masa con respecto al eje $z$.




Prob. 10-106

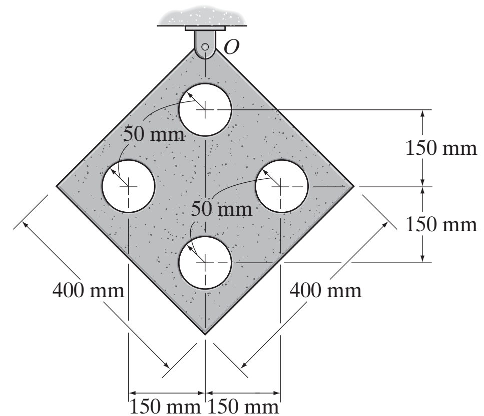
**10-107.** Determine el momento de inercia de masa de la manivela con respecto al eje $x$. El material es acero con densidad $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$.

***10-108.** Determine el momento de inercia de masa de la manivela con respecto al eje $x'$. El material es acero con densidad $\rho = 7.85\ \text{Mg/m}^3$.



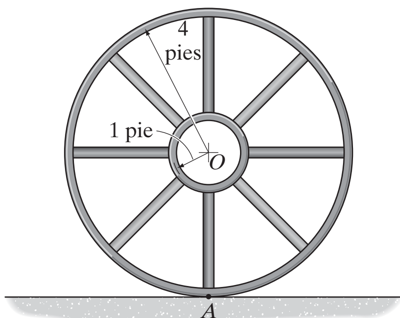

Probs. 10-107/108

**10-110.** Determine el momento de inercia de masa de la placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por el punto $O$. El material tiene una masa por unidad de área de $20\ \text{kg/m}^2$.



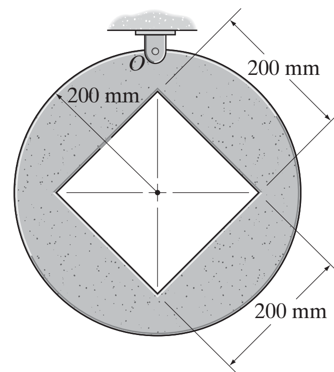

Prob. 10-110

**•10-109.** Si el anillo grande, el anillo pequeño y cada uno de los rayos pesan 100 lb, 15 lb y 20 lb, respectivamente, determine el momento de inercia de masa de la rueda con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por el punto $A$.




Prob. 10-109

**10-111.** Determine el momento de inercia de masa de la placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por el punto $O$. El material tiene una masa por unidad de área de $20\ \text{kg/m}^2$.




Prob. 10-111

## REPASO DEL CAPÍTULO

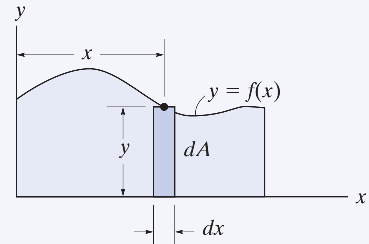
**Momento de inercia de área**

El *momento de inercia de un área* representa el segundo momento del área con respecto a un eje. Se usa con frecuencia en fórmulas relacionadas con la resistencia y la estabilidad de elementos estructurales o elementos mecánicos.

Si la forma del área es irregular pero puede describirse de manera matemática, entonces debe seleccionarse un elemento diferencial e integrarse sobre toda el área para determinar el momento de inercia.

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

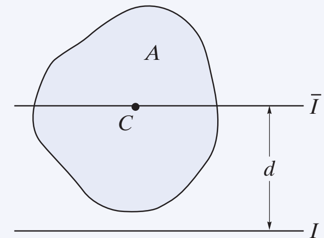
$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$




**Teorema de los ejes paralelos**

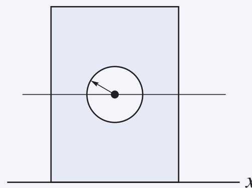
Si se conoce el momento de inercia para un área con respecto a un eje centroidal, entonces su momento de inercia con respecto a un eje paralelo puede determinarse con el teorema de los ejes paralelos.

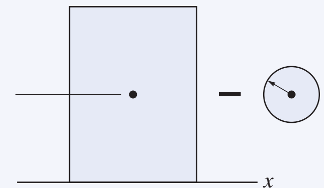
$$I = \bar{I} + Ad^2$$




**Área compuesta**

Si un área es una composición de formas comunes, como las que pueden encontrarse en la cubierta posterior interna de este libro, entonces su momento de inercia es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de cada una de sus partes.



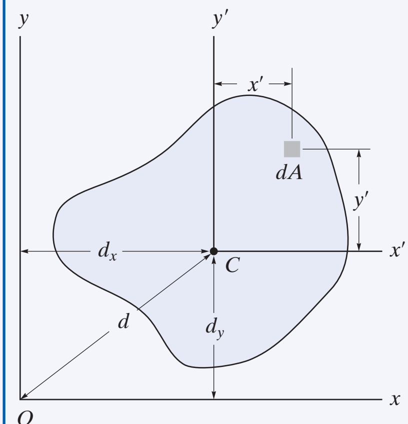

**Producto de inercia**

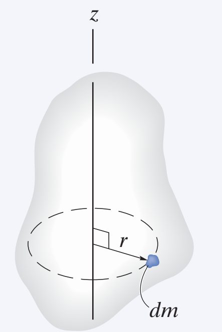
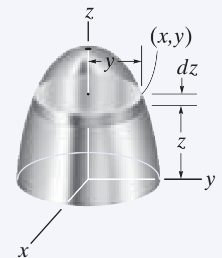
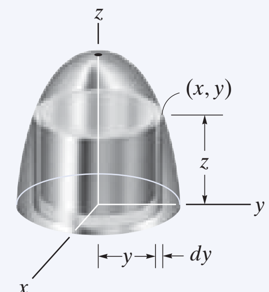
El *producto de inercia* de un área se usa en fórmulas para determinar la orientación de un eje con respecto al cual el momento de inercia del área es un máximo o un mínimo.

Si se conoce el producto de inercia para un área con respecto a sus ejes centroidales $x'$, $y'$, entonces su valor se puede determinar con respecto a cualesquier ejes $x$, $y$ mediante el teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia.

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$



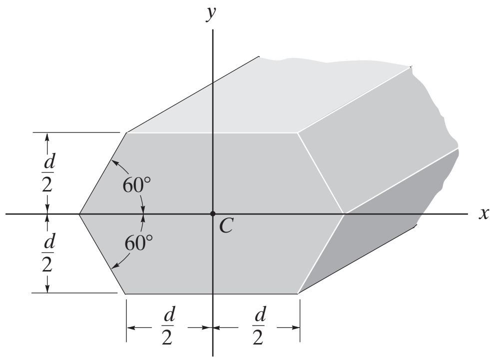
| | | |
|---|---|---|
| **Momentos principales de inercia**<br>Siempre que se conozcan los momentos de inercia $I_x$ e $I_y$, y el producto de inercia $I_{xy}$, entonces pueden usarse las fórmulas del círculo de Mohr para determinar los *momentos de inercia principales* máximo y mínimo para el área, así como para encontrar la orientación de los ejes de inercia principales. | $I_{\substack{máx\\mín}} = \dfrac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$<br><br>$\tan 2\theta_p = \dfrac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$ | |
| **Momento de inercia de masa**<br>El *momento de inercia de masa* es la propiedad de un cuerpo que mide su resistencia a un cambio en su rotación. Este momento se define como el "segundo momento" de los elementos de masa del cuerpo con respecto a un eje. | $I = \int_m r^2\, dm$ |  |
| Para cuerpos homogéneos con simetría axial, el momento de inercia de masa se puede determinar por integración simple por medio de elementos de disco o de cascarón. | $I = \rho \int_V r^2 dV$ | <br> |
| El momento de inercia de masa de un cuerpo compuesto se determina al usar valores tabulares de sus formas compuestas, que pueden encontrarse en la cubierta posterior interna del libro, junto con el teorema de los ejes paralelos. | $I = I_G + md^2$ | |

10

## PROBLEMAS DE REPASO

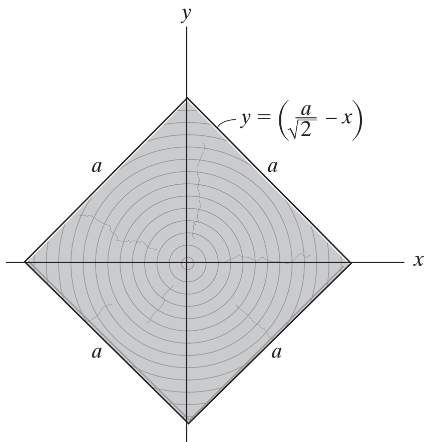
***10-112.** Determine el momento de inercia de masa del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$ que pasa por el centroide $C$.

**•10-113.** Determine el momento de inercia de masa del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $y$ que pasa por el centroide $C$.



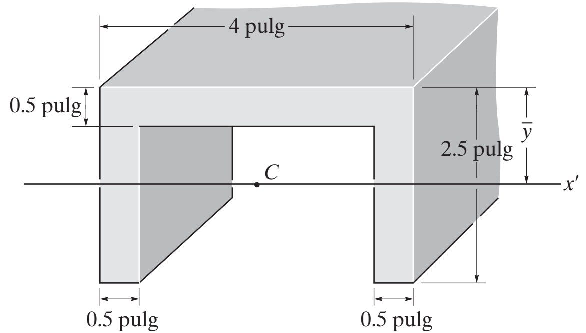

**Probs. 10-112/113**

**10-114.** Determine el momento de inercia de masa del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x$.



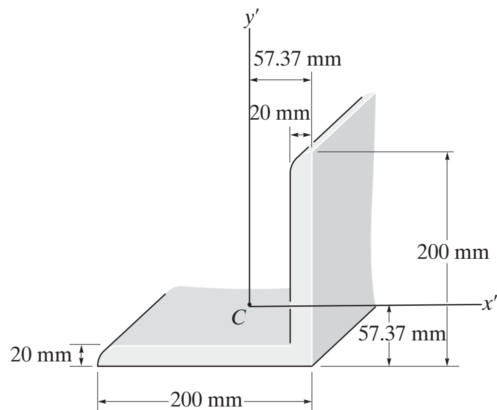

**Prob. 10-114**

**10-115.** Determine el momento de inercia de masa del área de la sección transversal de la viga con respecto al eje $x'$ que pasa por el centroide $C$.




**Prob. 10-115**

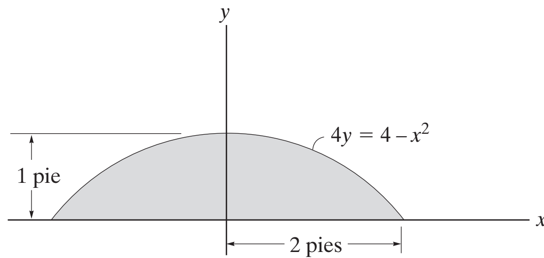
***10-116.** Determine el producto de inercia para el área de la sección transversal del ángulo con respecto a los ejes $x'$ y $y'$ que tienen su origen ubicado en el centroide $C$. Suponga que todas las esquinas son ángulos rectos.




**Prob. 10-116**

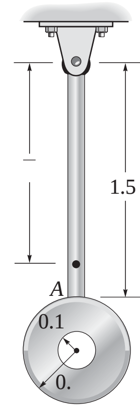
•**10-117.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $y$.

**10-118.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$.



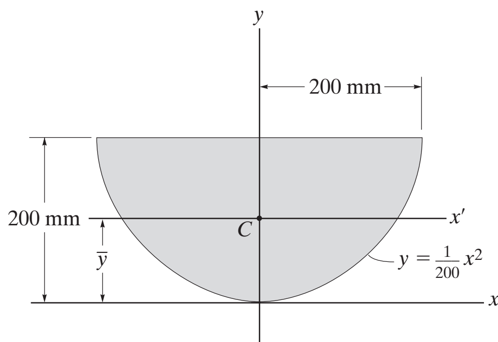

**Probs. 10-117/118**

***10-120.** El péndulo consiste en la barra esbelta $OA$, la cual tiene una masa por unidad de longitud de 3 kg/m. El disco delgado tiene una masa por unidad de área de 12 kg/m$^2$. Determine la distancia $\overline{y}$ al centro de masa $G$ del péndulo; después calcule el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto $G$.



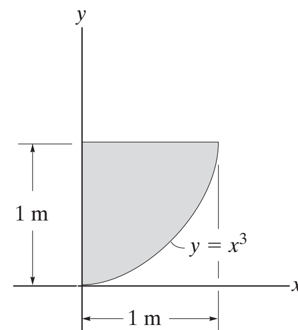

**Prob. 10-120**

**10-119.** Determine el momento de inercia del área con respecto al eje $x$. Después, con el teorema de los ejes paralelos, encuentre el momento de inercia con respecto al eje $x'$ que pasa por el centroide $C$ del área. $\overline{y} = 120$ mm.




**Prob. 10-119**

•**10-121.** Determine el producto de inercia del área con respecto a los ejes $x$ y $y$.




**Prob. 10-121**

10



El equilibrio y la estabilidad de esta pluma articulada de grúa como una función de la posición de la pluma, puede analizarse con los métodos basados en el trabajo y la energía, los cuales se explican en este capítulo.

# Trabajo virtual

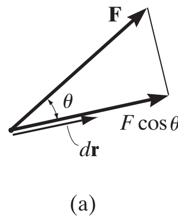
# 11

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

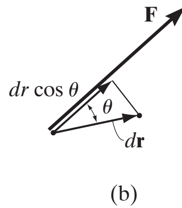
- Presentar el principio del trabajo virtual y mostrar cómo se aplica para encontrar la configuración del equilibrio de un sistema de elementos conectados mediante pasadores.
- Establecer la función de la energía potencial y utilizar el método de la energía potencial para investigar el tipo de equilibrio o estabilidad de un cuerpo rígido o sistema de elementos conectados mediante pasadores.

## 11.1 Definición de trabajo

El *principio del trabajo virtual* fue propuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli en el siglo XVIII. Proporciona un método alternativo para resolver problemas que implican el equilibrio de una partícula, un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos conectados. Sin embargo, antes de analizar este principio, primero debemos definir el trabajo producido por una fuerza y por un momento de par.




(a)




(b)

**Fig. 11-1**

**Trabajo de una fuerza.** Una fuerza realiza trabajo cuando experimenta un desplazamiento en la dirección de su línea de acción. Por ejemplo, considere la fuerza **F** que se muestra en la figura 11-1*a*, la cual experimenta un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$. Si $\theta$ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento, entonces la componente de **F** en la dirección del desplazamiento es $F\cos\theta$. Y entonces el trabajo producido por **F** es

$$dU = F\,dr\cos\theta$$

Observe que esta expresión también es el producto de la fuerza $F$ y la componente de desplazamiento en la dirección de la fuerza, $dr\cos\theta$, figura 11-1*b*. Si usamos la definición del producto punto (ecuación 2-14) el trabajo también puede escribirse como

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Como lo indican las ecuaciones anteriores, el trabajo es un *escalar*, y como otras cantidades escalares, tiene una magnitud que puede ser *positiva* o *negativa*.

En el sistema SI, la unidad de trabajo es un *joule* (J), que es el trabajo producido por una fuerza de 1 N que se desplaza a través de una distancia de 1 m en la dirección de la fuerza (1 J = 1 N · m). La unidad del trabajo en el sistema FPS es el pie-libra (pie · lb), que es el trabajo producido por una fuerza de 1 lb que se desplaza una distancia de 1 pie en la dirección de la fuerza.

El momento de una fuerza tiene la misma combinación de unidades; sin embargo, los conceptos de momento y trabajo no están relacionados de ninguna forma. Un momento es una cantidad vectorial, mientras que el trabajo es un escalar.

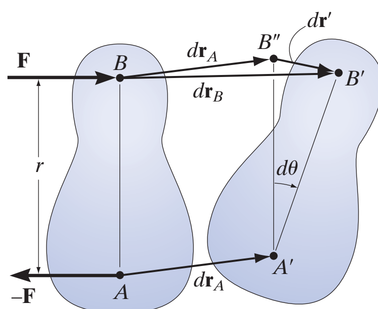



**Fig. 11-2**

**Trabajo de un momento de par.** La rotación de un momento de par también produce trabajo. Considere el cuerpo rígido de la figura 11-2, el cual está sometido al par de fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ que produce un momento de par **M** que tiene una magnitud $M = Fr$. Cuando el cuerpo experimenta el desplazamiento diferencial que se muestra, los puntos $A$ y $B$ se mueven $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ hasta sus posiciones finales $A'$ y $B'$, respectivamente. Como $d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}'$, se puede pensar en este movimiento como en una *traslación* $d\mathbf{r}_A$, donde $A$ y $B$ se mueven hasta $A'$ y $B''$, y una *rotación* alrededor de $A'$, donde el cuerpo gira a través del ángulo $d\theta$ respecto de $A$. Las fuerzas de par no trabajan durante la traslación $d\mathbf{r}_A$ porque cada fuerza realiza la misma cantidad de desplazamiento en direcciones opuestas, y así cancelan el trabajo. Sin embargo, durante la rotación **F** se desplaza $dr'' = r\,d\theta$, y por lo tanto realiza un trabajo $dU = F\,dr'' = F\,r\,d\theta$. Como $M = Fr$, entonces el trabajo del momento de par **M** es

$$dU = M d\theta$$

Si **M** y $d\theta$ tienen el mismo sentido, el trabajo es *positivo*; sin embargo, si tienen un sentido opuesto, el trabajo será *negativo*.

**Trabajo virtual.** Las definiciones del trabajo de una fuerza y de un par han sido presentadas en términos de *movimientos reales* expresados mediante desplazamientos diferenciales con magnitudes de $dr$ y $d\theta$. Considere ahora un *movimiento imaginario* o *virtual* de un cuerpo en equilibrio estático, el cual indica un desplazamiento, o una rotación, que es *supuesto* y *no existe realmente*. Estos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y se denotarán mediante los símbolos $\delta r$ y $\delta\theta$ (delta $r$ y delta $\theta$), respectivamente. El *trabajo virtual* realizado por una fuerza que sufre un desplazamiento virtual $\delta r$ es

$$\delta U = F \cos\theta \, \delta r \tag{11-1}$$

Del mismo modo, cuando un par sufre una rotación virtual $\delta\theta$ en el plano de las fuerzas del par, el *trabajo virtual* es

$$\delta U = M \, \delta\theta \tag{11-2}$$

## 11.2 Principio del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual establece que si un cuerpo está en equilibrio, entonces la suma algebraica del trabajo virtual realizado por todas las fuerzas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo, es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo. Entonces,

$$\delta U = 0 \tag{11-3}$$

Por ejemplo, considere el diagrama de cuerpo libre de la partícula (pelota) que descansa sobre el piso, figura 11-3. Si "imaginamos" que la pelota se desplaza hacia abajo una cantidad virtual $\delta y$, entonces el peso efectúa trabajo virtual positivo, $W\,\delta y$, y la fuerza normal efectúa trabajo virtual negativo, $-N\,\delta y$. Por equilibrio, el trabajo virtual total debe ser cero, de modo que $\delta U = W\,\delta y - N\,\delta y = (W - N)\,\delta y = 0$. Como $\delta y \neq 0$, entonces $N = W$ como se requiere al aplicar $\Sigma F_y = 0$.

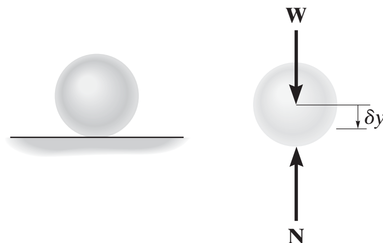



**Fig. 11-3**

De una manera semejante, también podemos aplicar la ecuación del trabajo virtual $\delta U = 0$ a un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas coplanares. Aquí, las traslaciones virtuales separadas en las direcciones $x$ y $y$ y una rotación virtual con respecto a un eje perpendicular al plano $x$-$y$ que pasa por un punto arbitrario $O$, corresponderán a las tres ecuaciones de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_O = 0$. Al escribir estas ecuaciones, *no es necesario* incluir el trabajo realizado por las *fuerzas internas* que actúan dentro del cuerpo, ya que un cuerpo rígido *no se deforma* cuando está sometido a una carga externa y, además, cuando el cuerpo se mueve a través un desplazamiento virtual, las fuerzas internas ocurren en pares colineales iguales pero opuestos, de manera que el correspondiente trabajo efectuado por cada par de fuerzas se cancelará.

Para demostrar una aplicación, considere la viga simplemente apoyada de la figura 11-4*a*. Cuando a la viga se le da una rotación virtual $\delta\theta$ con respecto al punto $B$, figura 11-4*b*, las únicas fuerzas que trabajan son **P** y $\mathbf{A}_y$. Como $\delta y = l\,\delta\theta$ y $\delta y' = (l/2)\,\delta\theta$, la ecuación de trabajo virtual para este caso es $\delta U = A_y(l\,\delta\theta) - P(l/2)\,\delta\theta = (A_y l - Pl/2)\,\delta\theta = 0$. Como $\delta\theta \neq 0$, entonces $A_y = P/2$. Si se excluye $\delta\theta$, observe que los términos entre paréntesis representan en realidad la aplicación de $\Sigma M_B = 0$.

Como se vio en los dos ejemplos anteriores, no se obtiene ninguna ventaja al resolver problemas de equilibrio de cuerpo rígido mediante el principio del trabajo virtual. Esto se debe a que para cada aplicación de la ecuación del trabajo virtual, el desplazamiento virtual, común a cada término, se factoriza y deja una ecuación que podría obtenerse de manera *más directa* al aplicar simplemente las ecuaciones de equilibrio.

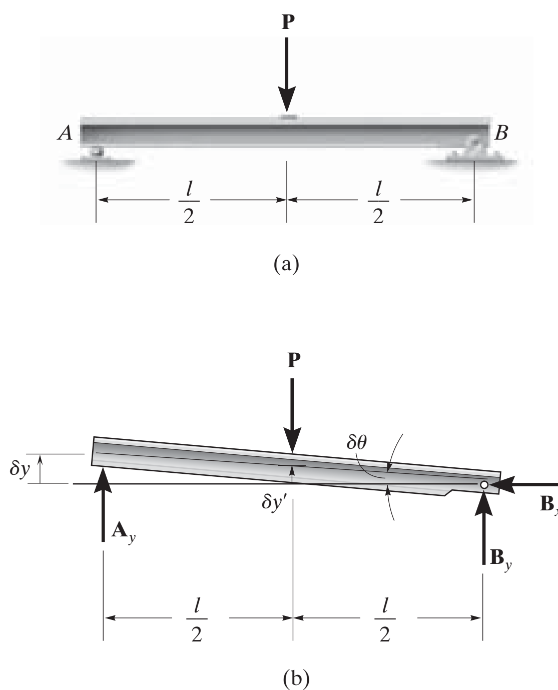



**Fig. 11-4**

# 11.3 Principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados

El método del trabajo virtual es particularmente efectivo para resolver problemas de equilibrio que implican un sistema de varios cuerpos rígidos *conectados*, como los que se muestran en la figura 11-5.

Se dice que cada uno de estos sistemas tiene sólo un grado de libertad puesto que el arreglo de los eslabones puede especificarse por completo con sólo una coordenada $\theta$. En otras palabras, con esta única coordenada y la longitud de los elementos, podemos ubicar la posición de las fuerzas **F** y **P**.

En este texto consideraremos sólo la aplicación del principio del trabajo virtual a sistemas que contienen un grado de libertad.* Como son menos complicados, servirán como una forma de acercarse a la solución de problemas más complejos que implican sistemas con muchos grados de libertad. A continuación se presenta el procedimiento para resolver problemas que involucran un sistema de cuerpos rígidos conectados sin fricción.

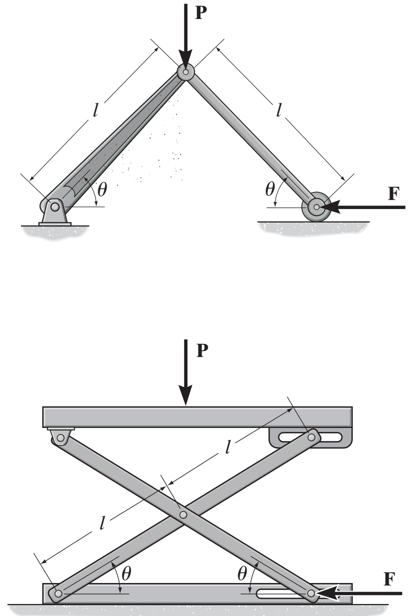



**Fig. 11-5**

## Puntos importantes

- Una fuerza realiza trabajo cuando se mueve a través de un desplazamiento en la dirección de la fuerza. Un momento de par efectúa trabajo cuando se mueve a través de una rotación colineal. Específicamente, se realiza trabajo positivo cuando la fuerza o el momento de par y sus desplazamientos tienen el mismo sentido de dirección.
- Por lo general, el principio del trabajo virtual se usa para determinar la configuración de equilibrio para un sistema de elementos de conexión múltiple.
- Un desplazamiento virtual es imaginario, es decir, no ocurre realmente. Es un diferencial dado en la dirección positiva de la coordenada de posición.
- Las fuerzas o los momentos de par que no se desplazan virtualmente no efectúan trabajo virtual.




Este elevador de tijeras tiene un grado de libertad. Sin necesidad de desmembrar el mecanismo, la fuerza en el cilindro hidráulico *AB* requerida para hacer funcionar el elevador puede determinarse *directamente* si aplicamos el principio del trabajo virtual.

*En ocasiones, a este método de aplicar el principio del trabajo virtual se le llama *método de los desplazamientos virtuales* ya que se aplica un desplazamiento, lo que resulta en el cálculo de una fuerza real. Aunque no se usará aquí, también podemos aplicar el principio del trabajo virtual como un *método de fuerzas virtuales*. Este método se usa a menudo para aplicar una fuerza virtual y después determinar los desplazamientos de los puntos en un cuerpo deformable. Vea R.C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*, 7a. edición, Pearson/Prentice Hall, 2007.

## Procedimiento para el análisis

### Diagrama de cuerpo libre.

- Trace el diagrama de cuerpo libre del sistema completo de cuerpos conectados y defina la *coordenada* $q$.
- Grafique la "posición deflexionada" del sistema en el diagrama de cuerpo libre cuando el sistema experimenta un desplazamiento virtual *positivo* $\delta q$.

### Desplazamientos virtuales.

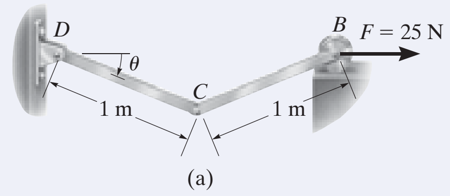
- Indique las *coordenadas de posición* $s$, medidas desde un *punto fijo* en el diagrama de cuerpo libre. Estas coordenadas se dirigen hacia las fuerzas que realizan trabajo.
- Cada uno de estos ejes coordenados debe ser *paralelo* a la línea de acción de la fuerza hacia la que está dirigida, de manera que el trabajo virtual a lo largo del eje coordenado pueda calcularse.
- Relacione cada una de las coordenadas de posición $s$ con la coordenada independiente $q$; luego *diferencie* esas expresiones para representar cada uno de los desplazamientos virtuales $\delta s$ en términos de $\delta q$.

### Ecuación del trabajo virtual.

- Escriba la *ecuación del trabajo virtual* para el sistema y suponga que, sea posible o no, todas las coordenadas de posición $s$ experimentan desplazamientos virtuales *positivos* $\delta s$. Si una fuerza o momento de par tiene la misma dirección que el desplazamiento virtual positivo, el trabajo es positivo. En caso contrario es negativo.
- Exprese el trabajo de *cada* fuerza y momento de par en la ecuación, en términos de $\delta q$.
- Factorice este desplazamiento común de todos los términos y despeje la fuerza, el momento de par o la posición $q$ de equilibrio, desconocidos.

# EJEMPLO 11.1

Determine el ángulo $\theta$ necesario para lograr el equilibrio del eslabonamiento de dos elementos que se muestra en la figura 11-6*a*. Cada elemento tiene una masa de 10 kg.




## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** El sistema tiene sólo un grado de libertad, ya que la ubicación de ambos eslabones puede especificarse mediante la sola coordenada independiente $(q =)\ \theta$. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-6*b*, cuando $\theta$ tiene una rotación virtual *positiva* $\delta\theta$ (en el sentido de las manecillas del reloj), sólo la fuerza **F** y los dos pesos de 98.1 N realizan trabajo (las fuerzas reactivas $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{D}_y$ están fijas, y $\mathbf{B}_y$ no se mueve a lo largo de su línea de acción).

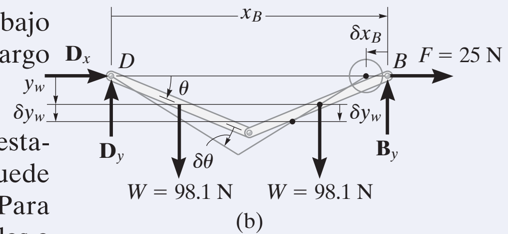



**Fig. 11-6**

**Desplazamientos virtuales.** Si el origen de coordenadas se establece en el soporte de pasador *fijo D*, la ubicación de **F** y **W** puede especificarse mediante las *coordenadas de posición* $x_B$ y $y_w$. Para determinar el trabajo, observe que las coordenadas son paralelas a las líneas de acción de sus fuerzas asociadas. Al expresar las coordenadas de posición en términos $\theta$ y al obtener las derivadas, resulta

$$x_B = 2(1 \cos\theta)\text{ m} \qquad \delta x_B = -2 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta\text{ m} \qquad (1)$$

$$y_w = \tfrac{1}{2}(1 \operatorname{sen}\theta)\text{ m} \qquad \delta y_w = 0.5 \cos\theta\,\delta\theta\text{ m} \qquad (2)$$

Se observa por los signos de esas ecuaciones, y está indicado en la figura 11-6*b*, que un *incremento* de $\theta$ (es decir, $\delta\theta$) ocasiona una *disminución* en $x_B$ y un *incremento* de $y_w$.

**Ecuación del trabajo virtual.** Si los desplazamientos virtuales $\delta x_B$ y $\delta y_w$, fuesen *ambos positivos*, entonces las fuerzas **W** y **F** realizarían trabajo positivo ya que las fuerzas y sus correspondientes desplazamientos tendrían el mismo sentido. Por tanto, la ecuación del trabajo virtual para el desplazamiento $\delta\theta$ es

$$\delta U = 0; \qquad W\,\delta y_w + W\,\delta y_w + F\,\delta x_B = 0 \qquad (3)$$

Al sustituir las ecuaciones 1 y 2 en la ecuación 3 para relacionar los desplazamientos virtuales con el desplazamiento común virtual $\delta\theta$ resulta

$$98.1(0.5 \cos\theta\,\delta\theta) + 98.1(0.5\cos\theta\,\delta\theta) + 25(-2\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$$

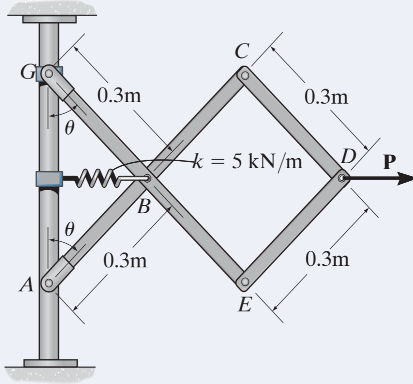
Observe que el “trabajo negativo” realizado por **F** (fuerza en el sentido opuesto al desplazamiento) se ha *tomado en cuenta* en la ecuación anterior mediante el “signo negativo” de la ecuación 1. Al factorizar el *desplazamiento común* $\delta\theta$ y despejar $\theta$, si se observa que $\delta\theta \neq 0$, obtenemos

$$(98.1\cos\theta - 50\operatorname{sen}\theta)\,\delta\theta = 0$$

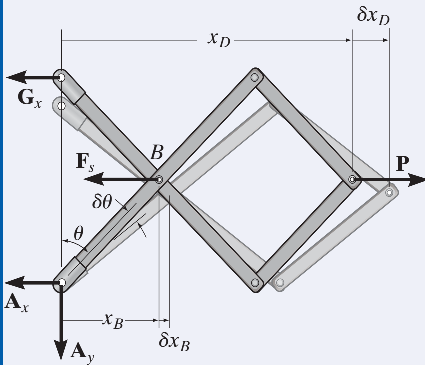
$$\theta = \tan^{-1}\frac{98.1}{50} = 63.0^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

**NOTA:** si este problema se hubiera resuelto con las ecuaciones de equilibrio, habría sido necesario desmembrar los eslabones y aplicar tres ecuaciones escalares a *cada* eslabón. El principio del trabajo virtual, por medio del cálculo, ha eliminado esta tarea para que la respuesta se obtenga directamente.

## EJEMPLO 11.2




(a)




(b)

**Fig. 11-7**

Determine la fuerza $P$ requerida en la figura 11-7$a$, la cual es necesaria para mantener el equilibrio del eslabonamiento de tijeras cuando $\theta = 60°$. El resorte está sin estirar cuando $\theta = 30°$. Ignore la masa de los eslabones.

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Sólo $\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{P}$ realizan trabajo cuando $\theta$ experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, figura 11-7$b$. Para la posición arbitraria $\theta$, el resorte está estirado (0.3 m) sen $\theta$ − (0.3 m) sen 30°, de forma que

$$F_s = ks = 5000 \text{ N/m } [(0.3 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta - (0.3 \text{ m}) \operatorname{sen} 30°]$$
$$= (1500 \operatorname{sen} \theta - 750)\ N$$

**Desplazamientos virtuales.** Las coordenadas de posición, $x_B$ y $x_D$, medidas desde el *punto fijo* $A$, se usan para localizar $\mathbf{F}_s$ y $\mathbf{P}$. Estas coordenadas son paralelas a la línea de acción de sus fuerzas correspondientes. Al expresar $x_B$ y $x_D$ en términos del ángulo $\theta$ y mediante trigonometría,

$$x_B = (0.3 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta$$
$$x_D = 3[(0.3 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta] = (0.9 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta$$

Al diferenciar, obtenemos los desplazamientos virtuales de los puntos $B$ y $D$.

$$\delta x_B = 0.3 \cos \theta \, \delta\theta \qquad (1)$$
$$\delta x_D = 0.9 \cos \theta \, \delta\theta \qquad (2)$$

**Ecuación del trabajo virtual.** La fuerza $\mathbf{P}$ realiza trabajo positivo puesto que actúa en el sentido positivo de su desplazamiento virtual. La fuerza de resorte $\mathbf{F}_s$ efectúa trabajo positivo, ya que actúa en forma opuesta a su desplazamiento virtual positivo. Así, la ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$\delta U = 0; \qquad -F_s \delta x_B + P \delta x_D = 0$$
$$-[1500 \operatorname{sen} \theta - 750](0.3 \cos \theta \, \delta\theta) + P(0.9 \cos \theta \, \delta\theta) = 0$$
$$[0.9P + 225 - 450 \operatorname{sen} \theta] \cos \theta \, \delta\theta = 0$$

Como $\cos \theta \, \delta\theta \neq 0$, entonces esta ecuación requiere que

$$P = 500 \operatorname{sen} \theta - 250$$

Cuando $\theta = 60°$,

$$P = 500 \operatorname{sen} 60° - 250 = 183 \text{ N}$$ ***Resp.***

## EJEMPLO 11.3

Si la caja de la figura 11-8*a* tiene una masa de 10 kg, determine el momento de par $M$ necesario para mantener el equilibrio cuando $\theta = 60°$. Ignore la masa de los elementos.

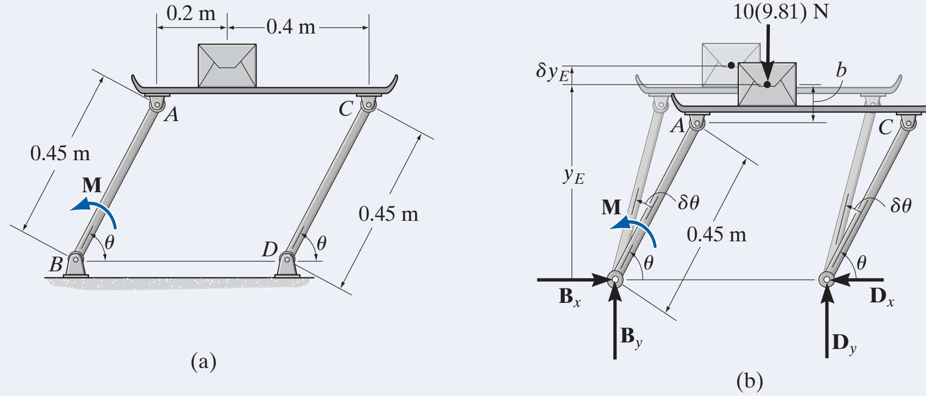



**Fig. 11-8**

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Cuando $\theta$ experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, sólo el momento de par **M** y el peso de la caja realizan trabajo, figura 11-8*b*.

**Desplazamientos virtuales.** La coordenada de posición $y_E$ medida desde el *punto fijo B*, ubica el peso, 10(9.81) N. Aquí,

$$y_E = (0.45 \text{ m}) \operatorname{sen} \theta + b$$

donde $b$ es una distancia constante. Al diferenciar esta ecuación obtenemos

$$\delta y_E = 0.45 \text{ m} \cos \theta \, \delta\theta \qquad (1)$$

**Ecuación del trabajo virtual.** La ecuación del trabajo virtual toma la forma

$$\delta U = 0; \qquad M\delta\theta - [10(9.81) \text{ N}]\delta y_E = 0$$

Al sustituir la ecuación 1 en esta ecuación

$$M\delta\theta - 10(9.81) \text{ N}(0.45 \text{ m} \cos \theta \, \delta\theta) = 0$$
$$\delta\theta(M - 44.145 \cos \theta) = 0$$

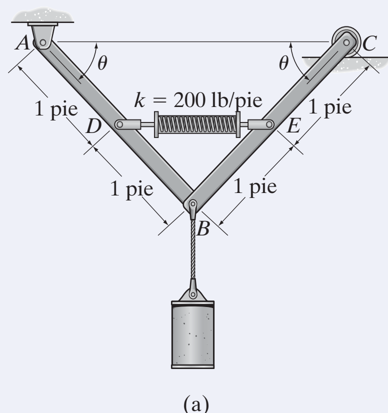
Como $\delta\theta \neq 0$, entonces

$$M - 44.145 \cos \theta = 0$$

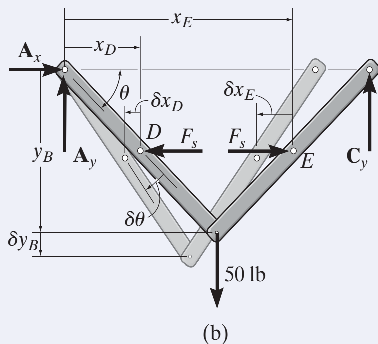
Como se requiere que $\theta = 60°$, entonces

$$M = 44.145 \cos 60° = 22.1 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 11.4




(a)




(b)

**Fig. 11-9**

El mecanismo de la figura 11-9*a* sostiene el cilindro de 50 lb. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio si el resorte tiene una longitud no deformada de 2 pies cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los elementos.

### SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Cuando el mecanismo experimenta un desplazamiento virtual positivo $\delta\theta$, figura 11-9*b*, sólo $\mathbf{F}_s$ y la fuerza de 50 lb realizan trabajo. Como la longitud final del resorte es 2(1 pie cos $\theta$), entonces

$$F_s = ks = (200 \text{ lb/pie})(2 \text{ pies} - 2 \text{ pies} \cos\theta) = (400 - 400\cos\theta) \text{ lb}$$

**Desplazamientos virtuales.** Las coordenadas de posición $x_D$ y $x_E$ se establecen a partir del *punto fijo A* para localizar $\mathbf{F}_s$ en $D$ y en $E$. La coordenada $y_B$, también medida desde $A$, especifica la posición de la fuerza de 50 lb en $B$. Las coordenadas se pueden expresar en términos de $\theta$ con trigonometría.

$$x_D = (1 \text{ pie})\cos\theta$$

$$x_E = 3[(1 \text{ pie})\cos\theta] = (3 \text{ pies})\cos\theta$$

$$y_B = (2 \text{ pies})\,\text{sen}\,\theta$$

Al diferenciar, obtenemos los desplazamientos virtuales de los puntos $D$, $E$ y $B$ como

$$\delta x_D = -1\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \qquad (1)$$

$$\delta x_E = -3\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta \qquad (2)$$

$$\delta y_B = 2\cos\theta\,\delta\theta \qquad (3)$$

**Ecuación del trabajo virtual.** La ecuación del trabajo virtual se escribe como si todos los desplazamientos virtuales fueran positivos, por tanto

$$\delta U = 0; \qquad F_s\delta x_E + 50\delta y_B - F_s\delta x_D = 0$$

$$(400 - 400\cos\theta)(-3\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) + 50(2\cos\theta\,\delta\theta)$$

$$-(400 - 400\cos\theta)(-1\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$\delta\theta(800\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 800\,\text{sen}\,\theta + 100\cos\theta) = 0$$

Como $\delta\theta \neq 0$, entonces

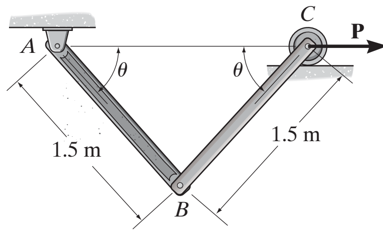
$$800\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 800\,\text{sen}\,\theta + 100\cos\theta = 0$$

Al resolver por prueba y error,

$$\theta = 34.9° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

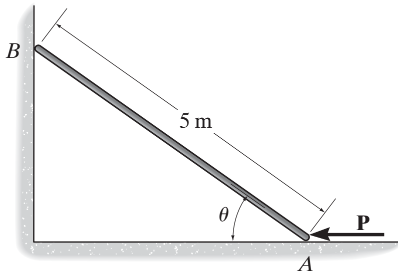
## PROBLEMAS FUNDAMENTALES

**F11-1.** Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del eslabonamiento en $\theta = 60°$. Cada eslabón tiene una masa de 20 kg.



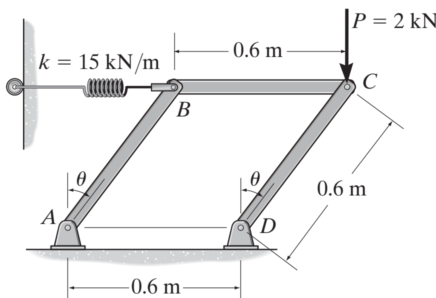

F11-1

**F11-2.** Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para sostener la barra lisa de 50 kg en equilibrio en $\theta = 60°$.



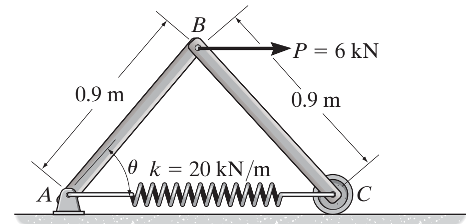

F11-2

**F11-3.** El eslabonamiento está sometido a una fuerza de $P = 2$ kN. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.



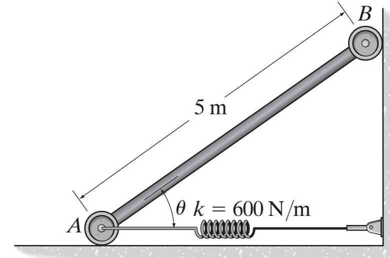

F11-3

**F11-4.** El eslabonamiento está sometido a una fuerza de $P = 6$ kN. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$. Ignore la masa de los eslabones.



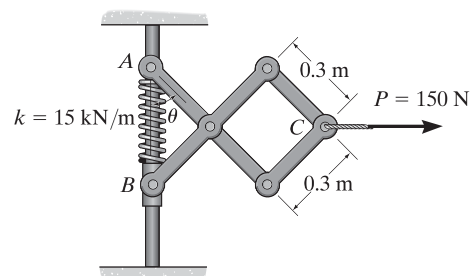

F11-4

**F11-5.** Determine el ángulo $\theta$ con el cual la barra de 50 kg se encuentra en equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$.




F11-5

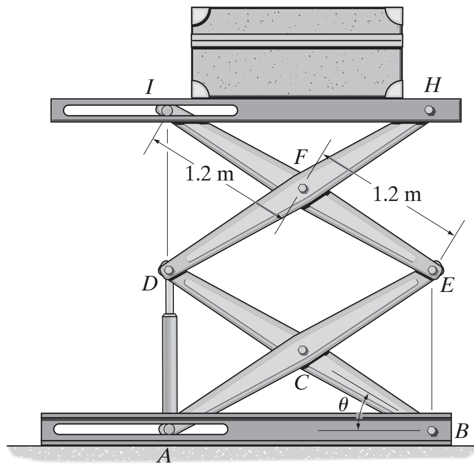
**F11-6.** El eslabonamiento de tijeras está sometido a una fuerza de $P = 150$ N. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.




F11-6

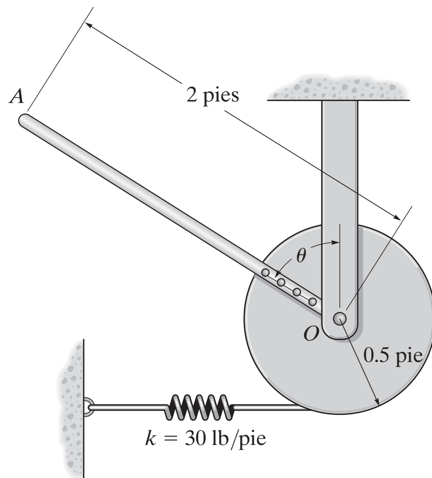
## PROBLEMAS

**•11-1.** El embalaje de 200 kg está sobre la mesa elevadora en la posición $\theta = 30°$. Determine la fuerza necesaria en el cilindro hidráulico $AD$ para lograr el equilibrio. Ignore la masa de los componentes de la mesa elevadora.




**Prob. 11-1**

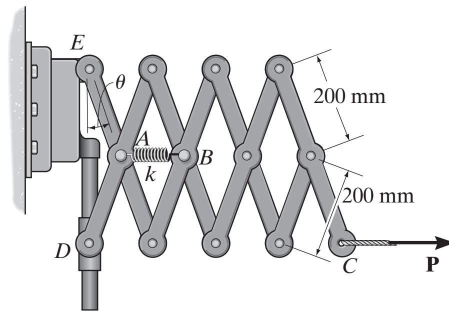
**11-2.** La barra uniforme $OA$ tiene un peso de 10 lb. Cuando la barra está en posición vertical, $\theta = 0°$, el resorte no está deformado. Determine el ángulo $\theta$ para equilibrio si el extremo del resorte se enrolla alrededor de la periferia del disco cuando éste gira.




**Prob. 11-2**

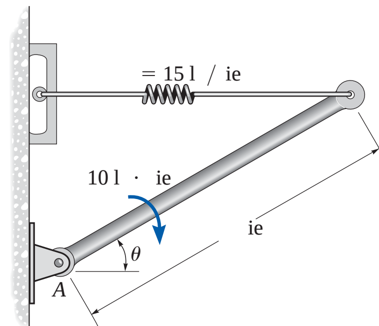
**11-3.** Las "tijeras de Nuremberg" están sometidas a una fuerza horizontal de $P = 600$ N. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. El resorte tiene una rigidez de $k = 15$ kN/m y está sin deformar cuando $\theta = 15°$.

***11-4.** Las "tijeras de Nuremberg" están sometidas a una fuerza horizontal de $P = 600$ N. Determine la rigidez $k$ del resorte necesaria para el equilibrio cuando $\theta = 60°$. El resorte está sin deformar cuando $\theta = 15°$.



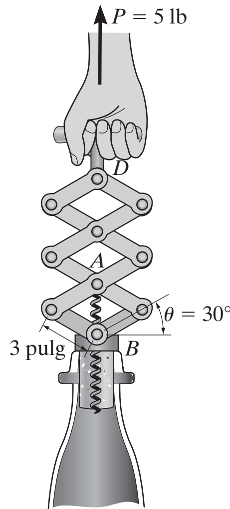

**Probs. 11-3/4**

**•11-5.** Determine la fuerza desarrollada en el resorte y que se requiere para mantener la barra uniforme $AB$ de 10 lb en equilibrio cuando $\theta = 35°$.




**Prob. 11-5**

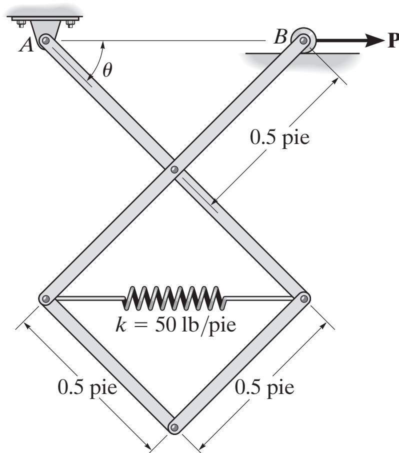
**11-6.** Si se aplica una fuerza de $P = 5$ lb a la manija del mecanismo, determine la fuerza que ejerce el tornillo sobre el corcho de la botella. El tornillo está unido al pasador en $A$ y pasa por el collarín que está unido al cuello de la botella en $B$.




**Prob. 11-6**

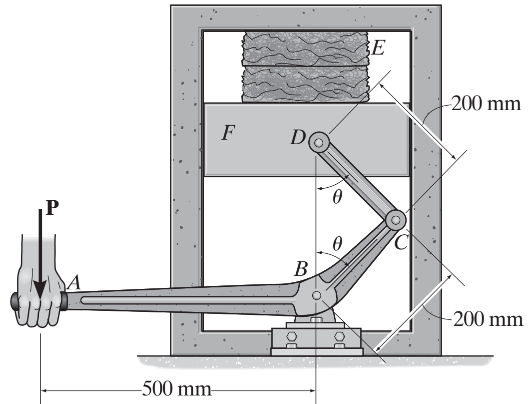
**11-7.** El mecanismo conectado mediante pasadores está restringido en $A$ por un pasador y en $B$ por un rodillo. Si $P = 10$ lb, determine el ángulo $\theta$ necesario para lograr el equilibrio. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso de los elementos.

***11-8.** El mecanismo conectado mediante pasadores está restringido en $A$ por un pasador y en $B$ por un rodillo. Determine la fuerza $P$ que debe aplicarse al rodillo para mantener al mecanismo en equilibrio cuando $\theta = 30°$. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso de los elementos.



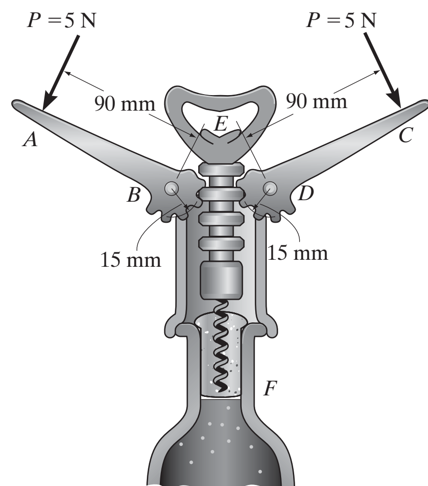

**Probs. 11-7/8**

•**11-9.** Si se aplica una fuerza $P = 100$ N al brazo de la prensa de palanca acodillada, determine la fuerza de apriete desarrollada en el bloque cuando $\theta = 45°$. Ignore el peso del bloque.




**Prob. 11-9**

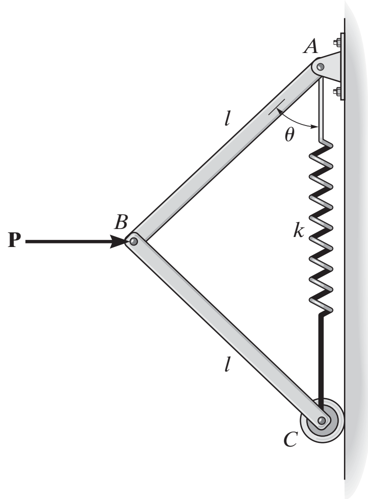
**11-10.** Determine la fuerza de jalón desarrollada en el corcho, cuando se aplican las fuerzas a las manijas del destapador de botellas.




**Prob. 11-10**

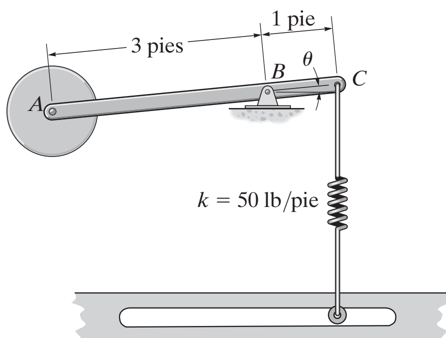
**11-11.** Si el resorte tiene una rigidez $k$ y una longitud no deformada $l_0$, determine la fuerza $P$ cuando el mecanismo está en la posición mostrada. Ignore el peso de los elementos.

***11-12.** Resuelva el problema 11-11 si la fuerza **P** se aplica verticalmente hacia abajo en $B$.



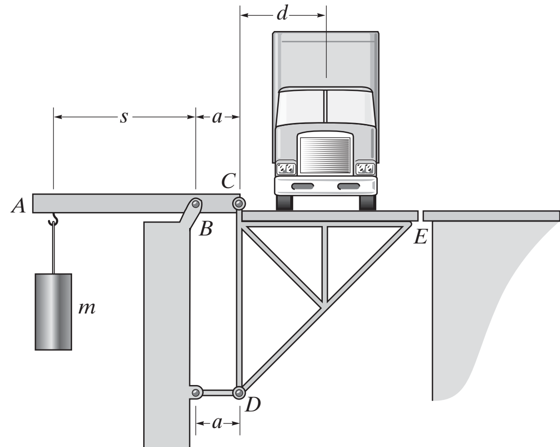

Probs. 11-11/12

**•11-13.** Determine los ángulos $\theta$ para el equilibrio del disco de 4 lb con el principio del trabajo virtual. Ignore el peso de la barra. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$ y siempre permanece en posición vertical debido a la guía de rodillo.



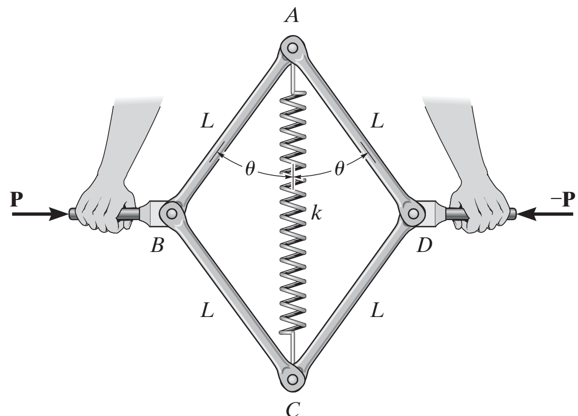

Prob. 11-13

**11-14.** El camión se pesa en la báscula de inspección de la carretera. Si se coloca una masa $m$ conocida a una distancia $s$ desde el fulcro $B$ de la báscula, determine la masa del camión $m_t$ si su centro de gravedad se ubica a una distancia $d$ desde el punto $C$. Cuando la báscula está vacía, el peso de la palanca $ABC$ equilibra a la báscula $CDE$.




Prob. 11-14

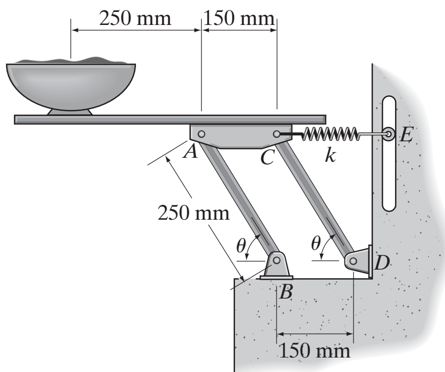
**11-15.** El dispositivo se usa para hacer ejercicio. Consiste en cuatro barras conectadas mediante pasadores, cada barra tiene una longitud $L$, y un resorte de rigidez $k$ con longitud no deformada $a(< 2L)$. Si se aplican fuerzas horizontales sobre las manijas de manera que $\theta$ disminuya lentamente, determine el ángulo $\theta$ para el que la magnitud de **P** resulta un máximo.




Prob. 11-15

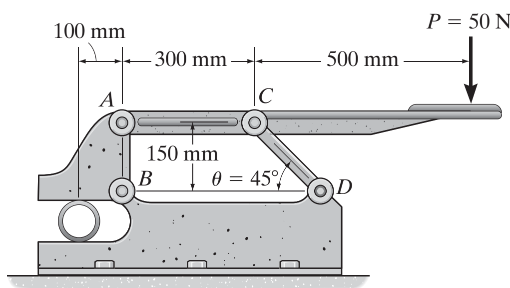
*11-16. Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, $AB$ y $CD$, y resortes $CE$. Si el tazón tiene una masa de 1 kg, determine el ángulo $\theta$ con el que la mesa está en equilibrio. Cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 200$ N/m y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.

•11-17. Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, $AB$ y $CD$, y resortes $CE$. Si el tazón tiene una masa de 1 kg y está en equilibrio cuando $\theta = 45°$, determine la rigidez $k$ de cada resorte. Los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.



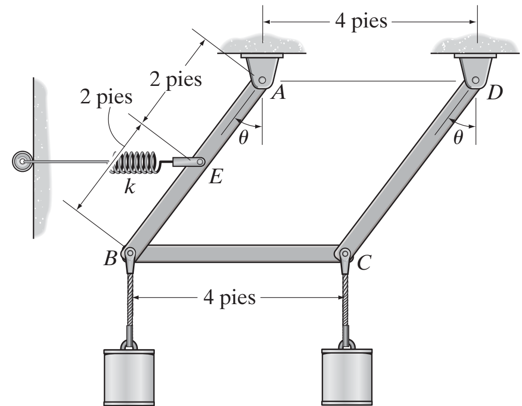

Probs. 11-16/17

11-18. Si se aplica una fuerza vertical de $P = 50$ N a la palanca acodillada de la mordaza, determine la fuerza de apriete ejercida sobre el tubo.



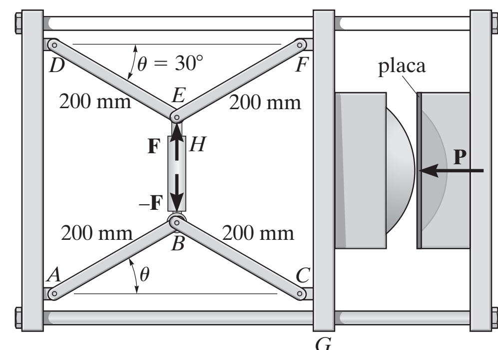

Prob. 11-18

11-19. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$ y tiene una rigidez de $k = 1000$ lb/pie. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio si cada uno de los cilindros pesa 50 lb. Ignore el peso de los elementos. El resorte permanece horizontal en cualquier momento debido al rodillo.




Prob. 11-19

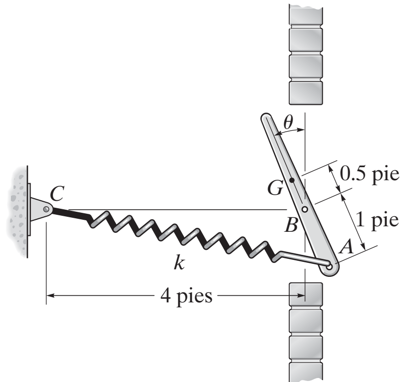
*11-20. La máquina que se ilustra se usa para dar forma a placas metálicas. Consiste en dos fiadores $ABC$ y $DEF$, los cuales funcionan mediante un cilindro hidráulico. Los fiadores empujan la barra móvil $G$ hacia delante, y presionan la placa en la cavidad. Si la fuerza que ejerce la placa sobre la cabeza es $P = 8$ kN, determine la fuerza $F$ en el cilindro hidráulico cuando $\theta = 30°$.




Prob. 11-20

11

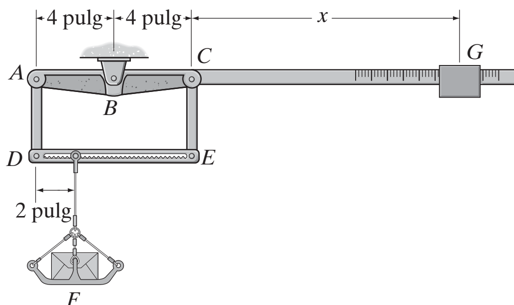
•**11-21.** La placa de una ventila está sostenida en $B$ mediante un pasador. Si pesa 15 lb y tiene su centro de gravedad en $G$, determine la rigidez $k$ del resorte de manera que la placa permanezca en equilibrio cuando $\theta = 30°$. El resorte no está deformado cuando $\theta = 0°$.




**Prob. 11-21**

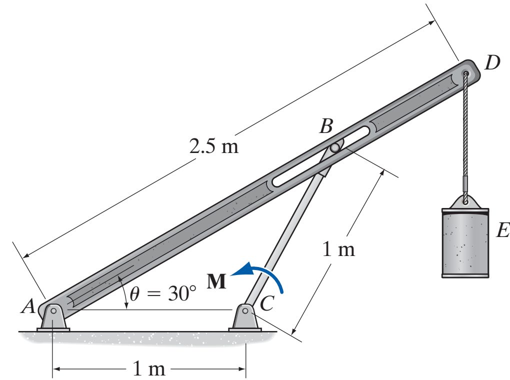
**11-22.** Determine el peso del bloque $G$ requerido para equilibrar la palanca diferencial cuando la carga $F$ de 20 lb se coloca sobre la bandeja. La palanca está en equilibrio cuando la carga y el bloque no están sobre la palanca. Considere que $x = 12$ pulg.

**11-23.** Si la carga $F$ pesa 20 lb y el bloque $G$ pesa 2 lb, determine su posición $x$ necesaria para lograr el equilibrio de la palanca diferencial. La palanca está en equilibrio cuando la carga y el bloque no están sobre la palanca.



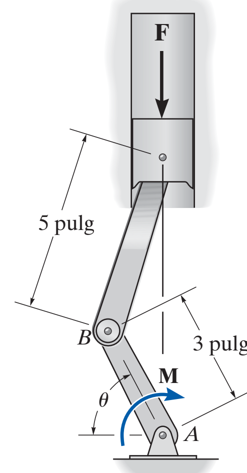

**Probs. 11-22/23**

*__11-24.__ Determine la magnitud del momento de par **M** requerido para sostener el cilindro de 20 kg en la configuración que se muestra. La clavija lisa en $B$ puede deslizarse libremente dentro de la ranura. Ignore la masa de los elementos.




**Prob. 11-24**

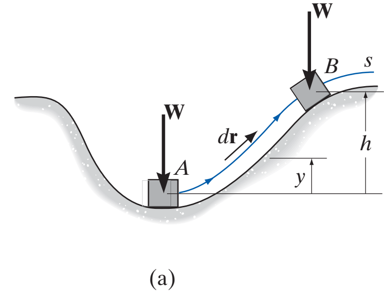
•**11-25.** El cigüeñal está sometido a un par de torsión de $M = 50$ lb · pie. Determine la fuerza vertical **F** de compresión aplicada al pistón que se necesita para lograr el equilibrio cuando $\theta = 60°$.



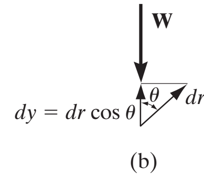

**Prob. 11-25**

## *11.4 Fuerzas conservadoras

Si el trabajo de una fuerza depende sólo de sus posiciones inicial y final, y es *independiente* de la trayectoria que recorre, entonces la fuerza se conoce como una *fuerza conservadora*. El peso de un cuerpo y la fuerza de un resorte son dos ejemplos de fuerzas conservadoras.




(a)




(b)

**Fig. 11-10**

**Peso.** Considere un bloque de peso **W** que viaja a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 11-10*a*. Cuando se desplaza hacia arriba por la trayectoria una cantidad $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo es $dU = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r}$, o $dU = -W(dr\cos\theta) = -W(dr\cos\theta) = -W\,dy$, como se muestra en la figura 11-10*b*. En este caso, el trabajo es *negativo* ya que **W** actúa en el sentido opuesto a $dy$. De modo que si el bloque se mueve desde $A$ hasta $B$, a través del desplazamiento vertical $h$, el trabajo es

$$U = -\int_0^h W\,dy = -Wh$$

Por lo tanto, el peso de un cuerpo es una fuerza conservadora, debido a que el trabajo realizado por el peso depende sólo del *desplazamiento vertical* del cuerpo, y es independiente de la trayectoria a lo largo de la cual viaja éste.

**Fuerza de resorte.** Ahora considere el resorte linealmente elástico de la figura 11-11, el cual experimenta un desplazamiento $ds$. El trabajo es *negativo* debido a que $\mathbf{F}_s$ actúa en sentido opuesto al de $ds$. Entonces, el trabajo de $\mathbf{F}_s$ cuando el bloque se desplaza desde $s = s_1$ hasta $s = s_2$ es

$$U = -\int_{s_1}^{s_2} ks\,ds = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)$$

Aquí, el trabajo depende sólo de las posiciones inicial y final del resorte, $s_1$ y $s_2$, medidas desde la posición no deformada del resorte. Como este resultado es independiente de la trayectoria tomada por el bloque mientras se mueve, entonces la fuerza de resorte también es una *fuerza conservadora*.

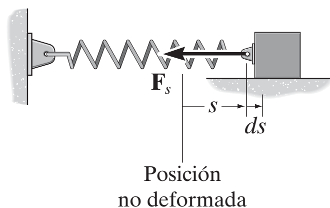



**Fig. 11-11**

**Fricción.** Al contrario de una fuerza conservadora, considere la fuerza de *fricción* ejercida por una superficie fija sobre un cuerpo deslizante. El trabajo realizado por la fuerza de fricción depende de la trayectoria; cuanto más larga sea la trayectoria, mayor será el trabajo. En consecuencia, las fuerzas de fricción son *no conservadoras*, y la mayor parte del trabajo realizado por ellas se disipa en el cuerpo en la forma de calor.

## *11.5 Energía potencial

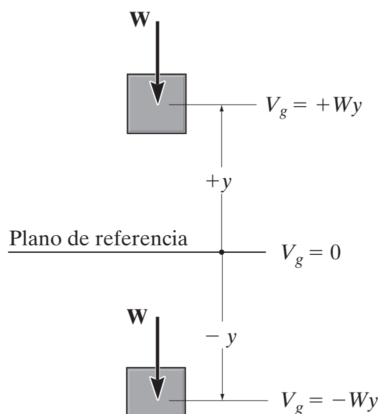



Fig. 11-12

Cuando una fuerza conservadora actúa sobre un cuerpo, le proporciona la capacidad de realizar trabajo. Esta capacidad, medida como *energía potencial*, depende de la ubicación del cuerpo en relación con una posición de referencia fija o *datum* (plano de referencia).

**Energía potencial gravitacional.** Si un cuerpo está ubicado a una distancia *y por arriba* de una referencia fija horizontal o plano de referencia, como en la figura 11-12, el peso del cuerpo tiene energía potencial gravitacional *positiva* $V_g$ y puesto que **W** tiene la capacidad de realizar trabajo positivo cuando el cuerpo es llevado al plano de referencia. De la misma forma, si el cuerpo está localizado a una distancia *y por abajo* del plano de referencia, $V_g$ es *negativa* puesto que el peso efectúa trabajo negativo cuando el cuerpo es movido hacia arriba hasta el plano de referencia, en el cual, $V_g = 0$.

Si *y* se mide como *positiva hacia arriba*, entonces la energía potencial gravitacional del peso **W** es

$$V_g = Wy \tag{11-4}$$

**Energía potencial elástica.** Cuando un resorte está estirado o comprimido en una cantidad *s* desde su posición no deformada (el plano de referencia), la energía almacenada en el resorte se denomina *energía potencial elástica*. Se determina a partir de

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \tag{11-5}$$

Esta energía siempre es una cantidad positiva, ya que la fuerza de resorte que actúa sobre el cuerpo unido realiza trabajo *positivo* sobre el cuerpo mientras la fuerza regresa al cuerpo a la posición del resorte no deformado, figura 11-13.

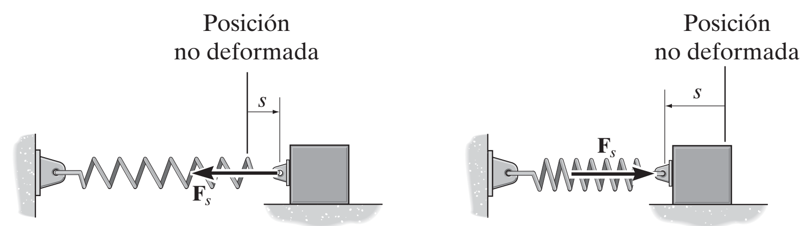



Fig. 11-13

**Función potencial.** En el caso general, si un cuerpo está sometido *tanto* a fuerzas gravitatorias *como* elásticas, la *energía potencial o función potencial V* del cuerpo puede expresarse como la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{11-6}$$

donde la medida de $V$ depende de la ubicación del cuerpo con respecto a un plano de referencia seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 11-4 y 11-5.

En particular, si un *sistema* sin fricción de cuerpos rígidos conectados tiene *un solo grado de libertad*, de modo que su posición vertical desde el plano de referencia está definida por la coordenada $q$, entonces la función potencial para el sistema puede expresarse como $V = V(q)$. El trabajo realizado por todos los pesos y fuerzas de resorte que actúan sobre el sistema para moverlo desde $q_1$ hasta $q_2$, se mide por la *diferencia* en $V$; es decir,

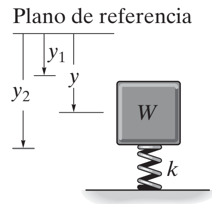
$$U_{1-2} = V(q_1) - V(q_2) \tag{11-7}$$

Por ejemplo, la función potencial para un sistema que consiste en un bloque de peso **W** sostenido por un resorte, como en la figura 11-14, puede expresarse en términos de la coordenada ($q =$) $y$, medida desde una referencia fija ubicada en la longitud no deformada del resorte. Aquí

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Wy + \tfrac{1}{2}ky^2 \end{aligned} \tag{11-8}$$

Si el bloque se mueve desde $y_1$ hasta $y_2$, entonces al aplicar la ecuación 11-7 el trabajo de **W** y $\mathbf{F}_s$ es

$$U_{1-2} = V(y_1) - V(y_2) = -W(y_1 - y_2) + \tfrac{1}{2}ky_1^2 - \tfrac{1}{2}ky_2^2$$




(a)

**Fig. 11-14**

## *11.6 Criterio de la energía potencial para el equilibrio

Si un sistema sin fricción conectado tiene un grado de libertad, y su posición está definida por la coordenada $q$, entonces si se desplaza desde $q$ hasta $q + dq$, la ecuación 11-7 toma la forma de

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

o bien

$$dU = -dV$$

Si el sistema está en equilibrio y experimenta un *desplazamiento virtual* $\delta q$, en vez de un desplazamiento real $dq$, entonces la ecuación anterior se convierte en $\delta U = -\delta V$. Sin embargo, el principio del trabajo virtual requiere que $\delta U = 0$ y, por tanto, $\delta V = 0$, por lo que es posible escribir $\delta V = (dV/dq)\,\delta q = 0$. Como $\delta q \neq 0$, esta expresión se escribe de la siguiente manera

$$\boxed{\frac{dV}{dq} = 0} \qquad (11\text{-}9)$$

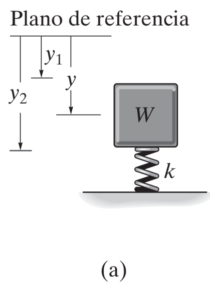
Por consiguiente, *cuando un sistema sin fricción de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio, la primera derivada de su función potencial es cero*. Por ejemplo, con la ecuación 11-8 podemos determinar la posición de equilibrio para el resorte y el bloque de la figura 11-14*a*. Tenemos

$$\frac{dV}{dy} = -W + ky = 0$$

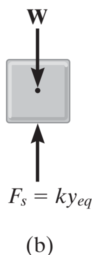
Entonces, la posición de equilibrio $y = y_{eq}$ es

$$y_{eq} = \frac{W}{k}$$

Por supuesto, este *mismo resultado* se puede obtener al aplicar $\Sigma F_y = 0$ a las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 11-14*b*.




(a)




(b)

**Fig. 11-14**

## *11.7 Estabilidad de la configuración del equilibrio

La función potencial $V$ de un sistema también puede usarse para investigar la estabilidad de la configuración del equilibrio, el cual se clasifica como *estable*, *neutro* o *inestable*.

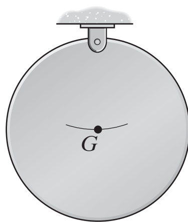
**Equilibrio estable.** Se dice que un sistema es *estable* si tiene una tendencia a regresar a su posición original cuando se le da un pequeño desplazamiento al sistema. En este caso, la energía potencial del sistema está en su *mínimo*. En la figura 11-15*a*, cuando al disco se le da un pequeño desplazamiento, su centro de gravedad $G$ siempre se moverá (girará) de regreso a su posición de equilibrio, la cual se encuentra en el *punto más bajo* de su trayectoria. Ésta es la razón por la que la energía potencial del disco está en su *mínimo*.




El contrapeso en $A$ equilibra el peso de la plataforma $B$ de este puente levadizo simple. Al aplicar el método de la energía potencial podemos estudiar la estabilidad de la estructura para diferentes posiciones de equilibrio de la plataforma.

**Equilibrio neutro.** Se dice que un sistema está en *equilibrio neutro* si el sistema permanece en equilibrio aun cuando se le dé un pequeño desplazamiento desde su posición original. En este caso, la energía potencial del sistema es *constante*. En la figura 11-15*b*, se muestra el equilibrio neutro, donde un disco está articulado en $G$. Cada vez que se gira el disco, se establece una nueva posición de equilibrio y la energía potencial permanece sin cambios.

**Equilibrio inestable.** Se dice que un sistema es *inestable*. Si tiene una tendencia a *desplazarse aún más lejos* de su posición de equilibrio original cuando se le da un pequeño desplazamiento. En este caso, la energía potencial del sistema es un *máximo*. En la figura 11-15*c*, se muestra una posición de equilibrio inestable del disco. Aquí el disco girará alejándose de su posición de equilibrio cuando su centro de gravedad es desplazado ligeramente. En el *punto más alto*, su energía potencial es un *máximo*.



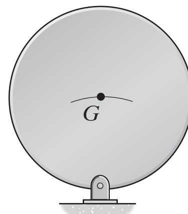

Equilibrio estable

(a)




Equilibrio neutro

(b)




Equilibrio inestable

(c)

**Fig. 11-15**

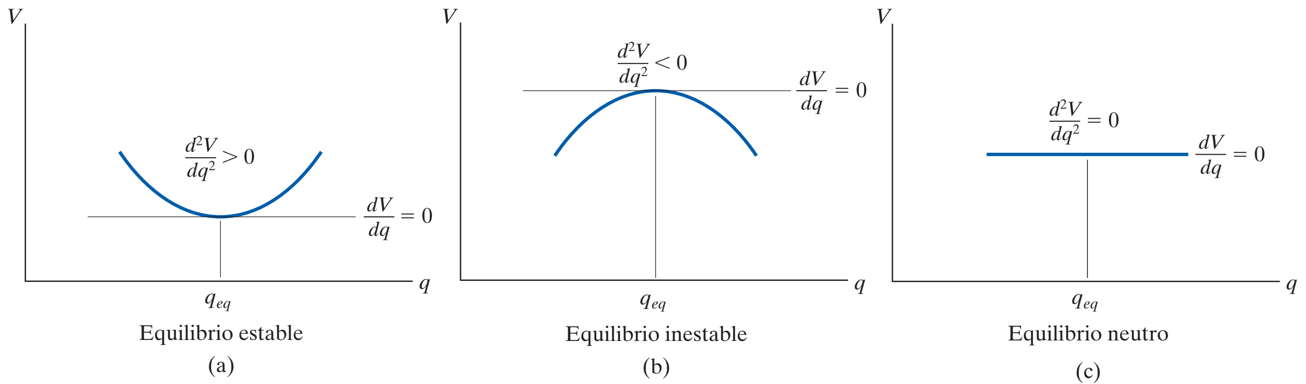



**Fig. 11-16**

**Sistema con un grado de libertad.** Si un sistema tiene sólo un grado de libertad, y su posición se define mediante la coordenada $q$, entonces se puede graficar la función potencial $V$ para el sistema en términos de $q$, figura 11-16. Siempre que el sistema esté en *equilibrio*, entonces $dV/dq$, lo cual representa la pendiente de esta función, debe ser igual a cero. Por tanto, una investigación de la estabilidad en la configuración del equilibrio requiere la evaluación de la segunda derivada de la función potencial.

Si $d^2V/dq^2$ es mayor que cero, figura 11-16*a*, la energía potencial del sistema será un *mínimo*. Esto indica que la configuración del equilibrio es *estable*. Por consiguiente,

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable} \qquad (11\text{-}10)$$

Si $d^2V/dq^2$ es menor que cero, figura 11-16*b*, la energía potencial del sistema será un *máximo*. Esto indica una configuración *inestable* del equilibrio. Por tanto,

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable} \qquad (11\text{-}11)$$



11

Cuando hay vientos fuertes o si pasan por una curva, estas carretas con caña de azúcar pueden volverse inestables y volcarse, ya que cuando están cargadas al máximo sus centros de gravedad están muy arriba y fuera del camino.

Por último, si $d^2V/dq^2$ es igual a cero, será necesario investigar las derivadas de orden más alto para determinar la estabilidad. La configuración del equilibrio será *estable* si la primera derivada distinta de cero es de un orden *par* y es *positiva*. De la misma manera, el equilibrio será *inestable* si esta primera derivada distinta de cero es impar o si es par y negativa. Si todas las derivadas de orden más alto son *cero*, se dice que el sistema está en *equilibrio neutro*, figura 11-16*c*. Por lo tanto,

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \cdots = 0 \qquad \text{equilibrio neutro} \qquad (11\text{-}12)$$

Esta condición ocurre sólo si la función de energía potencial para el sistema es constante en $q_{\text{eq}}$ o en la vecindad de éste.

## Procedimiento para el análisis

Con los métodos de energía potencial, las posiciones de equilibrio y la estabilidad de un cuerpo o de un sistema de cuerpos conectados, y que tienen un solo grado de libertad, se pueden obtener por el siguiente procedimiento.

### Función potencial.

- Bosqueje el sistema de modo que quede ubicado en alguna *posición arbitraria* especificada por la coordenada $q$.
- Establezca un *plano de referencia* horizontal a través de un *punto fijo** y exprese la energía potencial gravitacional $V_g$ en términos del peso $W$ de cada elemento y de su distancia vertical $y$ desde el plano de referencia, $V_g = Wy$.
- Exprese la energía potencial elástica $V_e$ del sistema en términos del estiramiento o la compresión $s$ de cualquier resorte conectado, $V_e = \frac{1}{2}ks^2$.
- Formule la función potencial $V = V_g + V_e$, y exprese las *coordenadas de posición* $y$ y $s$ en términos de la coordenada independiente $q$.

### Posición de equilibrio.

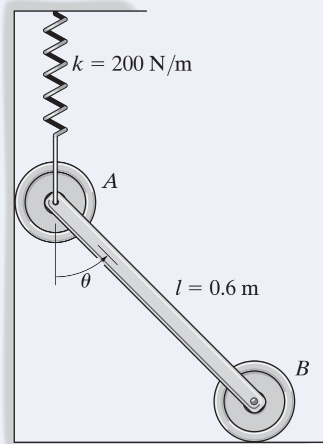
- La posición de equilibrio del sistema se determina al tomar la primera derivada de $V$ y establecerla como igual a cero, $dV/dq = 0$.

### Estabilidad.

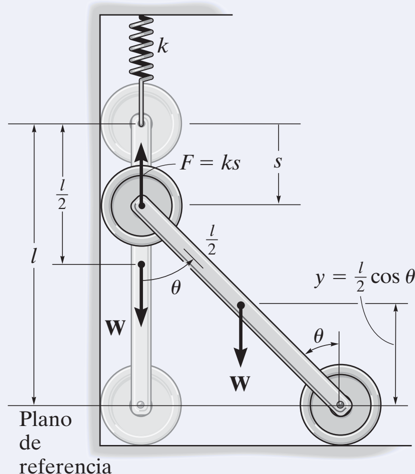
- La estabilidad en la posición de equilibrio se determina por la evaluación de la segunda derivada o la derivada de mayor orden de $V$.
- Si la segunda derivada es mayor que cero, el sistema es estable; si todas las derivadas son iguales a cero, el sistema está en equilibrio neutro; y si la segunda derivada es menor que cero, el sistema es inestable.

*La ubicación del plano de referencia es *arbitraria* ya que sólo se requieren los *cambios* o diferenciales de $V$ para investigar la posición de equilibrio y su estabilidad.

## EJEMPLO 11.5




(a)




(b)

**Fig. 11-17**

El eslabón uniforme que se muestra en la figura 11-17*a* tiene una masa de 10 kg. Si el resorte no está alargado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.

### SOLUCIÓN

**Función potencial.** El plano de referencia se establece en la parte inferior del eslabón, figura 11-17*b*. Cuando el eslabón se ubica en la posición arbitraria $\theta$, el resorte aumenta su energía potencial al alargarse y el peso disminuye su energía potencial. Por tanto,

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 + Wy$$

Como $l = s + l\cos\theta$ o $s = l(1 - \cos\theta)$, y $y = (l/2)\cos\theta$, entonces

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 + W\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

**Posición de equilibrio.** La primera derivada de $V$ es

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\operatorname{sen}\theta = 0$$

o bien

$$l\left[kl(1 - \cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\operatorname{sen}\theta = 0$$

Esta ecuación se satisface siempre que

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = 0° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = \cos^{-1}\left[1 - \frac{10(9.81)}{2(200)(0.6)}\right] = 53.8° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Estabilidad.** La segunda derivada de $V$ es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2(1 - \cos\theta)\cos\theta + kl^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$
$$= kl^2(\cos\theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

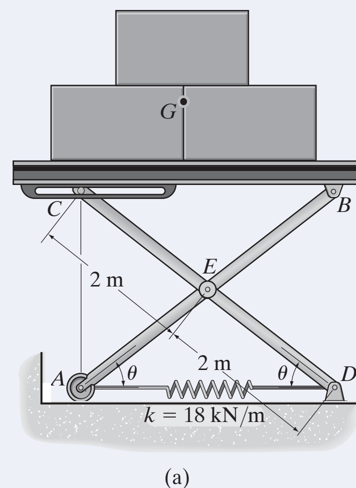
Al sustituir valores para las constantes, con $\theta = 0°$ y $\theta = 53.8°$, se obtiene

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = 200(0.6)^2(\cos 0° - \cos 0°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 0°$$
$$= -29.4 < 0 \qquad \text{(equilibrio inestable en } \theta = 0°) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53.8°} = 200(0.6)^2(\cos 53.8° - \cos 107.6°) - \frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos 53.8°$$
$$= 46.9 > 0 \qquad \text{(equilibrio estable en } \theta = 53.8°) \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 11.6

Si el resorte $AD$ de la figura 11-18$a$ tiene una rigidez de 18 kN/m y no está deformado cuando $\theta = 60°$, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. La carga tiene una masa de 1.5 Mg. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.




(a)

### SOLUCIÓN

**Energía potencial.** La energía potencial gravitacional para la carga con respecto al plano de referencia fijo, que se muestra en la figura 11-18$b$, es

$$V_g = mgy = 1500(9.81)\text{ N}[(4\text{ m})\text{ sen }\theta + h] = 58\,860\text{ sen }\theta + 14\,715h$$

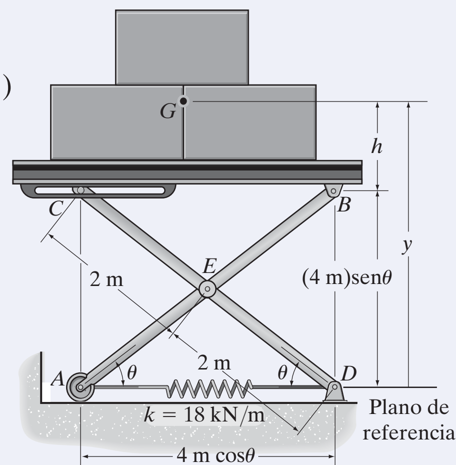
donde $h$ es una distancia constante. A partir de la geometría del sistema, el alargamiento del resorte cuando la carga está sobre la plataforma es $s = (4\text{ m})\cos\theta - (4\text{ m})\cos 60° = (4\text{ m})\cos\theta - 2\text{ m}$.

Por consiguiente, la energía potencial elástica del sistema es

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}(18\,000\text{ N/m})(4\text{ m}\cos\theta - 2\text{ m})^2 = 9000(4\cos\theta - 2)^2$$

Por lo tanto, la función de energía potencial para el sistema es

$$V = V_g + V_e = 58\,860\text{ sen }\theta + 14\,715h + 9000(4\cos\theta - 2)^2 \qquad (1)$$




(b)

**Fig. 11-18**

**Equilibrio.** Cuando el sistema está en equilibrio,

$$\frac{dV}{d\theta} = 58\,860\cos\theta + 18\,000(4\cos\theta - 2)(-4\text{ sen }\theta) = 0$$

$$58\,860\cos\theta - 288\,000\text{ sen }\theta\cos\theta + 144\,000\text{ sen }\theta = 0$$

Como $\text{sen }2\theta = 2\text{ sen }\theta\cos\theta$,

$$58\,860\cos\theta - 144\,000\text{ sen }2\theta + 144\,000\text{ sen }\theta = 0$$

Al resolver por prueba y error

$$\theta = 28.18° \text{ y } \theta = 45.51° \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

**Estabilidad.** Si se obtiene la segunda derivada de la ecuación 1,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -58\,860\text{ sen }\theta - 288\,000\cos 2\theta + 144\,000\cos\theta$$

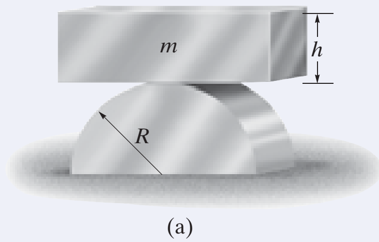
Al sustituir $\theta = 28.18°$ se obtiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -60\,409 < 0 \qquad \text{Inestable} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

Y para $\theta = 45.51°$,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 64\,073 > 0 \qquad \text{Estable} \qquad \textbf{\textit{Resp.}}$$

## EJEMPLO 11.8



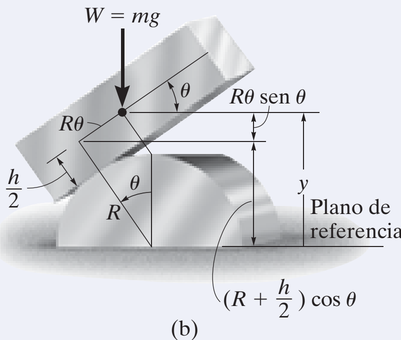
(a)

El bloque homogéneo con masa $m$ descansa sobre la superficie superior del medio cilindro, figura 11-19*a*. Demuestre que ésta es una condición de equilibrio inestable si $h > 2R$.

### SOLUCIÓN

**Función potencial.** La referencia se establece en la base del cilindro, figura 11-19*b*. Si el bloque se desplaza una cantidad $\theta$ desde la posición de equilibrio, la función potencial es

$$V = V_e + V_g$$
$$= 0 + mgy$$



(b)

**Fig. 11-19**

A partir de la figura 11-18*b*,

$$y = \left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto,

$$V = mg\left[\left(R + \frac{h}{2}\right)\cos\theta + R\theta \operatorname{sen}\theta\right]$$

**Posición de equilibrio.**

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\left[-\left(R + \frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right] = 0$$
$$= mg\left(-\frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta\right) = 0$$

Observe que $\theta = 0°$ satisface esta ecuación.

**Estabilidad.** Al tomar la segunda derivada de $V$ se obtiene

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\left(-\frac{h}{2}\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta\right)$$

En $\theta = 0°$,

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0°} = -mg\left(\frac{h}{2} - R\right)$$

Como todas las constantes son positivas, el bloque estará en equilibrio inestable siempre que $h > 2R$, porque entonces $d^2V/d\theta^2 < 0$.

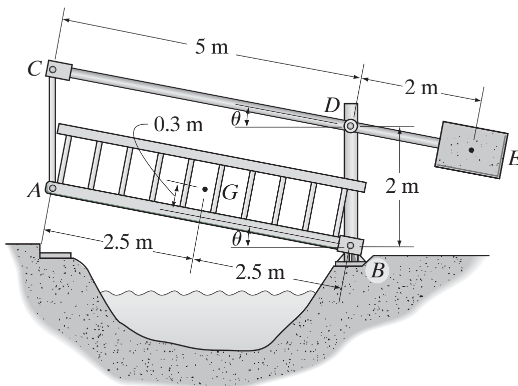
## PROBLEMAS

**11-26.** Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (4x^3 - x^2 - 3x + 10)$ pies · lb, donde $x$ está dada en pies, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

**11-27.** Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (24 \text{ sen } \theta + 10 \cos 2\theta)$ pies · lb, $0° \leq \theta \leq 90°$, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

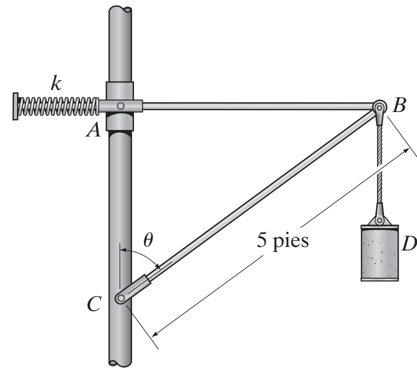
***11-28.** Si la energía potencial para un sistema conservador de un grado de libertad se expresa mediante la relación $V = (3y^3 + 2y^2 - 4y + 50)$ J, donde $y$ está dada en metros, determine las posiciones de equilibrio e investigue la estabilidad en cada una de esas posiciones.

•**11-29.** El puente de 2 Mg, con centro de masa en el punto $G$, se eleva mediante dos vigas $CD$, localizadas a cada lado del puente. Si el contrapeso $E$ de 2 Mg está unido a las vigas como se muestra en la figura, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. Ignore el peso de las vigas y de las barras de unión.



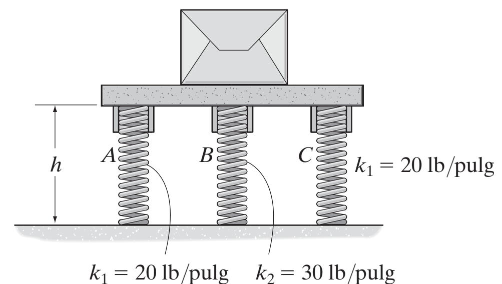

**Prob. 11-29**

**11-30.** El resorte tiene una rigidez $k = 600$ lb/pie y no está deformado cuando $\theta = 45°$. Si el mecanismo está en equilibrio cuando $\theta = 60°$, determine el peso del cilindro $D$. Ignore el peso de los elementos. La barra $AB$ permanece horizontal en cualquier momento puesto que el collar puede deslizarse libremente a lo largo de la guía vertical.



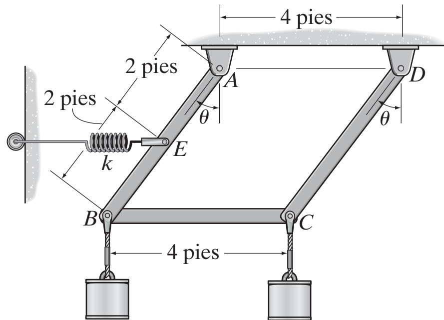

**Prob. 11-30**

**11-31.** Si los resortes en $A$ y $C$ tienen una longitud no deformada de 10 pulgadas mientras que el resorte en $B$ tiene una longitud no deformada de 12 pulgadas, determine la altura $h$ de la plataforma cuando el sistema está en equilibrio. Investigue la estabilidad de esta configuración de equilibrio. El paquete y la plataforma tienen un peso total de 150 lb.



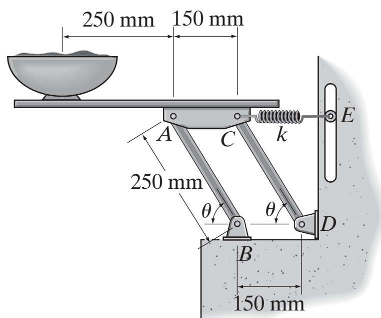

**Prob. 11-31**

*11-32. El resorte no está deformado cuando $\theta = 45°$ y tiene una rigidez de $k = 1000$ lb/pie. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio si cada uno de los cilindros pesa 50 lb. Ignore el peso de los elementos.



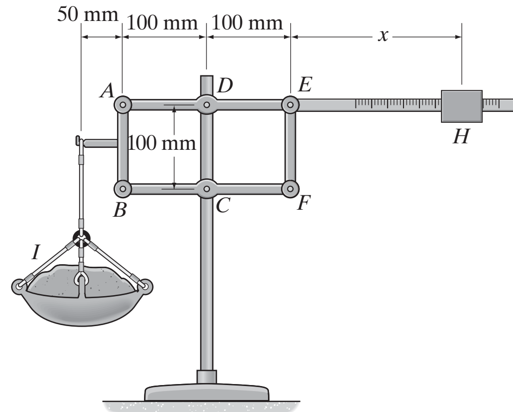

Prob. 11-32

•11-33. Una mesa de servicio uniforme de 5 kg se sostiene en cada lado mediante dos pares de eslabones idénticos, *AB* y *CD*, y resortes *CE*. Si el tazón tiene una masa de 1 kg, determine el ángulo $\theta$ con el que la mesa está en equilibrio. Cada uno de los resortes tiene una rigidez de $k = 200$ N/m y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Ignore la masa de los eslabones.



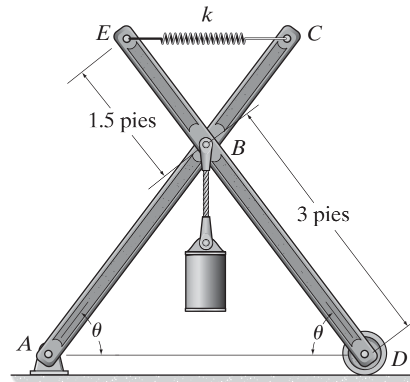

Prob. 11-33

11-34. Si se coloca una carga *I* de 10 kg sobre la bandeja, determine la posición *x* del bloque *H* de 0.75 kg para lograr el equilibrio. La báscula está en equilibrio cuando el peso y la carga no se encuentran sobre ella.



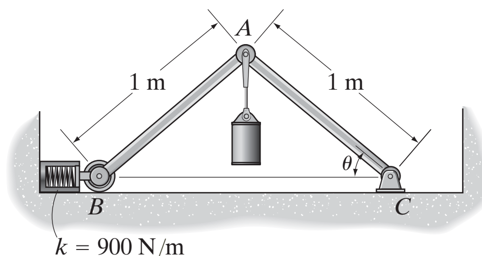

Prob. 11-34

11-35. Determine los ángulos $\theta$ necesarios para el equilibrio del cilindro de 200 lb e investigue la estabilidad de cada posición. El resorte tiene una rigidez de $k = 300$ lb/pie y una longitud no deformada de 0.75 pie.



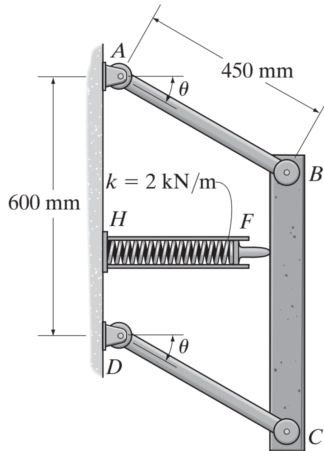

Prob. 11-35

*11-36. Determine los ángulos $\theta$ necesarios para el equilibrio del cilindro de 50 kg e investigue la estabilidad de cada posición. El resorte no está deformado cuando $\theta = 60°$.



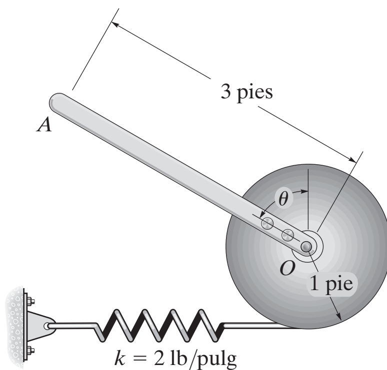

Prob. 11-36

•**11-37.** Si el mecanismo está en equilibrio cuando $\theta = 30°$, determine la masa de la barra $BC$. El resorte tiene una rigidez de $k = 2$ kN/m y no está deformado cuando $\theta = 0°$. Ignore la masa de los eslabones.



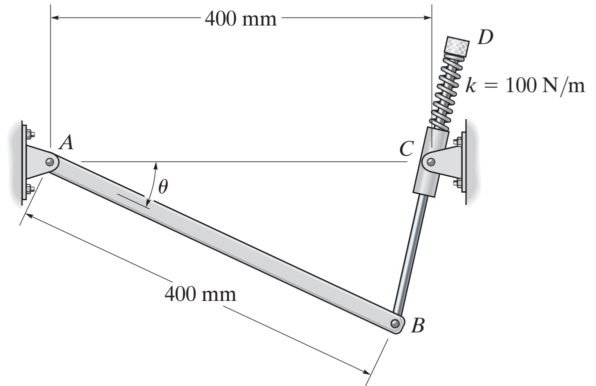

**Prob. 11-37**

**11-38.** La barra uniforme $OA$ pesa 20 lb, y cuando la barra está en posición vertical, el resorte no está deformado. Determine la posición $\theta$ necesaria para el equilibrio. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio.



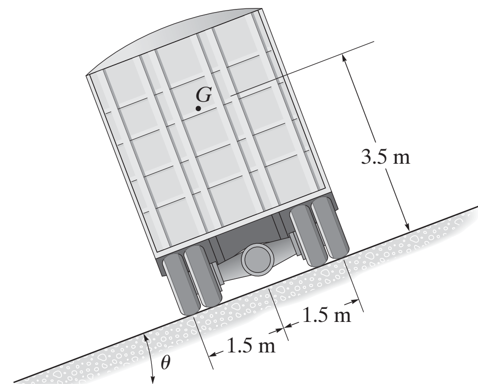

**Prob. 11-38**

**11-39.** El eslabón uniforme $AB$ tiene una masa de 3 kg y está conectado mediante pasadores en sus dos extremos. La barra $BD$, que tiene un peso insignificante, pasa a través de un bloque giratorio en $C$. Si el resorte tiene una rigidez de $k = 100$ N/m y no está deformado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio e investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Ignore el tamaño del bloque giratorio.



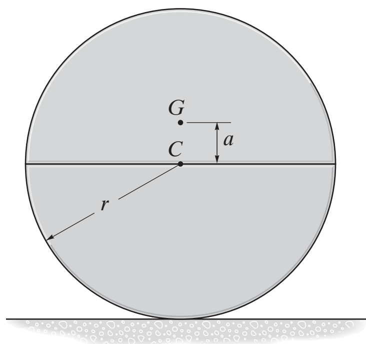

**Prob. 11-39**

*__11-40.__ El camión tiene una masa de 20 Mg y su centro de masa en $G$. Determine la pendiente máxima $\theta$ en la que puede estacionarse sin voltearse e investigue la estabilidad en esta posición.



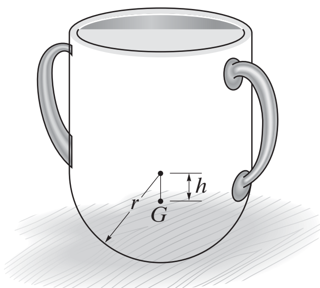

**Prob. 11-40**

•**11-41.** El cilindro está hecho de dos materiales de tal forma que tiene una masa $m$ y centro de gravedad en el punto $G$. Muestre que cuando $G$ se encuentra por arriba del centroide $C$ del cilindro, el equilibrio es inestable.



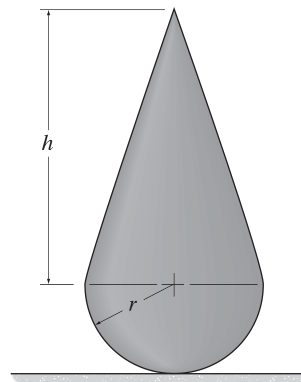

Prob. 11-41

**11-42.** La taza tiene un fondo semiesférico y una masa $m$. Determine la posición $h$ del centro de masa $G$ de modo que la taza esté en equilibrio neutro.



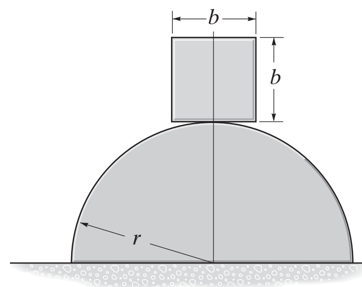

Prob. 11-42

**11-43.** Determine la altura $h$ del cono en términos del radio $r$ de la semiesfera de modo que el ensamble esté en equilibrio neutro. Tanto el cono como la semiesfera están hechos del mismo material.



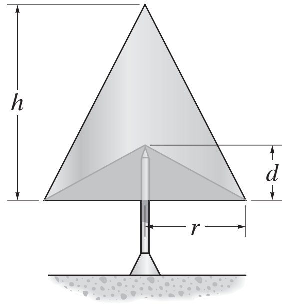

Prob. 11-43

***11-44.** Un bloque homogéneo descansa en la parte superior de la superficie cilíndrica. Obtenga la relación entre el radio $r$ del cilindro y la dimensión $b$ del bloque para obtener equilibrio estable. *Sugerencia:* establezca la función de energía potencial para un ángulo $\theta$ pequeño, es decir, aproxime sen $\theta \approx 0$ y cos $\theta \approx 1 - \theta^2/2$.




Prob. 11-44

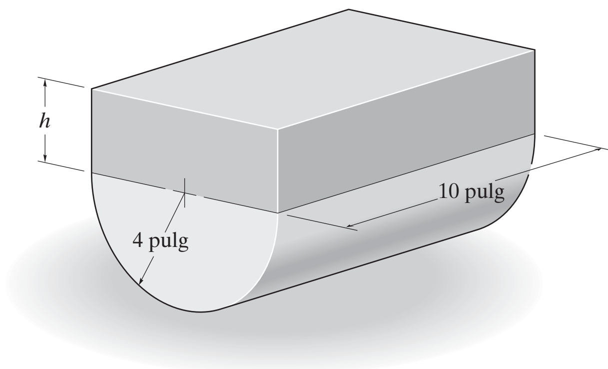
**•11-45.** El cono homogéneo tiene una cavidad cónica cortada en su base como se muestra en la figura. Determine la profundidad $d$ de la cavidad en términos de $h$ de manera que el cono se equilibre sobre el pivote y permanezca en equilibrio neutro.




**Prob. 11-45**

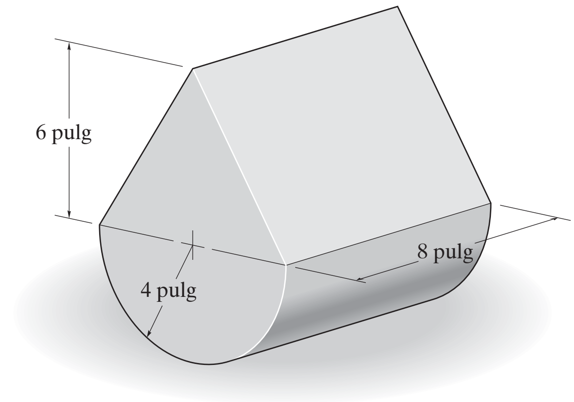
**11-46.** El ensamble que se ilustra consiste en un semicilindro y un bloque rectangular. Si el bloque pesa 8 lb y el semicilindro pesa 2 lb, investigue la estabilidad cuando el ensamble descansa en la posición de equilibrio. Considere $h = 4$ pulg.

**11-47.** El semicilindro de 2 lb sostiene al bloque rectangular que tiene un peso específico de $\gamma = 80$ lb/pie$^3$. Determine la altura $h$ del bloque que producirá un equilibrio neutro en la posición que se ilustra.



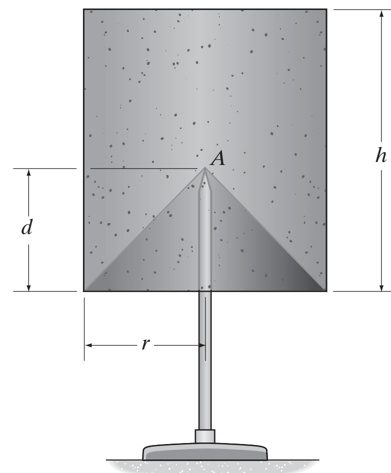

**Probs. 11-46/47**

***11-48.** El ensamble que se ilustra consta de un cilindro semicircular y un prisma triangular. Si el prisma pesa 8 lb y el cilindro pesa 2 lb, investigue la estabilidad cuando el ensamble descansa en la posición de equilibrio.




**Prob. 11-48**

**•11-49.** Un orificio cónico se taladra en la base del cilindro, y éste se sostiene por medio del fulcro en $A$. Determine la distancia $d$ mínima para que el cilindro permanezca en equilibrio estable.




**Prob. 11-49**

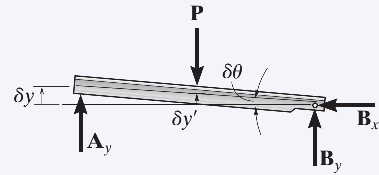
## REPASO DEL CAPÍTULO

**Principio del trabajo virtual**

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo realizarán *trabajo virtual* cuando el cuerpo experimente un desplazamiento o una rotación diferencial *imaginaria*.

$\delta y, \delta y'$ — desplazamientos virtuales

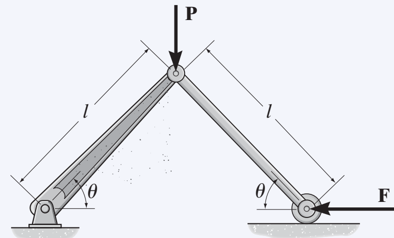
$\delta\theta$ — rotación virtual




Para el equilibrio, la suma del trabajo virtual realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero para cualquier desplazamiento virtual. A esto se le llama *principio del trabajo virtual*, y es útil para determinar la configuración de equilibrio de un mecanismo o de una fuerza reactiva que actúe sobre una serie de elementos conectados.

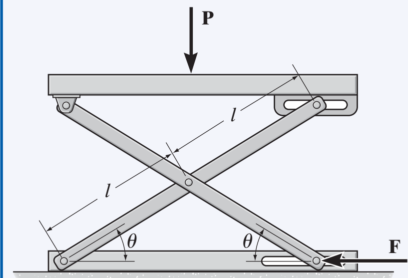
$$\delta U = 0$$

Si el sistema de elementos conectados tiene un grado de libertad, entonces su posición puede especificarse por medio de una coordenada independiente como $\theta$.




Para aplicar el principio del trabajo virtual, primero es necesario usar *coordenadas de posición* para localizar todas las fuerzas y momentos actuantes sobre el mecanismo que efectuarán trabajo cuando éste experimente un movimiento virtual $\delta\theta$.

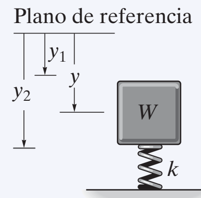
Las coordenadas se relacionan con la coordenada independiente $\theta$, y entonces esas expresiones se diferencian para relacionar los desplazamientos coordenados *virtuales* con el desplazamiento virtual $\delta\theta$.




Por último, la ecuación del trabajo virtual para el mecanismo se escribe en función del desplazamiento virtual común $\delta\theta$ y luego se iguala a cero. Al factorizar $\delta\theta$ fuera de la ecuación, es posible determinar entonces la fuerza desconocida o el momento de par desconocido, o bien la posición de equilibrio $\theta$.

**Criterio de la energía potencial para el equilibrio**

Cuando un sistema está sometido sólo a fuerzas conservadoras, como las fuerzas del peso o las de un resorte, entonces la configuración del equilibrio puede determinarse con la *función V de la energía potencial* para el sistema.




(a)

$$V = V_g + V_e = -W_y + \tfrac{1}{2}ky^2$$

La función de la energía potencial se establece al expresar la energía potencial del peso y del resorte para el sistema en términos de la coordenada independiente $q$.

Una vez formulada la función de la energía potencial, su primera derivada se establece como igual a cero. La solución proporciona la posición de equilibrio $q_{eq}$ para el sistema.

$$\frac{dV}{dq} = 0$$

La estabilidad del sistema se puede investigar si se toma la segunda derivada de $V$.

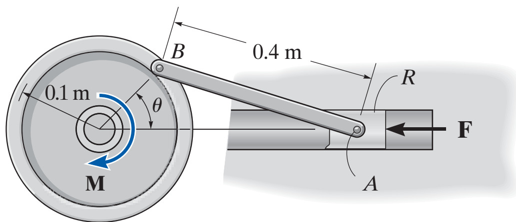
$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable}$$

$$\frac{dV}{dq} = 0, \quad \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable}$$

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = \cdots = 0 \qquad \text{equilibrio neutro}$$

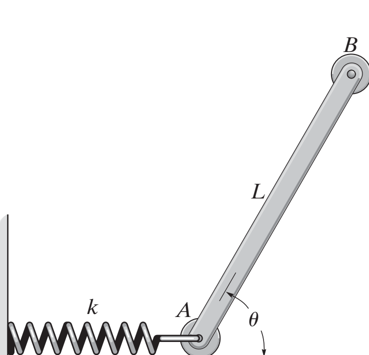
## PROBLEMAS DE REPASO

**11-50.** La prensa punzonadora consiste en el pisón $R$, que conecta a la barra $AB$ y a un volante. Si se aplica un par de torsión de $M = 50$ N · m al volante, determine la fuerza $F$ aplicada en el pisón para mantener la barra en la posición $\theta = 60°$.



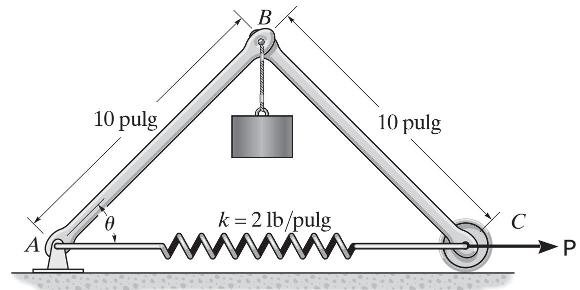

Prob. 11-50

**11-51.** La barra uniforme tiene un peso $W$. Determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio. El resorte no está comprimido cuando $\theta = 90°$. Ignore el peso de los rodillos.



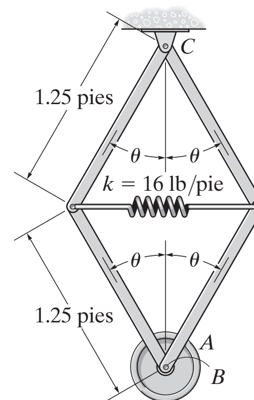

Prob. 11-51

*__11-52.__ Los eslabones uniformes $AB$ y $BC$ pesan cada uno 2 lb y el cilindro pesa 20 lb. Determine la fuerza horizontal $P$ requerida para mantener el mecanismo en $\theta = 45°$. El resorte tiene una longitud no alargada de 6 pulg.



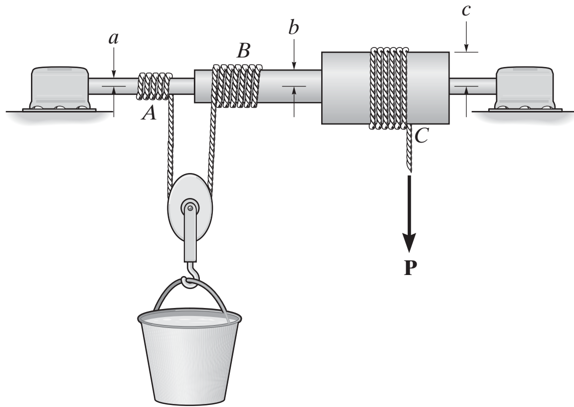

Prob. 11-52

•**11-53.** El resorte unido al mecanismo tiene una longitud no alargada cuando $\theta = 90°$. Determine la posición $\theta$ necesaria para el equilibrio e investigue la estabilidad del mecanismo en esta posición. El disco $A$ está conectado mediante un pasador al bastidor colocado en $B$ y tiene un peso de 20 lb.



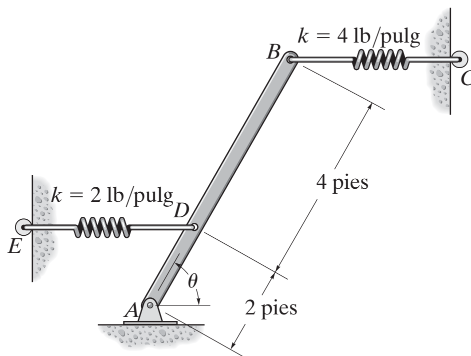

Prob. 11-53

**11-54.** Determine la fuerza $P$ que debe aplicarse a la cuerda enrollada alrededor del tambor en $C$, la cual es necesaria para elevar el cubo que tiene una masa $m$. Observe que mientras el cubo se eleva, la polea rueda sobre una cuerda que se enrolla sobre la flecha $B$ y se desenrolla de la flecha $A$.




**Prob. 11-54**

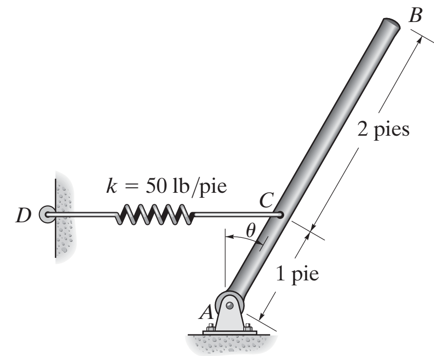
**11-55.** La barra uniforme $AB$ pesa 100 lb. Si ambos resortes $DE$ y $BC$ no están alargados cuando $\theta = 90°$, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio por el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad en la posición de equilibrio. Ambos resortes actúan siempre en la posición horizontal debido a las guías de rodillo colocadas en $C$ y $E$.




**Prob. 11-55**

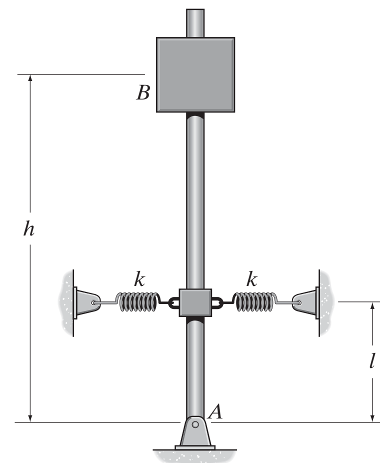
***11-56.** La barra uniforme $AB$ tiene un peso de 10 lb. Si el resorte $DC$ no está estirado cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo $\theta$ necesario para el equilibrio por el principio del trabajo virtual. El resorte siempre permanece en la posición horizontal debido a la guía de rodillo en $D$.

**•11-57.** Resuelva el problema 11-56 con el principio de la energía potencial. Investigue la estabilidad de la barra cuando está en la posición de equilibrio.




**Probs. 11-56/57**

**11-58.** Determine la altura $h$ del bloque $B$ de modo que la barra esté en equilibrio neutro. Los resortes no están estirados cuando la barra se encuentra en la posición vertical. El bloque tiene un peso $W$.




**Prob. 11-58**

APÉNDICE

# A Repaso y expresiones matemáticas

## Repaso de geometría y trigonometría

Los ángulos $\theta$ en la figura A-1 son iguales entre la línea transversal y las dos líneas paralelas.

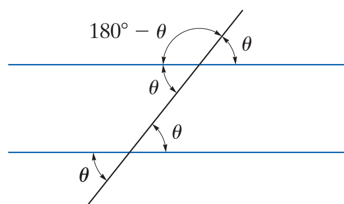



Fig. A-1

Para una línea y su normal, los ángulos $\theta$ de la figura A-2 son iguales.

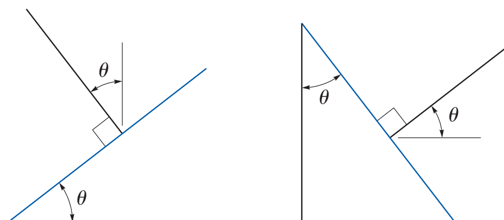



Fig. A-2

Para el círculo de la figura A-3, $s = \theta r$, de manera que cuando $\theta = 360° = 2\pi$ rad entonces la circunferencia es $s = 2\pi r$. Además, como $180° = \pi$ rad, entonces $\theta$ (rad) $= (\pi/180°)\theta°$. El área del círculo es $A = \pi r^2$.

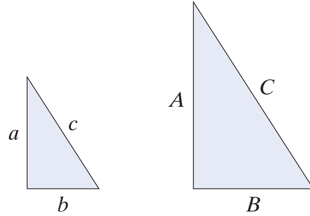



Fig. A-4

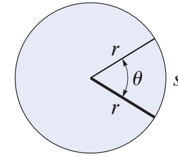



Fig. A-3

Los lados de un triángulo semejante se pueden obtener por proporción, como en la figura A-4, donde $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$.

Para el triángulo rectángulo de la figura A-5, el teorema de Pitágoras es

$$h = \sqrt{(o)^2 + (a)^2}$$

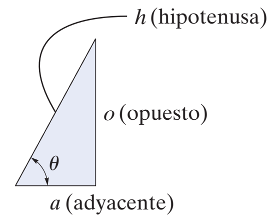



Fig. A-5

Las funciones trigonométricas son

$$\text{sen}\,\theta = \frac{o}{h}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{h}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a}$$

Lo anterior puede recordarse con facilidad como "soh, cah, toa", es decir, el seno es el opuesto sobre la hipotenusa, etcétera. A partir de esto se obtienen las otras funciones trigonométricas.

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{h}{o}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{a}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{a}{o}$$

## Identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}},\ \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

## Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

## Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

## Expansiones de series de potencias

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots,\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots,\ \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

## Derivadas

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u\sec u\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$$

## Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\quad ab<0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C,\ ab>0$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,\quad a>0$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\ a>0$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C,\ c<0$$

$$\int \mathrm{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \mathrm{sen}\,x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\mathrm{sen}(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\mathrm{sen}(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \mathrm{senh}\,x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \mathrm{senh}\,x + C$$

A

# Problemas fundamentales
# Soluciones parciales y respuestas

## Capítulo 2

**F2-1.**

$F_R = \sqrt{(2\text{ kN})^2 + (6\text{ kN})^2 - 2(2\text{ kN})(6\text{ kN})\cos 105^\circ}$

$= 6.798\text{ kN} = 6.80\text{ kN}$ ***Resp.***

$\dfrac{\text{sen }\phi}{6\text{ kN}} = \dfrac{\text{sen }105^\circ}{6.798\text{ kN}}, \quad \phi = 58.49^\circ$

$\theta = 45^\circ + \phi = 45^\circ + 58.49^\circ = 103^\circ$ ***Resp.***

**F2-2.** $F_R = \sqrt{200^2 + 500^2 - 2(200)(500)\cos 140^\circ}$

$= 666\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-3.** $F_R = \sqrt{600^2 + 800^2 - 2(600)(800)\cos 60^\circ}$

$= 721.11\text{ N} = 721\text{ N}$ ***Resp.***

$\dfrac{\text{sen }\alpha}{800} = \dfrac{\text{sen }60^\circ}{721.11}; \quad \alpha = 73.90^\circ$

$\phi = \alpha - 30^\circ = 73.90^\circ - 30^\circ = 43.9^\circ$ ***Resp.***

**F2-4.** $\dfrac{F_u}{\text{sen }45^\circ} = \dfrac{30}{\text{sen }105^\circ}; \quad F_u = 22.0\text{ lb}$ ***Resp.***

$\dfrac{F_v}{\text{sen }30^\circ} = \dfrac{30}{\text{sen }105^\circ}; \quad F_v = 15.5\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-5.** $\dfrac{F_{AB}}{\text{sen }105^\circ} = \dfrac{450}{\text{sen }30^\circ}$

$F_{AB} = 869\text{ lb}$ ***Resp.***

$\dfrac{F_{AC}}{\text{sen }45^\circ} = \dfrac{450}{\text{sen }30^\circ}$

$F_{AC} = 636\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-6.** $\dfrac{F}{\text{sen }30^\circ} = \dfrac{6}{\text{sen }105^\circ} \quad F = 3.11\text{ kN}$ ***Resp.***

$\dfrac{F_v}{\text{sen }45^\circ} = \dfrac{6}{\text{sen }105^\circ} \quad F_v = 4.39\text{ kN}$ ***Resp.***

**F2-7.** $(F_1)_x = 0 \quad (F_1)_y = 300\text{ N}$ ***Resp.***

$(F_2)_x = -(450\text{ N})\cos 45^\circ = -318\text{ N}$ ***Resp.***

$(F_2)_y = (450\text{ N})\text{ sen }45^\circ = 318\text{ N}$ ***Resp.***

$(F_3)_x = \left(\tfrac{3}{5}\right)600\text{ N} = 360\text{ N}$ ***Resp.***

$(F_3)_y = \left(\tfrac{4}{5}\right)600\text{ N} = 480\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-8.** $F_{Rx} = 300 + 400\cos 30^\circ - 250\left(\tfrac{4}{5}\right) = 446.4\text{ N}$

$F_{Ry} = 400\text{ sen }30^\circ + 250\left(\tfrac{3}{5}\right) = 350\text{ N}$

$F_R = \sqrt{(446.4)^2 + 350^2} = 567\text{ N}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\tfrac{350}{446.4} = 38.1^\circ$ ***Resp.***

**F2-9.**

$\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = -(700\text{ lb})\cos 30^\circ + 0 + \left(\tfrac{3}{5}\right)(600\text{ lb})$

$= -246.22\text{ lb}$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = -(700\text{ lb})\text{ sen }30^\circ - 400\text{ lb} - \left(\tfrac{4}{5}\right)(600\text{ lb})$

$= -1230\text{ lb}$

$F_R = \sqrt{(246.22\text{ lb})^2 + (1230\text{ lb})^2} = 1254\text{ lb}$ ***Resp.***

$\phi = \tan^{-1}\left(\tfrac{1230\text{ lb}}{246.22\text{ lb}}\right) = 78.68^\circ$

$\theta = 180^\circ + \phi = 180^\circ + 78.68^\circ = 259^\circ$ ***Resp.***

**F2-10.** $\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$

$750\text{ N} = F\cos\theta + \left(\tfrac{5}{13}\right)(325\text{ N}) + (600\text{ N})\cos 45^\circ$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$0 = F\text{ sen }\theta + \left(\tfrac{12}{13}\right)(325\text{ N}) - (600\text{ N})\text{sen }45^\circ$

$\tan\theta = 0.6190 \quad \theta = 31.76^\circ = 31.8^\circ$ ***Resp.***

$F = 236\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-11.** $\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(800\text{ lb})\cos 45^\circ = F\cos\theta + 50\text{ lb} - \left(\tfrac{3}{5}\right)90\text{ lb}$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$-(80\text{ lb})\text{ sen }45^\circ = F\text{ sen }\theta - \left(\tfrac{4}{5}\right)(90\text{ lb})$

$\tan\theta = 0.2547 \quad \theta = 14.29^\circ = 14.3^\circ$ ***Resp.***

$F = 62.5\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-12.** $(F_R)_x = 15\left(\tfrac{4}{5}\right) + 0 + 15\left(\tfrac{4}{5}\right) = 24\text{ kN} \rightarrow$

$(F_R)_y = 15\left(\tfrac{3}{5}\right) + 20 - 15\left(\tfrac{3}{5}\right) = 20\text{ kN} \uparrow$

$F_R = 31.2\text{ kN}$ ***Resp.***

$\theta = 39.8^\circ$ ***Resp.***

**F2-13.** $F_x = 75\cos 30^\circ\text{ sen }45^\circ = 45.93\text{ lb}$

$F_y = 75\cos 30^\circ\cos 45^\circ = 45.93\text{ lb}$

$F_z = -75\text{ sen }30^\circ = -37.5\text{ lb}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\tfrac{45.93}{75}\right) = 52.2^\circ$ ***Resp.***

$\beta = \cos^{-1}\left(\tfrac{45.93}{75}\right) = 52.2^\circ$ ***Resp.***

$\gamma = \cos^{-1}\left(\tfrac{-37.5}{75}\right) = 120^\circ$ ***Resp.***

**F2-14.** $\cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2 120° - \cos^2 60°} = \pm 0.7071$

Se requiere $\beta = 135°$.

$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_F = (500\text{ N})(-0.5\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k})$

$= \{-250\mathbf{i} - 354\mathbf{j} + 250\mathbf{k}\}\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-15.** $\cos^2\alpha + \cos^2 135° + \cos^2 120° = 1$

$\alpha = 60°$

$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_F = (500\text{ N})(0.5\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k})$

$= \{250\mathbf{i} - 354\mathbf{j} - 250\mathbf{k}\}\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-16.** $F_z = (50\text{ lb})\text{ sen }45° = 35.36\text{ lb}$

$F' = (50\text{ lb})\cos 45° = 35.36\text{ lb}$

$F_x = \left(\frac{3}{5}\right)(35.36\text{ lb}) = 21.21\text{ lb}$

$F_y = \left(\frac{4}{5}\right)(35.36\text{ lb}) = 28.28\text{ lb}$

$\mathbf{F} = \{-21.2\mathbf{i} + 28.3\mathbf{j} + 35.4\mathbf{k}\}\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-17.** $F_z = (750\text{ N})\text{ sen }45° = 530.33\text{ N}$

$F' = (750\text{ N})\cos 45° = 530.33\text{ N}$

$F_x = (530.33\text{ N})\cos 60° = 265.1\text{ N}$

$F_y = (530.33\text{ N})\text{ sen }60° = 459.3\text{ N}$

$\mathbf{F}_2 = \{265\mathbf{i} - 459\mathbf{j} + 530\mathbf{k}\}\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-18.** $\mathbf{F}_1 = \left(\frac{4}{5}\right)(500\text{ lb})\,\mathbf{j} + \left(\frac{3}{5}\right)(500\text{ lb})\mathbf{k}$

$= \{400\mathbf{j} + 300\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\mathbf{F}_2 = [(800\text{ lb})\cos 45°]\cos 30°\,\mathbf{i}$

$+ [(800\text{ lb})\cos 45°]\text{ sen }30°\,\mathbf{j}$

$+ (800\text{ lb})\text{ sen }45°\,(-\mathbf{k})$

$= \{489.90\mathbf{i} + 282.84\mathbf{j} - 565.69\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \{490\mathbf{i} + 683\mathbf{j} - 266\mathbf{k}\}\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-19.** $\mathbf{r}_{AB} = \{-6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\text{ m}$ ***Resp.***

$r_{AB} = \sqrt{(-6\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2 + (3\text{ m})^2} = 9\text{ m}$ ***Resp.***

$\alpha = 132°,\quad \beta = 48.2°,\quad \gamma = 70.5°$ ***Resp.***

**F2-20.** $\mathbf{r}_{AB} = \{-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\}\text{ pies}$ ***Resp.***

$r_{AB} = \sqrt{(-4\text{ pies})^2 + (2\text{ pies})^2 + (4\text{ pies})^2} = 6\text{ pies}$ ***Resp.***

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-4\text{ pies}}{6\text{ pies}}\right) = 131.8°$

$\theta = 180° - 131.8° = 48.2°$ ***Resp.***

**F2-21.** $\mathbf{r}_B = \{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\}\text{ m}$

$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{u}_B$

$= (630\text{ N})\left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$

$= \{180\mathbf{i} + 270\mathbf{j} - 540\mathbf{k}\}\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-22.** $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 900\text{N}\left(-\frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}\right)$

$= \{-400\mathbf{i} + 700\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}\text{ N}$

**F2-23.** $\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{u}_B$

$= (840\text{ N})\left(\frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$

$= \{360\mathbf{i} - 240\mathbf{j} - 720\mathbf{k}\}\text{ N}$

$\mathbf{F}_C = F_C\mathbf{u}_C$

$= (420\text{ N})\left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$

$= \{120\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 360\mathbf{k}\}\text{ N}$

$F_R = \sqrt{(480\text{ N})^2 + (-60\text{ N})^2 + (-1080\text{ N})^2}$

$= 1.18\text{ kN}$ ***Resp.***

**F2-24.** $\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{u}_B$

$= (600\text{ lb})\left(-\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

$= \{-200\mathbf{i} + 400\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\mathbf{F}_C = F_C\mathbf{u}_C$

$= (490\text{ lb})\left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}\right)$

$= \{-420\mathbf{i} + 210\mathbf{j} - 140\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \{-620\mathbf{i} + 610\mathbf{j} - 540\mathbf{k}\}\text{ lb}$ ***Resp.***

**F2-25.** $\mathbf{u}_{AO} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$

$\mathbf{u}_F = -0.5345\mathbf{i} + 0.8018\mathbf{j} + 0.2673\mathbf{k}$

$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u}_{AO}\cdot\mathbf{u}_F) = 57.7°$ ***Resp.***

**F2-26.** $\mathbf{u}_{AB} = -\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

$\mathbf{u}_F = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u}_{AB}\cdot\mathbf{u}_F) = 68.9°$ ***Resp.***

**F2-27.** $\mathbf{u}_{OA} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$

$\mathbf{u}_{OA}\cdot\mathbf{j} = u_{OA}(1)\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{5}{13};\quad \theta = 67.4°$ ***Resp.***

**F2-28.** $\mathbf{u}_{OA} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}$

$\mathbf{F} = F\mathbf{u}_F = [650\mathbf{j}]\text{ N}$

$F_{OA} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{OA} = 250\text{ N}$

$\mathbf{F}_{OA} = F_{OA}\,\mathbf{u}_{OA} = \{231\mathbf{i} + 96.2\mathbf{j}\}\text{ N}$

**F2-29.** $\mathbf{F} = (400\text{ N})\dfrac{\{4\,\mathbf{i}+1\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k}\}\text{m}}{\sqrt{(4\text{ m})^2+(1\text{ m})^2+(-6\text{ m})^2}}$

$= \{219.78\mathbf{i} + 54.94\mathbf{j} - 329.67\mathbf{k}\}\text{ N}$

$\mathbf{u}_{AO} = \dfrac{\{-4\,\mathbf{j}-6\,\mathbf{k}\}\text{m}}{\sqrt{(-4\text{ m})^2+(-6\text{ m})^2}}$

$= -0.5547\mathbf{j} - 0.8321\mathbf{k}$

$(F_{AO})_{\text{proy}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_{AO} = 244\text{ N}$ ***Resp.***

**F2-30.** $\mathbf{F} = [(-600\text{ lb})\cos 60°]\text{ sen }30°\mathbf{i}$

$+ [(600\text{ lb})\cos 60°]\cos 30°\,\mathbf{j}$

$+ [(600\text{ lb})\text{ sen }60°]\,\mathbf{k}$

$= \{-150\mathbf{i} + 259.81\mathbf{j} + 519.62\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\mathbf{u}_A = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$

$(\mathbf{F}_A)_{\text{proy}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_A = 446.41\text{ lb} = 446\text{ lb}$ ***Resp.***

$(\mathbf{F}_A)_{\text{per}} = \sqrt{(600\text{ lb})^2 - (446.41\text{ lb})^2}$

$= 401\text{ lb}$ ***Resp.***

## Capítulo 3

**F3-1.** $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\ \frac{4}{5}F_{AC} - F_{AB}\cos 30° = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ \frac{3}{5}F_{AC} + F_{AB}\text{ sen }30° - 550 = 0$

$F_{AB} = 478\text{ lb}$ ***Resp.***

$F_{AC} = 518\text{ lb}$ ***Resp.***

**F3-2.** $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\ -2(1500)\text{ sen }\theta + 700 = 0$

$\theta = 13.5°$

$L_{ABC} = 2\left(\frac{5\text{ pies}}{\cos 13.5°}\right) = 10.3\text{ pies}$ ***Resp.***

**F3-3.** $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad T\cos\theta - T\cos\phi = 0$

$\phi = \theta$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad 2T\text{ sen }\theta - 49.05\text{ N} = 0$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.15\text{ m}}{0.2\text{ m}}\right) = 36.87°$

$T = 40.9\text{ N}$ ***Resp.***

**F3-4.** $+\nearrow\Sigma F_x = 0;\ \frac{4}{5}(F_{sp}) - 5(9.81)\text{ sen }45° = 0$

$F_{sp} = 43.35\text{ N}$

$F_{sp} = k(l - l_0);\ 43.35 = 200(0.5 - l_0)$

$l_0 = 0.283\text{ m}$ ***Resp.***

**F3-5.** $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad (392.4\text{ N})\text{sen }30° - m_A(9.81) = 0$

$m_A = 20\text{ kg}$ ***Resp.***

**F3-6.** $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad T_{AB}\text{ sen }15° - 10(9.81)\text{ N} = 0$

$T_{AB} = 379.03\text{ N} = 379\text{ N}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad T_{BC} - 379.03\text{ N}\cos 15° = 0$

$T_{BC} = 366.11\text{ N} = 366\text{ N}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad T_{CD}\cos\theta - 366.11\text{ N} = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad T_{CD}\text{ sen }\theta - 15(9.81)\text{ N} = 0$

$T_{CD} = 395\text{ N}$ ***Resp.***

$\theta = 21.9°$ ***Resp.***

**F3-7.** $\Sigma F_x = 0;\ \left[\left(\frac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\frac{3}{5}\right) + 600\text{ N} - F_2 = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0;\ \left(\frac{4}{5}\right)F_1 - \left[\left(\frac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\frac{4}{5}\right) = 0$ (2)

$\Sigma F_z = 0;\ \left(\frac{4}{5}\right)F_3 + \left(\frac{3}{5}\right)F_1 - 900\text{ N} = 0$ (3)

$F_3 = 776\text{ N}$ ***Resp.***

$F_1 = 466\text{ N}$ ***Resp.***

$F_2 = 879\text{ N}$ ***Resp.***

**F3-8.** $\Sigma F_z = 0;\ F_{AD}\left(\frac{4}{5}\right) - 900 = 0$

$F_{AD} = 1125\text{ N} = 1.125\text{ kN}$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0;\ F_{AC}\left(\frac{4}{5}\right) - 1125\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$F_{AC} = 843.75\text{ N} = 844\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0;\ F_{AB} - 843.75\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$F_{AB} = 506.25\text{ N} = 506\text{ N}$ ***Resp.***

**F3-9.** $\mathbf{F}_{AD} = F_{AD}\left(\frac{\mathbf{r}_{AD}}{r_{AD}}\right) = \frac{1}{3}F_{AD}\mathbf{i} - \frac{2}{3}F_{AD}\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}F_{AD}\,\mathbf{k}$

$\Sigma F_z = 0;\quad \frac{2}{3}F_{AD} - 600 = 0$

$F_{AD} = 900\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0;\quad F_{AB}\cos 30° - \frac{2}{3}(900) = 0$

$F_{AB} = 692.82\text{ N} = 693\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0;\quad \frac{1}{3}(900) + 692.82\text{ sen }30° - F_{AC} = 0$

$F_{AC} = 646.41\text{ N} = 646\text{ N}$ ***Resp.***

**F3-10.** $\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\{-\cos 60°\text{ sen }30°\,\mathbf{i}$

$+ \cos 60°\cos 30°\,\mathbf{j} + \text{sen }60°\,\mathbf{k}\}$

$= -0.25F_{AC}\,\mathbf{i} + 0.4330F_{AC}\,\mathbf{j} + 0.8660F_{AC}\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}_{AD} = F_{AD}\{\cos 120°\,\mathbf{i} + \cos 120°\,\mathbf{j} + \cos 45°\mathbf{k}\}$

$= -0.5F_{AD}\,\mathbf{i} - 0.5F_{AD}\,\mathbf{j} + 0.7071F_{AD}\,\mathbf{k}$

$\Sigma F_y = 0;\quad 0.4330F_{AC} - 0.5F_{AD} = 0$

$\Sigma F_z = 0;\quad 0.8660F_{AC} + 0.7071F_{AD} - 300 = 0$

$F_{AD} = 175.74\text{ lb} = 176\text{ lb}$ ***Resp.***

$F_{AC} = 202.92\text{ lb} = 203\text{ lb}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} - 0.25(202.92) - 0.5(175.74) = 0$

$F_{AB} = 138.60\text{ lb} = 139\text{ lb}$ ***Resp.***

**F3-11.** $\mathbf{F}_B = F_B\left(\frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}}\right)$

$= F_B\left[\frac{\{-6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}\text{ pies}}{\sqrt{(-6\text{ pies})^2 + (3\text{ pies})^2 + (2\text{ pies})^2}}\right]$

$= -\frac{6}{7}F_B\mathbf{i} + \frac{3}{7}F_B\mathbf{j} + \frac{2}{7}F_B\mathbf{k}$

$\mathbf{F}_C = F_C\left(\frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}}\right)$

$= F_C\left[\frac{\{-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\text{ pies}}{\sqrt{(-6\text{ pies})^2 + (-2\text{ pies})^2 + (3\text{ pies})^2}}\right]$

$= -\frac{6}{7}F_C\mathbf{i} - \frac{2}{7}F_C\mathbf{j} + \frac{3}{7}F_C\mathbf{k}$

$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$

$\mathbf{W} = \{-150\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$\Sigma F_x = 0;\ -\frac{6}{7}F_B - \frac{6}{7}F_C + F_D = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0;\ \frac{3}{7}F_B - \frac{2}{7}F_C = 0$ (2)

$\Sigma F_z = 0;\ \frac{2}{7}F_B + \frac{3}{7}F_C - 150 = 0$ (3)

$F_B = 162\text{ lb}$ ***Resp.***

$F_C = 1.5(162\text{ lb}) = 242\text{ lb}$ ***Resp.***

$F_D = 346.15\text{ lb} = 346\text{ lb}$ ***Resp.***

## Capítulo 4

**F4-1.** $\circlearrowleft +M_O = 600\text{ sen }50°\ (5) + 600\cos 50°\ (0.5)$

$= 2.49\text{ kip}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-2.** $\circlearrowleft +M_O = -\left(\frac{4}{5}\right)(100\text{ N})(2\text{ m}) - \left(\frac{3}{5}\right)(100\text{ N})(5\text{ m})$

$= -460\text{ N}\cdot\text{m} = 460\text{ N}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$ ***Resp.***

**F4-3.** $\circlearrowleft +M_O = [(300\text{ N})\text{ sen }30°][0.4\text{ m} + (0.3\text{ m})\cos 45°]$

$- [(300\text{ N})\cos 30°][(0.3\text{ m})\text{ sen }45°]$

$= 36.7\text{ N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-4.** $\circlearrowleft +M_O = (600\text{ lb})(4\text{ pies} + (3\text{ pies})\cos 45° - 1\text{ pie})$

$= 3.07\text{ kip}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-5.** $\circlearrowright +M_O = 50\text{ sen }60°\ (0.1 + 0.2\cos 45° + 0.1)$

$- 50\cos 60°(0.2\text{ sen }45°)$

$= 11.2\text{ N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-6.** $\circlearrowleft +M_O = 500\text{ sen }45°\ (3 + 3\cos 45°)$

$- 500\cos 45°\ (3\text{ sen }45°)$

$= 1.06\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-7.** $\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma Fd;$

$(M_R)_O = -(600\text{ N})(1\text{ m})$

$+ (500\text{ N})[3\text{ m} + (2.5\text{ m})\cos 45°]$

$- (300\text{N})[(2.5\text{ m})\text{ sen }45°]$

$= 1254\text{ N}\cdot\text{m} = 1.25\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-8.** $\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma Fd;$

$(M_R)_O = \left[\left(\frac{3}{5}\right)500\text{ N}\right](0.425\text{ m})$

$- \left[\left(\frac{4}{5}\right)500\text{ N}\right](0.25\text{ m})$

$- [(600\text{ N})\cos 60°](0.25\text{ m})$

$- [(600\text{ N})\text{ sen }60°](0.425\text{ m})$

$= -268\text{ N}\cdot\text{m} = 268\text{ N}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$

**F4-9.** $\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma Fd;$

$(M_R)_O = (300\cos 30°\text{ lb})(6\text{ pies} + 6\text{ sen }30°\text{ pie})$

$- (300\text{ sen }30°\text{ lb})(6\cos 30°\text{ pie})$

$+ (200\text{ lb})(6\cos 30°\text{ pie})$

$= 2.60\text{ kip}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-10.** $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{AB} = 500\text{ N}\left(\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}\right) = \{400\mathbf{i} - 300\mathbf{j}\}\text{ N}$

$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = \{3\mathbf{j}\}\text{ m} \times \{400\mathbf{i} - 300\mathbf{j}\}\text{ N}$

$= \{-1200\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

o

$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F} = \{4\mathbf{i}\}\text{ m} \times \{400\mathbf{i} - 300\mathbf{j}\}\text{ N}$

$= \{-1200\mathbf{k}\}\text{ N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-11.** $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_{BC}$

$= 120\text{ lb}\left[\frac{\{4\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}\}\text{ pies}}{\sqrt{(4\text{ pies})^2 + (-4\text{ pies})^2 + (-2\text{ pies})^2}}\right]$

$= \{80\mathbf{i} - 80\mathbf{j} - 40\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 80 & -80 & -40 \end{vmatrix}$$

$= \{200\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}\text{ lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

o

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 80 & -80 & -40 \end{vmatrix}$$

$= \{200\mathbf{j} - 400\mathbf{k}\}\text{ lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-12.** $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

$= \{(100 - 200)\mathbf{i} + (-120 + 250)\mathbf{j}$

$+ (75 + 100)\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$= \{-100\mathbf{i} + 130\mathbf{j} + 175\mathbf{k}\}\text{ lb}$

$$(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_R = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ -100 & 130 & 175 \end{vmatrix}$$

$= \{485\mathbf{i} - 1000\mathbf{j} + 1020\mathbf{k}\}\text{ lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-13.** $M_x = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & -0.2 \\ 300 & -200 & 150 \end{vmatrix}$

$= 20\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-14.** $\mathbf{u}_{OA} = \dfrac{\mathbf{r}_A}{r_A} = \dfrac{\{0.3\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}\}\ \text{m}}{\sqrt{(0.3\ \text{m})^2 + (0.4\ \text{m})^2}}$

$M_{OA} = \mathbf{u}_{OA}\cdot(\mathbf{r}_{AB}\times\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 \\ 300 & -200 & 150 \end{vmatrix}$

$= -72\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-15.** $\mathbf{F} = (200\ \text{N})\cos 120°\ \mathbf{i}$

$+ (200\ \text{N})\cos 60°\ \mathbf{j} + (200\ \text{N})\cos 45°\ \mathbf{k}$

$= \{-100\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 141.42\mathbf{k}\}\ \text{N}$

$\mathbf{M}_O = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{r}_A\times\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.25 \\ -100 & 100 & 141.42 \end{vmatrix}$

$= 17.4\ \text{N}\cdot\text{m}$

**F4-16.** $\mathbf{M}_p = \mathbf{j}\cdot(\mathbf{r}_A\times\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \\ 30 & -20 & 50 \end{vmatrix}$

$= 210\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-17.** $\mathbf{u}_{AB} = \dfrac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \dfrac{\{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\}\ \text{pies}}{\sqrt{(-4\ \text{pies})^2 + (3\ \text{pies})^2}} = -0.8\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}$

$M_{AB} = \mathbf{u}_{AB}\cdot(\mathbf{r}_{AC}\times\mathbf{F})$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 50 & -40 & 20 \end{vmatrix} = -4\ \text{lb}\cdot\text{pie}$

$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\mathbf{u}_{AB} = \{3.2\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-18.** $F_x = \left[\left(\tfrac{4}{5}\right)500\ \text{N}\right]\left(\tfrac{3}{5}\right) = 240\ \text{N}$

$F_y = \left[\left(\tfrac{4}{5}\right)500\ \text{N}\right]\left(\tfrac{4}{5}\right) = 320\ \text{N}$

$F_z = (500\ \text{N})\left(\tfrac{3}{5}\right) = 300\ \text{N}$

$M_x = 300\ \text{N}(2\ \text{m}) - 320\ \text{N}(3\ \text{m})$

$= -360\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

$M_y = 300\ \text{N}(2\ \text{m}) - 240\ \text{N}(3\ \text{m})$

$= -120\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

$M_z = 240\ \text{N}(2\ \text{m}) - 320\ \text{N}(2\ \text{m})$

$= -160\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-19.** $\curvearrowleft + M_{C_R} = \Sigma M_A = 400(3) - 400(5) + 300(5)$

$+ 200(0.2) = 740\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

o bien,

$\curvearrowleft + M_{C_R} = 300(5) - 400(2) + 200(0.2)$

$= 740\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-20.** $\curvearrowright + M_{C_R} = 300(4) + 200(4) + 150(4)$

$= 2600\ \text{lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-21.** $\curvearrowright + (M_B)_R = \Sigma M_B$

$-1.5\ \text{kN}\cdot\text{m} = (2\ \text{kN})(0.3\ \text{m}) - F(0.9\ \text{m})$

$F = 2.33\ \text{kN}$ ***Resp.***

**F4-22.** $\curvearrowright + M_C = 10\left(\tfrac{3}{5}\right)(2) - 10\left(\tfrac{4}{5}\right)(4) = -20\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$= 20\ \text{kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft$

**F4-23.** $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{r}_1}{r_1} = \dfrac{[-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3.5\mathbf{k}]\ \text{pies}}{\sqrt{(-2\ \text{pies})^2 + (2\ \text{pies})^2 + (3.5\ \text{pies})^2}}$

$= -\tfrac{2}{4.5}\mathbf{i} + \tfrac{2}{4.5}\mathbf{j} + \tfrac{3.5}{4.5}\mathbf{k}$

$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{k}$

$\mathbf{u}_3 = \tfrac{1.5}{2.5}\mathbf{i} - \tfrac{2}{2.5}\mathbf{j}$

$(\mathbf{M}_c)_1 = (M_c)_1\mathbf{u}_1$

$= (450\ \text{lb}\cdot\text{pies})\left(-\tfrac{2}{4.5}\mathbf{i} + \tfrac{2}{45}\mathbf{j} + \tfrac{3.5}{4.5}\mathbf{k}\right)$

$= \{-200\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 350\mathbf{k}\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$

$(\mathbf{M}_c)_2 = (M_c)_2\mathbf{u}_2 = (250\ \text{lb}\cdot\text{pie})(-\mathbf{k})$

$= \{-250\mathbf{k}\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$

$(\mathbf{M}_c)_3 = (M_c)_3\mathbf{u}_3 = (300\ \text{lb}\cdot\text{pie})\left(\tfrac{1.5}{2.5}\mathbf{i} - \tfrac{2}{2.5}\mathbf{j}\right)$

$= \{180\mathbf{i} - 240\mathbf{j}\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$

$(\mathbf{M}_c)_R = \Sigma M_c;$

$(\mathbf{M}_c)_R = \{-20\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 100\mathbf{k}\}\ \text{lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

**F4-24.** $\mathbf{F}_B = \left(\tfrac{4}{5}\right)(450\ \text{N})\mathbf{j} - \left(\tfrac{3}{5}\right)(450\ \text{N})\ \mathbf{k}$

$= \{360\mathbf{j} - 270\mathbf{k}\}\ \text{N}$

$\mathbf{M}_c = \mathbf{r}_{AB}\times\mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix}$

$= \{108\mathbf{j} + 144\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

o bien,

$\mathbf{M}_c = (\mathbf{r}_A\times\mathbf{F}_A) + (\mathbf{r}_B\times\mathbf{F}_B)$

$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & -360 & 270 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 360 & -270 \end{vmatrix}$

$= \{108\mathbf{j} + 144\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F4-25.** $\overset{+}{\leftarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x;\ F_{Rx} = 200 - \frac{3}{5}(100) = 140 \text{ lb}$

$+\downarrow F_{Ry} = \Sigma F_y;\ F_{Ry} = 150 - \frac{4}{5}(100) = 70 \text{ lb}$

$F_R = \sqrt{140^2 + 70^2} = 157 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{70}{140}\right) = 26.6°$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + M_{A_R} = \Sigma M_A;$

$M_{A_R} = \frac{3}{5}(100)(4) - \frac{4}{5}(100)(6) + 150(3)$

$M_{R_A} = 210 \text{ lb} \cdot \text{pie}$ ***Resp.***

**F4-26.** $\overset{+}{\rightarrow} F_{Rx} = \Sigma F_x;\ \ F_{Rx} = \frac{4}{5}(50) = 40 \text{ N}$

$+\downarrow F_{Ry} = \Sigma F_y;\ F_{Ry} = 40 + 30 + \frac{3}{5}(50)$

$= 100 \text{ N}$

$F_R = \sqrt{(40)^2 + (100)^2} = 108 \text{ N}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{100}{40}\right) = 68.2°$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + M_{A_R} = \Sigma M_A;$

$M_{A_R} = 30(3) + \frac{3}{5}(50)(6) + 200$

$= 470 \text{ N} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

**F4-27.** $\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = 900 \text{ sen } 30° = 450 \text{ N} \rightarrow$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = -900 \cos 30° - 300$

$= -1079.42 \text{ N} = 1079.42 \text{ N} \downarrow$

$F_R = \sqrt{450^2 + 1079.42^2}$

$= 1169.47 \text{ N} = 1.17 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1079.42}{450}\right) = 67.4°$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$(M_R)_A = 300 - 900 \cos 30° (0.75) - 300(2.25)$

$= -959.57 \text{ N} \cdot \text{m}$

$= 960 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$ ***Resp.***

**F4-28.** $\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = 150\left(\frac{3}{5}\right) + 50 - 100\left(\frac{4}{5}\right) = 60 \text{ lb} \rightarrow$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = -150\left(\frac{4}{5}\right) - 100\left(\frac{3}{5}\right)$

$= -180 \text{ lb} = 180 \text{ lb} \downarrow$

$F_R = \sqrt{60^2 + 180^2} = 189.74 \text{ lb} = 190 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{180}{60}\right) = 71.6°$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$(M_R)_A = 100\left(\frac{4}{5}\right)(1) - 100\left(\frac{3}{5}\right)(6) - 150\left(\frac{4}{5}\right)(3)$

$= -640 = 640 \text{ lb·pie} \circlearrowright$ ***Resp.***

**F4-29.** $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F};$

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

$= (-300\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 200\mathbf{k}) + (-450\mathbf{k})$

$= \{-300\mathbf{i} + 150\mathbf{j} - 250\mathbf{k}\} \text{ N}$ ***Resp.***

$\mathbf{r}_{OA} = (2 - 0)\mathbf{j} = \{2\mathbf{j}\} \text{ m}$

$\mathbf{r}_{OB} = (-1.5 - 0)\mathbf{i} + (2 - 0)\mathbf{j} + (1 - 0)\mathbf{k}$

$= \{-1.5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\} \text{ m}$

$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma \mathbf{M};$

$(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_2$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.5 & 2 & 1 \\ -300 & 150 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -450 \end{vmatrix}$$

$= \{-650\mathbf{i} + 375\mathbf{k}\} \text{N·m}$ ***Resp.***

**F4-30.** $\mathbf{F}_1 = \{-100\mathbf{j}\} \text{ N}$

$$\mathbf{F}_2 = (200 \text{ N})\left[\frac{\{-0.4\mathbf{i} - 0.3\mathbf{k}\} \text{ m}}{\sqrt{(-0.4 \text{ m})^2 + (-0.3 \text{ m})^2}}\right]$$

$= \{-160\mathbf{i} - 120\mathbf{k}\} \text{ N}$

$\mathbf{M}_c = \{-75\mathbf{i}\} \text{ N·m}$

$\mathbf{F}_R = \{-160\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 120\mathbf{k}\} \text{ N}$ ***Resp.***

$(\mathbf{M}_R)_O = (0.3\mathbf{k}) \times (-100\mathbf{j})$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.5 & 0.3 \\ -160 & 0 & -120 \end{vmatrix} + (-75\mathbf{i})$$

$= \{-105\mathbf{i} - 48\,\mathbf{j} + 80\mathbf{k}\} \text{ N·m}$ ***Resp.***

**F4-31.** $+\downarrow F_R = \Sigma F_y;\quad F_R = 500 + 250 + 500$

$= 1250 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + F_R x = \Sigma M_O;$

$1250(x) = 500(3) + 250(6) + 500(9)$

$x = 6 \text{ pies}$ ***Resp.***

**F4-32.** $\overset{+}{\rightarrow} (F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = 100\left(\frac{3}{5}\right) + 50 \text{ sen } 30° = 85 \text{ lb} \rightarrow$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = 200 + 50 \cos 30° - 100\left(\frac{4}{5}\right)$

$= 163.30 \text{ lb} \uparrow$

$F_R = \sqrt{85^2 + 163.30^2} = 184 \text{ lb}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{163.30}{85}\right) = 62.5°$ ***Resp.***

$\circlearrowleft + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$163.30(d) = 200(3) - 100\left(\frac{4}{5}\right)(6) + 50 \cos 30°(9)$

$d = 3.12 \text{ pies}$ ***Resp.***

**F4-33.** $\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = 15\left(\frac{4}{5}\right) = 12 \text{ kN} \rightarrow$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = -20 + 15\left(\frac{3}{5}\right) = -11 \text{ kN} = 11 \text{ kN} \downarrow$

$F_R = \sqrt{12^2 + 11^2} = 16.3 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{11}{12}\right) = 42.5°$ ***Resp.***

$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$-11(d) = -20(2) - 15\left(\frac{4}{5}\right)(2) + 15\left(\frac{3}{5}\right)(6)$

$d = 0.909 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-34.** $\overset{+}{\rightarrow}(F_R)_x = \Sigma F_x;$

$(F_R)_x = \left(\frac{3}{5}\right) 5 \text{ kN} - 8 \text{ kN}$

$= -5 \text{ kN} = 5 \text{ kN} \leftarrow$

$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$

$(F_R)_y = -6 \text{ kN} - \left(\frac{4}{5}\right) 5 \text{ kN}$

$= -10 \text{ kN} = 10 \text{ kN} \downarrow$

$F_R = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.2 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10 \text{ kN}}{5 \text{ kN}}\right) = 63.4°$ ***Resp.***

$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$5 \text{ kN}(d) = 8 \text{ kN}(3 \text{ m}) - 6 \text{ kN}(0.5 \text{ m})$

$- \left[\left(\frac{4}{5}\right)5 \text{ kN}\right](2 \text{ m})$

$- \left[\left(\frac{3}{5}\right)5\text{kN}\right](4 \text{ m})$

$d = 0.2 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-35.** $+\downarrow F_R = \Sigma F_z;\quad F_R = 400 + 500 - 100$

$= 800 \text{ N}$ ***Resp.***

$M_{Rx} = \Sigma M_x;\ -800y = -400(4) - 500(4)$

$y = 4.50 \text{ m}$ ***Resp.***

$M_{Ry} = \Sigma M_y;\quad 800x = 500(4) - 100(3)$

$x = 2.125 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-36.** $+\downarrow F_R = \Sigma F_z;$

$F_R = 200 + 200 + 100 + 100$

$= 600 \text{ N}$ ***Resp.***

$M_{Rx} = \Sigma M_x;$

$-600y = 200(1) + 200(1) + 100(3) - 100(3)$

$y = -0.667 \text{ m}$ ***Resp.***

$M_{Ry} = \Sigma M_y;$

$600x = 100(3) + 100(3) + 200(2) - 200(3)$

$x = 0.667 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-37.** $+\uparrow F_R = \Sigma F_y;$

$-F_R = -6(1.5) - 9(3) - 3(1.5)$

$F_R = 40.5 \text{ kN} \downarrow$ ***Resp.***

$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$-40.5(d) = 6(1.5)(0.75)$

$- 9(3)(1.5) - 3(1.5)(3.75)$

$d = 1.25 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-38.** $F_R = \frac{1}{2}(6)(150) + 8(150) = 1650 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\curvearrowleft + M_{A_R} = \Sigma M_A;$

$1650d = \left[\frac{1}{2}(6)(150)\right](4) + [8(150)](10)$

$d = 8.36 \text{ pies}$ ***Resp.***

**F4-39.** $+\uparrow F_R = \Sigma F_y;$

$-F_R = -\frac{1}{2}(6)(3) - \frac{1}{2}(6)(6)$

$F_R = 27 \text{ kN} \downarrow$ ***Resp.***

$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$-27(d) = \frac{1}{2}(6)(3)(1) - \frac{1}{2}(6)(6)(2)$

$d = 1 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-40.** $+\downarrow F_R = \Sigma F_y;$

$F_R = \frac{1}{2}(50)(6) + 150(6) + 500$

$= 1550 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\curvearrowleft + M_{A_R} = \Sigma M_A;$

$1550d = \left[\frac{1}{2}(50)(6)\right](4) + [150(6)](3) + 500(9)$

$d = 5.03 \text{ pies}$ ***Resp.***

**F4-41.** $+\uparrow F_R = \Sigma F_y;$

$-F_R = -\frac{1}{2}(3)(4.5) - 3(6)$

$F_R = 24.75 \text{ kN} \downarrow$ ***Resp.***

$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$

$-24.75(d) = -\frac{1}{2}(3)(4.5)(1.5) - 3(6)(3)$

$d = 2.59 \text{ m}$ ***Resp.***

**F4-42.** $F_R = \int w(x)\,dx = \int_0^4 2.5x^3\,dx = 160 \text{ N}$

$\curvearrowleft + M_{A_R} = \Sigma M_A;$

$$x = \frac{\int xw(x)\,dx}{\int w(x)\,dx} = \frac{\int_0^4 2.5x^4\,dx}{160} = 3.20 \text{ m}$$

## Capítulo 5

**F5-1.** $\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad -A_x + 500\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$A_x = 300 \text{ lb}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \quad B_y(10) - 500\left(\frac{4}{5}\right)(5) - 600 = 0$

$B_y = 260 \text{ lb}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y + 260 - 500\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$A_y = 140 \text{ lb}$ ***Resp.***

**F5-2.** $\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$F_{CD} \text{ sen } 45°(1.5 \text{ m}) - 4 \text{ kN}(3 \text{ m}) = 0$

$F_{CD} = 11.31 \text{ kN} = 11.3 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad A_x + (11.31 \text{ kN}) \cos 45° = 0$

$A_x = -8 \text{ kN} = 8 \text{ kN} \leftarrow$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$A_y + (11.31 \text{ kN}) \text{ sen } 45° - 4 \text{ kN} = 0$

$A_y = -4 \text{ kN} = 4 \text{ kN} \downarrow$ ***Resp.***

**F5-3.** $\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$N_B[6 \text{ m} + (6 \text{ m}) \cos 45°]$

$- 10 \text{ kN}[2 \text{ m} + (6 \text{ m}) \cos 45°]$

$- 5 \text{ kN}(4 \text{ m}) = 0$

$N_B = 8.047 \text{ kN} = 8.05 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$

$(5 \text{ kN}) \cos 45° - A_x = 0$

$A_x = 3.54 \text{ kN}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$A_y + 8.047 \text{ kN} - (5 \text{ kN}) \text{ sen } 45° - 10 \text{ kN} = 0$

$A_y = 5.49 \text{ kN}$ ***Resp.***

**F5-4.** $\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad -A_x + 400 \cos 30° = 0$

$A_x = 346 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$A_y - 200 - 200 - 200 - 400 \text{ sen } 30° = 0$

$A_y = 800 \text{ N}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$M_A - 200(2.5) - 200(3.5) - 200(4.5)$

$- 400 \text{ sen } 30°(4.5) - 400 \cos 30°(3 \text{ sen } 60°) = 0$

$M_A = 3.90 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

**F5-5.** $\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$N_C(0.7 \text{ m}) - [25(9.81) \text{ N}] (0.5 \text{ m}) \cos 30° = 0$

$N_C = 151.71 \text{ N} = 152 \text{ N}$ ***Resp.***

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$

$T_{AB} \cos 15° - (151.71 \text{ N}) \cos 60° = 0$

$T_{AB} = 78.53 \text{ N} = 78.5 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$F_A + (78.53 \text{ N}) \text{ sen } 15°$

$+ (151.71 \text{ N}) \text{ sen } 60° - 25(9.81) \text{ N} = 0$

$F_A = 93.5 \text{ N}$ ***Resp.***

**F5-6.** $\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0;$

$N_C \text{ sen } 30° - (250 \text{ N}) \text{ sen } 60° = 0$

$N_C = 433.0 \text{ N} = 433 \text{ N}$ ***Resp.***

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$

$-N_A \text{ sen } 30°(0.15 \text{ m}) - 433.0 \text{ N}(0.2 \text{ m})$

$+ [(250 \text{ N}) \cos 30°](0.6 \text{ m}) = 0$

$N_A = 577.4 \text{ N} = 577 \text{ N}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$N_B - 577.4 \text{ N} + (433.0 \text{ N})\cos 30°$

$- (250 \text{ N}) \cos 60° = 0$

$N_B = 327 \text{ N}$ ***Resp.***

**F5-7.** $\Sigma F_z = 0;$

$T_A + T_B + T_C - 200 - 500 = 0$

$\Sigma M_x = 0;$

$T_A(3) + T_C(3) - 500(1.5) - 200(3) = 0$

$\Sigma M_y = 0;$

$-T_B(4) - T_C(4) + 500(2) + 200(2) = 0$

$T_A = 350 \text{ lb}, T_B = 250 \text{ lb}, \ T_C = 100 \text{ lb}$ ***Resp.***

**F5-8.** $\Sigma M_y = 0;$

$600 \text{ N}(0.2 \text{ m}) + 900 \text{ N}(0.6 \text{ m}) - F_A(1 \text{ m}) = 0$

$F_A = 660 \text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma M_x = 0;$

$D_z(0.8 \text{ m}) - 600 \text{ N}(0.5 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.1 \text{ m}) = 0$

$D_z = 487.5 \text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0; \quad D_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0; \quad D_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0;$

$T_{BC} + 660 \text{ N} + 487.5 \text{ N} - 900 \text{ N} - 600 \text{ N} = 0$

$T_{BC} = 352.5 \text{ N}$ ***Resp.***

**F5-9.** $\Sigma F_y = 0; \quad 400\text{ N} + C_y = 0;$

$C_y = -400\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma M_y = 0; \quad -C_x(0.4\text{ m}) - 600\text{ N}(0.6\text{ m}) = 0$

$C_x = -900\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma M_x = 0; \quad B_z(0.6\text{ m}) + 600\text{ N}(1.2\text{ m})$

$+ (-400\text{ N})(0.4\text{ m}) = 0$

$B_z = -933.3\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma M_z = 0;$

$-B_x(0.6\text{ m}) + -(-900\text{ N})(1.2\text{ m})$

$+ (-400\text{ N})(0.6\text{ m}) = 0$

$B_x = 1400\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0; \quad 1400\text{ N} + (-900\text{ N}) - A_x = 0$

$A_x = 500\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0; \quad A_z - 933.3\text{N} + 600\text{ N} = 0$

$A_z = 333.3\text{ N}$ ***Resp.***

**F5-10.** $\Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma M_z = 0;$

$C_y(0.4\text{ m} + 0.6\text{ m}) = 0 \quad C_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0; \quad A_y + 0 = 0 \quad A_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma M_x = 0; C_z(0.6\text{ m} + 0.6\text{ m}) + B_z(0.6\text{ m})$

$- 450\text{ N}(0.6\text{ m} + 0.6\text{ m}) = 0$

$1.2C_z + 0.6B_z - 540 = 0$

$\Sigma M_y = 0; \quad -C_z(0.6\text{ m} + 0.4\text{ m})$

$- B_z(0.6\text{ m}) + 450\text{ N}(0.6\text{ m}) = 0$

$-C_z - 0.6B_z + 270 = 0$

$C_z = 1350\text{ N} \quad B_z = -1800\text{ N}$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0;$

$A_z + 1350\text{ N} + (-1800\text{ N}) - 450\text{ N} = 0$

$A_z = 900\text{ N}$ ***Resp.***

**F5-11.** $\Sigma F_y = 0; \quad A_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma M_x = 0; \quad -9(3) + F_{CE}(3) = 0$

$F_{CE} = 9\text{ kN}$ ***Resp.***

$\Sigma M_z = 0; \quad F_{CF}(3) - 6(3) = 0$

$F_{CF} = 6\text{ kN}$ ***Resp.***

$\Sigma M_y = 0; \quad 9(4) - A_z(4) - 6(1.5) = 0$

$A_z = 6.75\text{ kN}$ ***Resp.***

$\Sigma F_x = 0; \quad A_x + 6 - 6 = 0 \quad A_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0; \quad F_{DB} + 9 - 9 + 6.75 = 0$

$F_{DB} = -6.75\text{ kN}$ ***Resp.***

**F5-12.** $\Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_y = 0; \quad A_y = 0$ ***Resp.***

$\Sigma F_z = 0; \quad A_z + F_{BC} - 80 = 0$

$\Sigma M_x = 0; (M_A)_x + 6F_{BC} - 80(6) = 0$

$\Sigma M_y = 0; 3F_{BC} - 80(1.5) = 0 \quad F_{BC} = 40\text{ lb}$ ***Resp.***

$\Sigma M_z = 0; (M_A)_z = 0$ ***Resp.***

$A_z = 40\text{ lb} \quad (M_A)_x = 240\text{ lb}\cdot\text{pie}$ ***Resp.***

## Capítulo 6

**F6-1.** *Nodo A.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad 225\text{ lb} - F_{AD}\text{ sen }45° = 0$

$F_{AD} = 318.20\text{ lb} = 318\text{ lb (C)}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad F_{AB} - (318.20\text{ lb})\cos 45° = 0$

$F_{AB} = 225\text{ lb (T)}$ ***Resp.***

*Nodo B.*

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \quad F_{BC} - 225\text{ lb} = 0$

$F_{BC} = 225\text{ lb (T)}$ ***Resp.***

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad F_{BD} = 0$ ***Resp.***

*Nodo D.*

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;$

$F_{CD}\cos 45° + (318.20\text{ lb})\cos 45° - 450\text{ lb} = 0$

$F_{CD} = 318.20\text{ lb} = 318\text{ lb (T)}$ ***Resp.***

**F6-2.** *Nodo D.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \ \frac{3}{5}F_{CD} - 300 = 0;$

$F_{CD} = 500\text{ lb (T)}$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; -F_{AD} + \frac{4}{5}(500) = 0$

$F_{AD} = 400\text{ lb (C)}$ ***Resp.***

$F_{BC} = 500\text{ lb (T)}, \ F_{AC} = F_{AB} = 0$ ***Resp.***

**F6-3.** $A_x = 0, \ A_y = C_y = 400\text{ lb}$

*Nodo A.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \ -\frac{3}{5}F_{AE} + 400 = 0$

$F_{AE} = 667\text{ lb (C)}$ ***Resp.***

*Nodo C.*

$+\uparrow\Sigma F_y = 0; -F_{DC} + 400 = 0;$

$F_{DC} = 400\text{ lb (C)}$ ***Resp.***

**F6-4.** *Nodo C.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2F \cos 30° - P = 0$

$F_{AC} = F_{BC} = F = \frac{P}{2 \cos 30°} = 0.5774P$ (C)

*Nodo B.*

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 0.5774P \cos 60° - F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 0.2887P$ (T)

$F_{AB} = 0.2887P = 2$ kN

$P = 6.928$ kN

$F_{AC} = F_{BC} = 0.5774P = 1.5$ kN

$P = 2.598$ kN

Se elige el *valor más pequeño* de $P$.

$P = 2.598$ kN $= 2.60$ kN ***Resp.***

**F6-5.** $F_{CB} = 0$ ***Resp.***

$F_{CD} = 0$ ***Resp.***

$F_{AE} = 0$ ***Resp.***

$F_{DE} = 0$ ***Resp.***

**F6-6.** *Nodo C.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 259.81 \text{ lb} - F_{CD} \text{ sen } 30° = 0$

$F_{CD} = 519.62$ lb $= 520$ lb (C) ***Resp.***

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad (519.62 \text{ lb}) \cos 30° - F_{BC} = 0$

$F_{BC} = 450$ lb (T) ***Resp.***

*Nodo D.*

$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad F_{BD} \cos 30° = 0 \quad F_{BD} = 0$ ***Resp.***

$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad F_{DE} - 519.62 \text{ lb} = 0$

$F_{DE} = 519.62$ lb $= 520$ lb (C) ***Resp.***

*Nodo B.*

$\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BE} \text{ sen } \phi = 0 \quad F_{BE} = 0$ ***Resp.***

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 450 \text{ lb} - F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 450$ lb (T) ***Resp.***

*Nodo A.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 340.19 \text{ lb} - F_{AE} = 0$

$F_{AE} = 340$ lb (C) ***Resp.***

**F6-7.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \; F_{CF} \text{ sen } 45° - 600 - 800 = 0$

$F_{CF} = 1980$ lb (T) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_C = 0; \; F_{FE}(4) - 800(4) = 0$

$F_{FE} = 800$ lb (T) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_F = 0; \; F_{BC}(4) - 600(4) - 800(8) = 0$

$F_{BC} = 2200$ lb (C) ***Resp.***

**F6-8.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{KC} + 33.33 \text{ kN} - 40 \text{ kN} = 0$

$F_{KC} = 6.67$ kN (C) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_K = 0;$

$33.33 \text{ kN}(8 \text{ m}) - 40 \text{ kN}(2 \text{ m}) - F_{CD}(3 \text{ m}) = 0$

$F_{CD} = 62.22$ kN $= 62.2$ kN (T) ***Resp.***

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad F_{LK} - 62.22 \text{ kN} = 0$

$F_{LK} = 62.2$ kN (C) ***Resp.***

**F6-9.** $\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad G_y(12 \text{ m}) - 20 \text{ kN}(2 \text{ m})$

$- 30 \text{ kN}(4 \text{ m}) - 40 \text{ kN}(6 \text{ m}) = 0$

$G_y = 33.33$ kN

A partir de la geometría de la armadura,

$\phi = \tan^{-1}(3 \text{ m}/2 \text{ m}) = 56.31°.$

$\zeta + \Sigma M_K = 0;$

$33.33 \text{ kN}(8 \text{ m}) - 40 \text{ kN}(2 \text{ m}) - F_{CD}(3 \text{ m}) = 0$

$F_{CD} = 62.2$ kN (T) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_D = 0; \quad 33.33 \text{ kN}(6 \text{ m}) - F_{KJ}(3 \text{ m}) = 0$

$F_{KJ} = 66.7$ kN (C) ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$

$33.33 \text{ kN} - 40 \text{ kN} + F_{KD} \text{ sen } 56.31° = 0$

$F_{KD} = 8.01$ kN (T) ***Resp.***

**F6-10.** A partir de la geometría de la armadura,

$\tan \phi = \frac{(9 \text{ pies}) \tan 30°}{3 \text{ pies}} = 1.732 \qquad \phi = 60°$

$\zeta + \Sigma M_C = 0;$

$F_{EF} \text{ sen } 30°(6 \text{ pies}) + 300 \text{ lb}(6 \text{ pies}) = 0$

$F_{EF} = -600$ lb $= 600$ lb (C) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_D = 0;$

$300 \text{ lb}(6 \text{ pies}) - F_{CF} \text{ sen } 60° (6 \text{ pies}) = 0$

$F_{CF} = 346.41$ lb $= 346$ lb (T) ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_F = 0;$

$300 \text{ lb}(9 \text{ pies}) - 300 \text{ lb}(3 \text{ pies}) - F_{BC}(9 \text{ pies}) \tan 30° = 0$

$F_{BC} = 346.41$ lb $= 346$ lb (T) ***Resp.***

**F6-11.** A partir de la geometría de la armadura,

$\theta = \tan^{-1} (1 \text{ m}/2 \text{ m}) = 26.57°$

$\phi = \tan^{-1} (3 \text{ m}/2 \text{ m}) = 56.31°.$

La ubicación de $G$ se puede encontrar con triángulos semejantes.

$$\frac{1 \text{ m}}{2 \text{ m}} = \frac{2 \text{ m}}{2 \text{ m} + x}$$

$$4 \text{ m} = 2 \text{ m} + x$$

$$x = 2 \text{ m}$$

$\zeta + \Sigma M_G = 0;$
$26.25\text{ kN}(4\text{ m}) - 15\text{ kN}(2\text{ m}) - F_{CD}(3\text{ m}) = 0$
$F_{CD} = 25\text{ kN (T)}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_D = 0;$
$26.25\text{ kN}(2\text{ m}) - F_{GF}\cos 26.57°(2\text{ m}) = 0$
$F_{GF} = 29.3\text{ kN (C)}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_O = 0;\quad 15\text{ kN}(4\text{ m}) - 26.25\text{ kN}(2\text{ m})$
$- F_{GD}\text{ sen }56.31°(4\text{ m}) = 0$
$F_{GD} = 2.253\text{ kN} = 2.25\text{ kN (T)}$ ***Resp.***

**F6-12.** $\zeta + \Sigma M_H = 0;$
$F_{DC}(12\text{ pies}) + 1200\text{ lb}(9\text{ pies}) - 1600\text{ lb}(21\text{ pies}) = 0$
$F_{DC} = 1900\text{ lb (C)}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_D = 0;$
$1200\text{ lb}(21\text{ pies}) - 1600\text{ lb}(9\text{ pies}) - F_{HI}(12\text{ pies}) = 0$
$F_{HI} = 900\text{ lb (C)}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_C = 0;\ F_{JI}\cos 45°(12\text{ pies}) + 1200\text{ lb}(21\text{ pies})$
$- 900\text{ lb}(12\text{ pies}) - 1600\text{ lb}(9\text{ pies}) = 0$
$F_{JI} = 0$ ***Resp.***

**F6-13.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 3P - 60 = 0$
$P = 20\text{ lb}$ ***Resp.***

**F6-14.** $\zeta + \Sigma M_C = 0;$
$-\left(\frac{4}{5}\right)(F_{AB})(9) + 400(6) + 500(3) = 0$
$F_{AB} = 541.67\text{ lb}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\ -C_x + \frac{3}{5}(541.67) = 0$
$C_x = 325\text{ lb}$ ***Resp.***
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ C_y + \frac{4}{5}(541.67) - 400 - 500 = 0$
$C_y = 467\text{ lb}$ ***Resp.***

**F6-15.** $\zeta + \Sigma M_A = 0;\ 100\text{ N}(250\text{ mm}) - N_B(50\text{ mm}) = 0$
$N_B = 500\text{ N}$ ***Resp.***
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad (500\text{ N})\text{ sen }45° - A_x = 0$
$A_x = 353.55\text{ N}$
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ A_y - 100\text{ N} - (500\text{ N})\cos 45° = 0$
$A_y = 453.55\text{ N}$
$F_A = \sqrt{(353.55\text{ N})^2 + (453.55\text{ N})^2}$
$= 575\text{ N}$ ***Resp.***

**F6-16.** $\zeta + \Sigma M_C = 0;$
$F_{AB}\cos 45°(1) - F_{AB}\text{ sen }45°(3)$
$+ 800 + 400(2) = 0$
$F_{AB} = 1131.37\text{ N}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\ -C_x + 1131.37\cos 45° = 0$
$C_x = 800\text{ N}$ ***Resp.***
$+\uparrow \Sigma F_y = 0; -C_y + 1131.37\text{ sen }45° - 400 = 0$
$C_y = 400\text{ N}$ ***Resp.***

**F6-17.** Placa $A$:
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 2T + N_{AB} - 100 = 0$
Placa $B$:
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 2T - N_{AB} - 30 = 0$
$T = 32.5\text{ lb},\ N_{AB} = 35\text{ lb}$ ***Resp.***

**F6-18.** Polea $C$:
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ T - 2P = 0; T = 2P$
Viga:
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2P + P - 6 = 0$
$P = 2\text{ kN}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_A = 0;\ 2(1) - 6(x) = 0$
$x = 0.333\text{ m}$ ***Resp.***

## Capítulo 7

**F7-1.** $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_y(6) - 10(1.5) - 15(4.5) = 0$
$B_y = 13.75\text{ kN}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ ***Resp.***
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad V_C + 13.75 - 15 = 0$
$V_C = 1.25\text{ kN}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 13.75(3) - 15(1.5) - M_C = 0$
$M_C = 18.75\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F7-2.** $\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 30 - 10(1.5) - A_y(3) = 0$
$A_y = 5\text{ kN}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ ***Resp.***
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 5 - V_C = 0$
$V_C = 5\text{ kN}$ ***Resp.***
$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad M_C + 30 - 5(1.5) = 0$
$M_C = -22.5\text{ kN}\cdot\text{m}$ ***Resp.***

**F7-3.** $\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0$

$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad 3(6)(3) - B_y(9) = 0$

$B_y = 6 \text{ kip}$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$ ***Resp.***

$\zeta + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C - 6 = 0$

$V_C = 6 \text{ kip}$ ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad -M_C - 6(4.5) = 0$

$M_C = -27 \text{ kip} \cdot \text{pie}$ ***Resp.***

**F7-4.** $\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(6) - 12(1.5) - 9(3)(4.5) = 0$

$B_y = 23.25 \text{ kN}$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 23.25 - 9(1.5) = 0$

$V_C = -9.75 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_C = 0;$

$23.25(1.5) - 9(1.5)(0.75) - M_C = 0$

$M_C = 24.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

**F7-5.** $\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad B_y(6) - \frac{1}{2}(9)(6)(3) = 0$

$B_y = 13.5 \text{ kN}$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 13.5 - \frac{1}{2}(9)(3) = 0$

$V_C = 0$ ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad 13.5(3) - \frac{1}{2}(9)(3)(1) - M_C = 0$

$M_C = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

**F7-6.** $\zeta + \Sigma M_A = 0;$

$B_y(6) - \frac{1}{2}(6)(3)(2) - 6(3)(4.5) = 0$

$B_y = 16.5 \text{ kN}$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C + 16.5 - 6(3) = 0$

$V_C = 1.50 \text{ kN}$ ***Resp.***

$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad 16.5(3) - 6(3)(1.5) - M_C = 0$

$M_C = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ***Resp.***

**F7-7.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 6 - V = 0 \quad V = 6 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 18 - 6x = 0$

$M = (6x - 18) \text{ kN} \cdot \text{m}$

**F7-8.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V - 2x = 0$

$V = (-2x) \text{ kip}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 2x\left(\frac{x}{2}\right) - 15 = 0$

$M = \left(15 - x^2\right) \text{ kip} \cdot \text{pie}$

$V|_{x=9 \text{ pies}} = -2(9) = -18 \text{ kip}$

$M|_{x=9 \text{ pies}} = 15 - 9^2 = -66 \text{ kip} \cdot \text{pie}$

**F7-9.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V - \frac{1}{2}(2x)(x) = 0$

$V = -\left(x^2\right) \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + \frac{1}{2}(2x)(x)\left(\frac{x}{3}\right) = 0$

$M = -\left(\frac{1}{3}x^3\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

**F7-10.** $+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V - 2 = 0$

$V = -2 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 2x = 0$

$M = (-2x) \text{ kN} \cdot \text{m}$

**F7-11.** Región $3 \le x < 3$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V - 5 = 0 \quad V = -5 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M + 5x = 0$

$M = (-5x) \text{ kN} \cdot \text{m}$

Región $0 < x \le 6$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 5 = 0 \quad V = -5 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad 5(6 - x) - M = 0$

$M = \left(5(6 - x)\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

**F7-12.** Región $0 \le x < 3$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V = 0$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M - 12 = 0$

$M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Región 3 m $< x \le 6$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 4 = 0 \quad V = -4 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad 4(6 - x) - M = 0$

$M = \left(4(6 - x)\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$

**F7-13.** $x = 0, \quad V = -4, \quad M = 0;$

$x = 1^+, \quad V = -10, \quad M = -4;$

$x = 2^+, \quad V = -18, \quad M = -14;$

$x = 3, \quad V = -18, \quad M = -32;$

**F7-14.** $x = 0,\quad V = 18,\quad M = -27;$
$x = 1.5,\quad V = 6,\quad M = -9;$
$x = 3,\quad V = 6,\quad M = 0;$

**F7-15.** $x = 0,\quad V = 8,\quad M = 0;$
$x = 6^+,\quad V = 2,\quad M = 48;$
$x = 12^+,\quad V = -10,\quad M = 60;$
$x = 18,\quad V = -10,\quad M = 0$

**F7-16.** $x = 0,\quad V = 0,\quad M = 0;$
$x = 1.5^+,\quad V = 0,\quad M = -6.75;$
$x = 4.5^+,\quad V = 9,\quad M = -6.75;$
$x = 6,\quad V = 0,\quad M = 0$

**F7-17.** $x = 0,\quad V = 9,\quad M = 0;$
$x = 3.\quad V = 0,\quad M = 9;$
$x = 6,\quad V = -9;\quad M = 0$

**F7-18.** $x = 0,\quad V = 13.5,\quad M = 0;$
$x = 3,\quad V = 0,\quad M = 27;$
$x = 6,\quad V = -13.5,\quad M = 0$

## Capítulo 8

**F8-1.** $+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad N - 50(9.81) - 200\left(\frac{3}{5}\right) = 0$
$N = 610.5\text{N}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad F - 200\left(\frac{4}{5}\right) = 0$
$F = 160\text{ N}$
$F < F_{\text{máx}} = \mu_s N = 0.3(610.5) = 183.15\text{ N},$
por lo tanto $F = 160$ N ***Resp.***

**F8-2.** $\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$
$N_A(3) + 0.2N_A(4) - 30(9.81)(2) = 0$
$N_A = 154.89\text{ N}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad P - 154.89 = 0$
$P = 154.89\text{ N} = 155\text{ N}$ ***Resp.***

**F8-3.** Embalaje $A$
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad N_A - 50(9.81) = 0$
$N_A = 490.5\text{ N}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad T - 0.25(490.5) = 0$
$T = 122.62\text{ N}$

Embalaje $B$
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad N_B + P\text{ sen }30° - 50(9.81) = 0$
$N_B = 490.5 - 0.5P$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;$
$P\cos 30° - 0.25(490.5 - 0.5P) - 122.62 = 0$
$P = 247\text{ N}$ ***Resp.***

**F8-4.** $\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad N_A - 0.3N_B = 0$
$+\uparrow\Sigma Fy = 0;$
$N_B + 0.3N_A + P - 100(9.81) = 0$
$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0;$
$P(0.6) + N_B(0.9) - 0.3N_B(0.9)$
$- 0.3N_A(0.9) = 0$
$N_A = 175.70\text{ N}\qquad N_B = 585.67\text{ N}$
$P = 343\text{ N}$ ***Resp.***

**F8-5.** Si ocurre deslizamiento:
$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad N_C - 250\text{ lb} = 0\quad N_C = 250\text{ lb}$
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0;\quad P - 0.4(250) = 0\quad P = 100\text{ lb}$
Si ocurre volcadura:
$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad -P(4.5) + 250(1.5) = 0$
$P = 83.3\text{ lb}$ ***Resp.***

## Capítulo 9

**F9-1.** $$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{1\text{ m}} y^{2/3}\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} y^{1/3}dy} = 0.4\text{ m}$$ ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y^{4/3}\,dy}{\int_0^{1\text{ m}} y^{1/3}dy} = 0.571\text{ m}$$ ***Resp.***

**F9-2.** $$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{m}} x(x^3\,dx)}{\int_0^{1\text{ m}} x^3\,dx}$$
$= 0.8$ m ***Resp.***

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} \frac{1}{2}x^3\left(x^3\,dx\right)}{\int_0^{1\text{ m}} x^3\,dx}$$
$= 0.286$ m ***Resp.***

**F9-3.** $$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{2\text{ m}} y\left(2\left(\frac{y^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)\right)dy}{\int_0^{2\text{ m}} 2\left(\frac{y^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)dy}$$
$$= 1.2 \text{ m}$$ ***Resp.***

**F9-4.** $$\bar{x} = \frac{\int_m \tilde{x}\, dm}{\int_m dm} = \frac{\int_0^L x\left[m_0\left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)dx\right]}{\int_0^L m_0\left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)dx}$$
$$= \frac{9}{16}L$$ ***Resp.***

**F9-5.** $$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{1\text{ m}} y\left(\frac{\pi}{4}\, y dy\right)}{\int_0^{1\text{ m}} \frac{\pi}{4} y\, dy}$$
$$= 0.667 \text{ m}$$ ***Resp.***

**F9-6.** $$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^{2\text{ pies}} z\left[\frac{9\pi}{64}(4 - z)^2\, dz\right]}{\int_0^{2\text{ pies}} \frac{9\pi}{64}(4 - z)^2\, dz}$$
$$= 0.786 \text{ pie}$$ ***Resp.***

**F9-7.** $$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} L}{\Sigma L}$$
$$= \frac{150(300) + 300(600) + 300(400)}{300 + 600 + 400}$$
$$= 265 \text{ mm}$$ ***Resp.***
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} L}{\Sigma L}$$
$$= \frac{0(300) + 300(600) + 600(400)}{300 + 600 + 400}$$
$$= 323 \text{ mm}$$ ***Resp.***
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} L}{\Sigma L}$$
$$= \frac{0(300) + 0(600) + (-200)(400)}{300 + 600 + 400}$$
$$= -61.5 \text{ mm}$$ ***Resp.***

**F9-8.** $$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{150[300(50)] + 325[50(300)]}{300(50) + 50(300)}$$
$$= 237.5 \text{ mm}$$ ***Resp.***

**F9-9.** $$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{100[2(200)(50)] + 225[50(400)]}{2(200)(50) + 50(400)}$$
$$= 162.5 \text{ mm}$$ ***Resp.***

**F9-10.** $$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{0.25[4(0.5)] + 1.75[0.5(2.5)]}{4(0.5) + 0.5(2.5)}$$
$$= 0.827 \text{ pulg}$$ ***Resp.***
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[4(0.5)] + 0.25[(0.5)(2.5)]}{4(0.5) + (0.5)(2.5)}$$
$$= 1.33 \text{ pulg}$$ ***Resp.***

**F9-11.** $$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} V}{\Sigma V} = \frac{1[2(7)(6)] + 4[4(2)(3)]}{2(7)(6) + 4(2)(3)}$$
$$= 1.67 \text{ pies}$$ ***Resp.***
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} V}{\Sigma V} = \frac{3.5[2(7)(6)] + 1[4(2)(3)]}{2(7)(6) + 4(2)(3)}$$
$$= 2.94 \text{ pies}$$ ***Resp.***
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} V}{\Sigma V} = \frac{3[2(7)(6)] + 1.5[4(2)(3)]}{2(7)(6) + 4(2)(3)}$$
$$= 2.67 \text{ pies}$$ ***Resp.***

**F9-12.** $$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} V}{\Sigma V}$$
$$= \frac{0.25[0.5(2.5)(1.8)] + 0.25\left[\frac{1}{2}(1.5)(1.8)(0.5)\right] + \left[\frac{1}{2}(1.5)(1.8)(0.5)\right]}{0.5(2.5)(1.8) + \frac{1}{2}(1.5)(1.8)(0.5) + \frac{1}{2}(1.5)(1.8)(0.5)}$$
$$= 0.391 \text{ m}$$ ***Resp.***
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} V}{\Sigma V} = \frac{5.00625}{3.6} = 1.39 \text{ m}$$ ***Resp.***
$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} V}{\Sigma V} = \frac{2.835}{3.6} = 0.7875 \text{ m}$$ ***Resp.***

**F9-13.** $$A = 2\pi \Sigma \tilde{r} L$$
$$= 2\pi\left[0.75(1.5) + 1.5(2) + 0.75\sqrt{(1.5)^2 + (2)^2}\right]$$
$$= 37.7 \text{ m}^2$$ ***Resp.***
$$V = 2\pi \Sigma \tilde{r} A$$
$$= 2\pi\left[0.75(1.5)(2) + 0.5\left(\tfrac{1}{2}\right)(1.5)(2)\right]$$
$$= 18.8 \text{ m}^3$$ ***Resp.***

**F9-14.** $$A = 2\pi \Sigma \tilde{r} L$$
$$= 2\pi\left[1.95\sqrt{(0.9)^2 + (1.2)^2} + 2.4(1.5) + 1.95(0.9) + 1.5(2.7)\right]$$
$$= 77.5 \text{ m}^2$$ ***Resp.***
$$V = 2\pi \Sigma \tilde{r} A$$
$$= 2\pi\left[1.8\left(\tfrac{1}{2}\right)(0.9)(1.2) + 1.95(0.9)(1.5)\right]$$
$$= 22.6 \text{ m}^3$$ ***Resp.***

**F9-15.** $A = 2\pi\Sigma\bar{r}L$

$= 2\pi\left[7.5(15) + 15(18) + 22.5\sqrt{15^2 + 20^2} + 15(30)\right]$

$= 8765 \text{ pulg}^2$ ***Resp.***

$V = 2\pi\Sigma\bar{r}A$

$= 2\pi\left[7.5(15)(38) + 20\left(\frac{1}{2}\right)(15)(20)\right]$

$= 45\,710 \text{ pulg}^3$ ***Resp.***

**F9-16.** $A = 2\pi\Sigma\bar{r}L$

$= 2\pi\left[\frac{2(1.5)}{\pi}\left(\frac{\pi(1.5)}{2}\right) + 1.5(2) + 0.75(1.5)\right]$

$= 40.1 \text{ m}^2$ ***Resp.***

$V = 2\pi\Sigma\bar{r}A$

$= 2\pi\left[\frac{4(1.5)}{3\pi}\left(\frac{\pi(1.5^2)}{4}\right) + 0.75(1.5)(2)\right]$

$= 21.2 \text{ m}^3$ ***Resp.***

**F9-17.** $w_b = \rho_w g h b = 1000(9.81)(6)(1)$

$= 58.86 \text{ kN/m}$

$F_R = \frac{1}{2}(58.76)(6) = 176.58 \text{ kN} = 177 \text{ kN}$ ***Resp.***

**F9-18.** $w_b = \gamma_w\, hb = 62.4\,(4)(4) = 998.4 \text{ lb/pie}$

$F_R = 998.4(3) = 3.00 \text{ kip}$ ***Resp.***

**F9-19.** $w_b = \rho_w g h_B b = 1000(9.81)(2)(1.5)$

$= 29.43 \text{ kN/m}$

$F_R = \frac{1}{2}(29.43)\left(\sqrt{(1.5)^2 + (2)^2}\right)$

$= 36.8 \text{ kN}$ ***Resp.***

**F9-20.** $w_A = \rho_w g h_A b = 1000(9.81)(3)(2)$

$= 58.86 \text{ kN/m}$

$w_B = \rho_w g h_B b = 1000(9.81)(5)(2)$

$= 98.1 \text{ kN/m}$

$F_R = \frac{1}{2}(58.86 + 98.1)(2) = 157 \text{ kN}$ ***Resp.***

**F9-21.** $w_A = \gamma_w h_A\, b = 62.4(6)(2) = 748.8 \text{ lb/pie}$

$w_B = \gamma_w\, h_B\, b = 62.4(10)(2) = 1248 \text{ lb/pie}$

$F_R = \frac{1}{2}(748.8 + 1248)\left(\sqrt{(3)^2 + (4)^2}\right)$

$= 4.99 \text{ kip}$ ***Resp.***

## Capítulo 10

**F10-1.**

$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^{1\text{ m}} y^2\left[\left(1 - y^{3/2}\right)dy\right] = 0.111 \text{ m}^4$ ***Resp.***

**F10-2.**

$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^{1\text{ m}} y^2\left(y^{3/2}\, dy\right) = 0.222 \text{ m}^4$ ***Resp.***

**F10-3.**

$I_y = \int_A x^2\, dA = \int_0^{1\text{ m}} x^2\left(x^{2/3}\right)dx = 0.273 \text{ m}^4$ ***Resp.***

**F10-4.**

$I_y = \int_A x^2\, dA = \int_0^{1\text{ m}} x^2\left[(1 - x^{2/3})\, dx\right] = 0.0606 \text{ m}^4$ ***Resp.***

**F10-5.** $I_x = \left[\frac{1}{12}(50)\left(450^3\right) + 0\right] + \left[\frac{1}{12}(300)\left(50^3\right) + 0\right]$

$= 383\left(10^6\right) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

$I_y = \left[\frac{1}{12}(450)\left(50^3\right) + 0\right]$

$+ 2\left[\frac{1}{12}(50)\left(150^3\right) + (150)(50)(100)^2\right]$

$= 183\left(10^6\right) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

**F10-6.** $I_x = \frac{1}{12}(360)\left(200^3\right) - \frac{1}{12}(300)\left(140^3\right)$

$= 171\left(10^6\right) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

$I_y = \frac{1}{12}(200)\left(360^3\right) - \frac{1}{12}(140)\left(300^3\right)$

$= 463\left(10^6\right) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

**F10-7.** $I_y = 2\left[\frac{1}{12}(50)\left(200^3\right) + 0\right]$

$+ \left[\frac{1}{12}(300)\left(50^3\right) + 0\right]$

$= 69.8\,(10^6) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

**F10-8.**

$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}\, A}{\Sigma A} = \frac{15(150)(30) + 105(30)(150)}{150(30) + 30(150)} = 60 \text{ mm}$

$\bar{I}_{x'} = \Sigma(\bar{I} + Ad^2)$

$= \left[\frac{1}{12}(150)(30)^3 + (150)(30)(60 - 15)^2\right]$

$+ \left[\frac{1}{12}(30)(150)^3 + 30(150)(105 - 65)^2\right]$

$= 25.1\,(10^6) \text{ mm}^4$ ***Resp.***

## Capítulo 11

**F11-1.** $y_G = 0.75 \operatorname{sen}\theta$ $\quad\delta y_G = 0.75\cos\theta\,\delta\theta$

$x_C = 2(1.5)\cos\theta$ $\quad\delta x_C = -3\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$

$\delta U = 0;\quad 2W\delta y_G + P\delta x_C = 0$

$(294.3\cos\theta - 3P\operatorname{sen}\theta)\delta\theta = 0$

$P = 98.1\cot\theta|_{\theta=60^\circ} = 56.6 \text{ N}$ ***Resp.***

**F11-2.** $x_A = 5\cos\theta \qquad \delta x_A = -5 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$

$y_G = 2.5 \operatorname{sen}\theta \qquad \delta y_G = 2.5\cos\theta\,\delta\theta$

$\delta U = 0; \qquad -P\delta x_A + (-W\delta y_G) = 0$

$(5P \operatorname{sen}\theta - 1226.25\cos\theta)\delta\theta = 0$

$P = 245.25\cot\theta|_{\theta=60^\circ} = 142\text{ N}$ ***Resp.***

**F11-3.** $x_B = 0.6 \operatorname{sen}\theta \qquad \delta x_B = 0.6\cos\theta\,\delta\theta$

$y_C = 0.6\cos\theta \qquad \delta y_C = -0.6 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$

$\delta U = 0; \qquad -F_{sp}\delta x_B + (-P\delta y_C) = 0$

$-9(10^3) \operatorname{sen}\theta\,(0.6\cos\theta\,\delta\theta)$

$- 2000(-0.6 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$

$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = 0^\circ$ ***Resp.***

$-5400\cos\theta + 1200 = 0$

$\theta = 77.16^\circ = 77.2^\circ$ ***Resp.***

**F11-4.** $x_B = 0.9\cos\theta \qquad \delta x_B = -0.9 \operatorname{sen}\theta\delta\theta$

$x_C = 2(0.9\cos\theta) \qquad \delta x_C = -1.8 \operatorname{sen}\theta\delta\theta$

$\delta U = 0; \qquad P\delta x_B + \left(-F_{sp}\,\delta x_C\right) = 0$

$6(10^3)(-0.9 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta)$

$- 36(10^3)(\cos\theta - 0.5)(-1.8 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$

$\operatorname{sen}\theta\,(64\,800\cos\theta - 37\,800)\delta\theta = 0$

$\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \theta = 0^\circ$ ***Resp.***

$64800\cos\theta - 37\,800 = 0$

$\theta = 54.31^\circ = 54.3^\circ$ ***Resp.***

**F11-5.** $y_G = 2.5 \operatorname{sen}\theta \qquad \delta y_G = 2.5\cos\theta\,\delta\theta$

$x_A = 5\cos\theta \qquad \delta x_C = -5 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$

$\delta U = 0; \qquad -W\delta y_G + \left(-F_{sp}\delta x_A\right) = 0$

$(15\,000 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - 7500 \operatorname{sen}\theta$

$- 1226.25\cos\theta)\delta\theta = 0$

$\theta = 56.33^\circ = 56.3^\circ$ ***Resp.***

**F11-6.** $F_{sp} = 15\,000\,(0.6 - 0.6\cos\theta)$

$x_C = 3[0.3 \operatorname{sen}\theta] \qquad \delta x_C = 0.9\cos\theta\,\delta\theta$

$y_B = 2[0.3\cos\theta] \qquad \delta y_B = -0.6 \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta$

$\delta U = 0; \qquad P\delta x_C + F_{sp}\delta y_B = 0$

$(135\cos\theta - 5400 \operatorname{sen}\theta + 5400 \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\delta\theta = 0$

$\theta = 20.9^\circ$ ***Resp.***

# Respuestas a problemas seleccionados

## Capítulo 1

**1-1.** **a.** 4.66 m
**b.** 55.6 s
**c.** 4.56 kN
**d.** 2.77 Mg

**1-2.** **a.** N
**b.** MN/m
**c.** $N/s^2$
**d.** MN/s

**1-3.** **a.** 0.431 g
**b.** 35.3 kN
**c.** 5.32 m

**1-5.** **a.** GN/s
**b.** Gg/N
**c.** GN/(kg · s)

**1-6.** **a.** 45.3 MN
**b.** 56.8 km
**c.** 5.63 $\mu$g

**1-7.** **a.** 3.65 Gg
**b.** $W_e = 35.8$ MN
**c.** $W_m = 5.89$ MN
**d.** $m_m = m_e = 3.65$ Gg

**1-9** 1 Pa $= 20.9(10^{-3})$ lb/pie$^2$
1 ATM = 101 kPa

**1-10.** **a.** $W = 98.1$ N
**b.** $W = 4.90$ mN
**c.** $W = 44.1$ kN

**1-11.** **a.** 0.447 kg · m/N
**b.** 0.911 kg · s
**c.** 18.8 GN/m

**1-13.** **a.** 27.1 N · m
**b.** 70.7 kN/m$^3$
**c.** 1.27 mm/s

**1-14.** 2.71 Mg/m$^3$

**1-15.** $\rho_w = 1.00$ Mg/m$^3$

**1-17.** **a.** $m = 2.04$ g
**b.** $m = 15.3$ Mg
**c.** $m = 6.12$ Gg

**1-18.** **a.** 0.04 MN$^2$
**b.** 25 $\mu$m$^2$
**c.** 0.064 km$^3$

**1-19.** $F = 7.41\ \mu$N

**1-21.** 26.9 $\mu$m · kg/N

## Capítulo 2

**2-1.** $F_R = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2(6)(8)\cos 75^\circ} = 8.67$ kN
$\frac{\text{sen}\,\alpha}{8} = \frac{\text{sen}\,75^\circ}{8.669}$ $\quad \alpha = 63.05^\circ$
$\phi = 3.05^\circ$

**2-2.** $F_R = 10.5$ kN
$\phi = 17.5^\circ$

**2-3.** $T = 6.57$ kN
$\theta = 30.6^\circ$

**2-5.** $\frac{F_u}{\text{sen}\,105^\circ} = \frac{200}{\text{sen}\,30^\circ}$ $\quad F_u = 386$ lb
$F_v = 283$ lb

**2-6.** $F_u = 150$ lb
$F_v = 260$ lb

**2-7.** $\theta = 78.6^\circ$
$F_R = 3.92$ kN

**2-9.** $F_R = \sqrt{8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 100^\circ} = 10.8$ kN
$\frac{\text{sen}\,\theta'}{6} = \frac{\text{sen}\,100^\circ}{10.80}$
$\theta' = 33.16^\circ$
$\phi = 3.16^\circ$

**2-10.** $\theta = 54.9^\circ$
$F_R = 10.4$ kN

**2-11.** $F_R = 400$ N
$\theta = 60^\circ$

**2-13.** $\frac{-F_{x'}}{\text{sen}\,30^\circ} = \frac{360}{\text{sen}\,80^\circ}$ $\quad F_{x'} = -183$ N
$\frac{F_y}{\text{sen}\,70^\circ} = \frac{360}{\text{sen}\,80^\circ}$ $\quad F_y = 344$ N

**2-14.** $\theta = 53.5^\circ$
$F_{AB} = 621$ lb

**2-15.** $\phi = 38.3^\circ$

**2-17.** $\frac{F_{2v}}{\text{sen}\,30^\circ} = \frac{150}{\text{sen}\,75^\circ}$, $F_{2v} = 77.6$ N
$\frac{F_{2u}}{\text{sen}\,75^\circ} = \frac{150}{\text{sen}\,75^\circ}$, $F_{2u} = 150$ N

**2-18.** $F_A = 774$ N
$F_B = 346$ N

**2-19.** $F_B = 325$ N
$F_A = 893$ N
$\theta = 70.0^\circ$

**2-21.** $F_1 = 6\cos 30^\circ = 5.20$ kN
$F_2 = 6\,\text{sen}\,30^\circ = 3$ kN
$\theta = 60^\circ$

**2-22.** $\theta = 90°$
$F_2 = 2.50$ kN
$F_R = 4.33$ kN

**2-23.** $F_R = 8.09$ kN
$\phi = 98.5°$

**2-25.** $\frac{F}{\text{sen}\ \phi} = \frac{F}{\text{sen}(\theta - \phi)}$
$\phi = \frac{\theta}{2}$
$F_R = \sqrt{(F)^2 + (F)^2 - 2(F)(F)\cos(180° - \theta)}$
$F_R = 2F\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**2-26.** $F_A = 3.66$ kN
$F_B = 7.07$ kN

**2-27.** $F_B = 5.00$ kN
$F_A = 8.66$ kN
$\theta = 60°$

**2-29.** $F_A = 600\cos 30° = 520$ N
$F_B = 600\ \text{sen}\ 30° = 300$ N

**2-30.** $\theta = 10.9°$
$F_{\text{mín}} = 235$ lb

**2-31.** $F = 97.4$ lb
$\theta = 16.2°$

**2-33.** $F_R = \sqrt{499.62^2 + 493.01^2} = 702$ N
$\theta = 44.6°$

**2-34.** $\phi = 42.4°$ $F_1 = 731$ N

**2-35.** $F_x = 67.3$ lb
$F_y = -162$ lb

**2-37.** $5.196 = -2 + F_2\cos\phi + 4$
$-3 = -3.464 + F_2\,\text{sen}\,\phi - 3$
$\phi = 47.3°$ $F_2 = 4.71$ kN

**2-38.** $F_2 = 12.9$ kN
$F_R = 13.2$ kN

**2-39.** $\theta = 29.1°$ $F_1 = 275$ N

**2-41.** $0 = 700\ \text{sen}\ 30° - F_B\cos\theta$
$1500 = 700\cos 30° + F_B\,\text{sen}\,\theta$
$\theta = 68.6°$ $F_B = 960$ N

**2-42.** $F_R = 839$ N
$\phi = 14.8°$

**2-43.** $F_R = 463$ lb
$\theta = 39.6°$

**2-45.** $0 = F_1\,\text{sen}\,\phi - 180 - 240$
$F_R = F_1\cos\phi + 240 - 100$
$F_1 = 420$ lb
$F_R = 140$ lb

**2-46.** $\theta = 63.7°$ $F_3 = 1.20F_1$

**2-47.** $\theta = 54.3°$ $F_A = 686$ N

**2-49.** $F_R = \sqrt{(-103.05)^2 + (-42.57)^2} = 111$ lb
$\theta = 202°$

**2-50.** $1.22\text{ kN} \leq P \leq 3.17\text{ kN}$

**2-51.** $F_R = 391$ N
$\theta = 16.4°$

**2-53.** $F_R = \sqrt{(0.5F_1 + 300)^2 + (0.8660F_1 - 240)^2}$
$F_R^2 = F_1^2 - 115.69F_1 + 147\,600$
$2F_R\frac{dF_R}{dF_1} = 2F_1 - 115.69 = 0$
$F_1 = 57.8$ N, $F_R = 380$ N

**2-54.** $\theta = 103°$
$F_2 = 88.1$ lb

**2-55.** $F_R = 161$ lb
$\theta = 38.3°$

**2-57.** $F_R^2 = (-4.1244 - F\cos 45°)^2 + (7 - F\,\text{sen}\,45°)^2$
$2F_R\frac{dF_R}{dF} = 2(-4.1244 - F\cos 45°)(-\cos 45°)$
$+ 2(7 - F\,\text{sen}\,45°)(-\text{sen}\,45°) = 0$
$F = 2.03$ kN
$F_R = 7.87$ kN

**2-58.** $\mathbf{F}_1 = \{F_1\cos\theta\,\mathbf{i} + F_1\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}\}$ N
$\mathbf{F}_2 = \{350\mathbf{i}\}$ N
$\mathbf{F}_3 = \{-100\mathbf{j}\}$ N
$\theta = 67.0°$
$F_1 = 434$ N

**2-59.** $\mathbf{F}_1 = \{-159\mathbf{i} + 276\mathbf{j} + 318\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{F}_2 = \{424\mathbf{i} + 300\mathbf{j} - 300\mathbf{k}\}$ N

**2-61.** $\mathbf{F}_1 = 600\left(\frac{4}{5}\right)(+\mathbf{i}) + 0\,\mathbf{j} + 600\left(\frac{3}{5}\right)(+\mathbf{k})$
$= \{480\mathbf{i} + 360\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{F}_2 = 400\cos 60°\mathbf{i} + 400\cos 45°\mathbf{j}$
$+ 400\cos 120°\mathbf{k}$
$= \{200\mathbf{i} + 283\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}$ N

**2-62.** $F_R = 754$ lb
$\alpha = 25.5°$
$\beta = 68.0°$
$\gamma = 77.7°$

**2-63.** $F_x = -200$ N
$F_y = 200$ N
$F_z = 283$ N

**2-65.** $-100\mathbf{k} = \{(F_{2_x} - 33.40)\mathbf{i} + (F_{2_y} + 19.28)\mathbf{j}$
$+ (F_{2_z} - 45.96)\mathbf{k}\}$
$F_2 = 66.4$ lb
$\alpha = 59.8°$
$\beta = 107°$
$\gamma = 144°$

**2-66.** $\alpha = 124°$
$\beta = 71.3°$
$\gamma = 140°$

**2-67.** $\mathbf{F}_1 = \{14.0\mathbf{j} - 48.0\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_2 = \{90\mathbf{i} - 127\mathbf{j} + 90\mathbf{k}\}$ lb

**2-69.** $-300\mathbf{i} + 650\mathbf{j} + 250\mathbf{k}$
$= (459.28\mathbf{i} + 265.17\mathbf{j} - 530.33\mathbf{k})$
$+ (F\cos\alpha\mathbf{i} + F\cos\beta\mathbf{j} + F\cos\gamma\mathbf{k})$
$F^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1\,333\,518.08$
$F = 1.15$ kN
$\alpha = 131°$ $\beta = 70.5°$ $\gamma = 47.5°$

**2-70.** $F = 882$ N
$\alpha = 121°$ $\beta = 52.7°$ $\gamma = 53.0°$

**2-71.** $F_R = 718$ lb
$\alpha_R = 86.8°$
$\beta_R = 13.3°$
$\gamma_R = 103°$

**2-73.** $F_R = \sqrt{(550)^2 + (52.1)^2 + (270)^2} = 615$ N
$\alpha = 26.6°$
$\beta = 85.1°$
$\gamma = 64.0°$

**2-74.** $\alpha_1 = 45.6°$
$\beta_1 = 53.1°$
$\gamma_1 = 66.4°$

**2-75.** $\alpha_1 = 90°$
$\beta_1 = 53.1°$
$\gamma_1 = 66.4°$

**2-77.** $F_2\cos\alpha_2 = -150.57$
$F_2\cos\beta_2 = -86.93$
$F_2\cos\gamma_2 = 46.59$
$F_2 = 180$ N
$\alpha_2 = 147°$
$\beta_2 = 119°$
$\gamma_2 = 75.0°$

**2-78.** $\alpha = 121°$
$\gamma = 53.1°$
$F_R = 754$ N
$\beta = 52.5°$

**2-79.** $F_3 = 9.58$ kN
$\alpha_3 = 15.5°$
$\beta_3 = 98.4°$
$\gamma_3 = 77.0°$

**2-81.** $\alpha = 64.67°$
$F_x = 1.28$ kN
$F_y = 2.60$ kN
$F_z = 0.776$ kN

**2-82.** $F = 2.02$ kN
$F_y = 0.523$ kN

**2-83.** $F_3 = 166$ N
$\alpha = 97.5°$
$\beta = 63.7°$
$\gamma = 27.5°$

**2-85.** $F_2 = \sqrt{(-17.10)^2 + (8.68)^2 + (-26.17)^2}$
$= 32.4$ lb
$\alpha_2 = 122°$
$\beta_2 = 74.5°$
$\gamma_2 = 144°$

**2-86.** $\mathbf{r}_{AB} = \{-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\}$ m
$r_{AB} = 7$ m

**2-87.** $z = 5.35$ m

**2-89.** $\mathbf{F}_B = \{400\mathbf{i} - 400\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_C = \{250\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - 500\mathbf{k}\}$ lb
$F_R = \sqrt{650^2 + 100^2 + (-700)^2} = 960$ lb
$\alpha = 47.4°$
$\beta = 84.0°$
$\gamma = 137°$

**2-90.** $\alpha = 72.8°$
$\beta = 83.3°$
$\gamma = 162°$
$F_R = 822$ N

**2-91.** $F_R = 1.38$ kN
$\alpha = 82.4°$
$\beta = 125°$
$\gamma = 144°$

**2-93.**
$$\mathbf{F}_A = 60\,\frac{(4\cos 30°\,\mathbf{i} - 4\,\text{sen}\,30°\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k})}{\sqrt{(4\cos 30°)^2 + (-4\,\text{sen}\,30°)^2 + (-6)^2}}$$
$= \{28.8\,\mathbf{i} - 16.6\,\mathbf{j} - 49.9\,\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_B = \{-28.8\,\mathbf{i} - 16.6\,\mathbf{j} - 49.9\,\mathbf{k}\}$ lb
$$\mathbf{F}_C = 60\,\frac{(4\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k})}{\sqrt{(4)^2 + (-6)^2}}$$
$= \{33.3\,\mathbf{j} - 49.9\,\mathbf{k}\}$ lb
$F_R = 150$ lb
$\alpha = 90°$
$\beta = 90°$
$\gamma = 180°$

**2-94.** $F = 52.1$ lb

**2-95.** $\mathbf{F} = \{59.4\mathbf{i} - 88.2\mathbf{j} - 83.2\mathbf{k}\}$ lb
$\alpha = 63.9°$
$\beta = 131°$
$\gamma = 128°$

**2-97.** $\mathbf{r}_{AB} = \{(0 - 0)\mathbf{i} + [0 - (-2.299)]\,\mathbf{j} + (0 - 0.750)\,\mathbf{k}\}$ m
$\mathbf{r}_{CD} = \{[-0.5 - (-2.5)]\,\mathbf{i} + [0 - (-2.299)]\,\mathbf{j} + (0 - 0.750)\,\mathbf{k}\}$ m
$\mathbf{F}_A = \{285\mathbf{j} - 93.0\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{F}_C = \{159\mathbf{i} + 183\mathbf{j} - 59.7\mathbf{k}\}$ N
**2-98.** $\mathbf{F}_A = \{-43.5\mathbf{i} + 174\mathbf{j} - 174\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{F}_B = \{53.2\mathbf{i} - 79.8\mathbf{j} - 146\mathbf{k}\}$ N
**2-99.** $F_C = 1.62$ kN
$F_B = 2.42$ kN
$F_R = 3.46$ kN
**2-101.** $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{F} = -\frac{120}{170}\,\mathbf{i} - \frac{90}{170}\,\mathbf{j} - \frac{80}{170}\,\mathbf{k}$
$x = 24$ pies
$y = 18$ pies
$z = 16$ pies
**2-102.** $F_R = 1.24$ kip
$\alpha = 90°$
$\beta = 90°$
$\gamma = 180°$
**2-103.** $F_A = F_B = F_C = 326$ lb
**2-105.** $\mathbf{F}_A = \{30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_B = \{30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_C = \{-30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{F}_D = \{-30\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}$ lb
$F_R = 240$ lb
$\alpha = 90°$
$\beta = 90°$
$\gamma = 180°$
**2-106.** $F = 105$ lb
**2-107.** $\mathbf{F} = \{-6.61\mathbf{i} - 3.73\mathbf{j} + 9.29\mathbf{k}\}$ lb
**2-109.** $\mathbf{r}_A = (0 - 0.75)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (3 - 0)\mathbf{k} = \{-0.75\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\}$ m
$\mathbf{F}_A = \{-1.46\,\mathbf{i} + 5.82\,\mathbf{k}\}$ kN
$\mathbf{r}_C = [0 - (-0.75 \text{ sen } 45°)]\mathbf{i} + [0 - (-0.75 \cos 45°)]\mathbf{j} + (3 - 0)\mathbf{k}$
$\mathbf{F}_C = \{0.857\,\mathbf{i} + 0.857\,\mathbf{j} + 4.85\,\mathbf{k}\}$ kN
$\mathbf{r}_B = [0 - (-0.75 \text{ sen } 30°)]\mathbf{i} + (0 - 0.75 \cos 30°)\mathbf{j} + (3 - 0)\mathbf{k}$
$\mathbf{F}_B = \{0.970\mathbf{i} - 1.68\mathbf{j} + 7.76\mathbf{k}\}$ kN
$F_R = 18.5$ kN
$\alpha = 88.8°$
$\beta = 92.6°$
$\gamma = 2.81°$
**2-110.** $\mathbf{F} = \{143\mathbf{i} + 248\mathbf{j} - 201\mathbf{k}\}$ lb

**2-113.** $(F_{AO})_{\parallel} = (24)\left(\frac{3}{7}\right) + (-48)\left(-\frac{6}{7}\right) + 16\left(-\frac{2}{7}\right) = 46.9$ N
$(F_{AO})_{\perp} = \sqrt{(56)^2 - (46.86)^2} = 30.7$ N
**2-114.** $r_{BC} = 5.39$ m
**2-115.** $(F_{ED})_{\parallel} = 334$ N
$(F_{ED})_{\perp} = 498$ $N$
**2-117.** $\mathbf{u}_1 = \cos 120°\,\mathbf{i} + \cos 60°\,\mathbf{j} + \cos 45°\,\mathbf{k}$
$|\text{Proy } F_2| = 71.6$ N
**2-118.** $F_{BC} = 45.2$ N
$\mathbf{F}_{BC} = \{32\mathbf{i} - 32\mathbf{j}\}$ N
**2-119.** $F_1 = 333$ N
$F_2 = 373$ N
**2-121.** $\mathbf{u}_{AC} = 0.1581\mathbf{i} + 0.2739\mathbf{j} - 0.9487\mathbf{k}$
$(F_{AC})_z = -569$ lb
**2-122.** $F_{AC} = 366$ lb
$\mathbf{F}_{AC} = \{293\mathbf{j} + 219\mathbf{k}\}$ lb
**2-123.** $(F_{BC})_{\parallel} = 245$ N
$(F_{BC})_{\perp} = 316$ N
**2-125.** $\mathbf{u}_{OD} = -\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}$
$\mathbf{u}_{OA} = \frac{1}{3}\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j} - \frac{2}{3}\,\mathbf{k}$
$\phi = 65.8°$
**2-126.** $(F_1)_{F_2} = 50.6$ N
**2-127.** $\theta = 97.3°$
**2-129.** $\mathbf{r}_{AB} = \{-15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\}$ pies
$\mathbf{r}_{AC} = \{-15\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\}$ pies
$\theta = 34.2°$
**2-130.** $F_x = 47.8$ lb
$F_{AC} = 45.5$ lb
**2-131.** $F_x = -75$ N
$F_y = 260$ N
**2-133.**
$\mathbf{u}_{F_1} = \cos 30° \text{ sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30° \cos 30°\mathbf{j} - \text{sen } 30°\mathbf{k}$
$\mathbf{u}_{F_2} = \cos 135°\mathbf{i} + \cos 60°\mathbf{j} + \cos 60°\mathbf{k}$
$(F_1)_{F_2} = 5.44$ lb
**2-134.** $F_R = 178$ N
$\theta = 100°$
**2-135.** $F_R = 215$ lb
$\theta = 52.7°$
**2-137.** $\mathbf{r}_{BA} = \{-3\mathbf{i}\}$ pies
$\mathbf{r}_{BC} = \{6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ pies
$\theta = 143°$
**2-138.** $F_r = 178$ N
$\theta = 85.2°$
**2-139.** $F_{AB} = 215$ lb
$\theta = 52.7°$

**2-141.** $\dfrac{250}{\text{sen } 120°} = \dfrac{F_u}{\text{sen } 40°}$ $F_u = 186 \text{ N}$
$F_v = 98.7 \text{ N}$
**2-142.** Proy $F = 48.0 \text{ N}$
**2-143.** $\mathbf{F}_B = \{-324\mathbf{i} + 130\mathbf{j} + 195\mathbf{k}\} \text{ N}$
$\mathbf{F}_C = \{-324\mathbf{i} - 130\mathbf{j} + 195\mathbf{k}\} \text{ N}$
$\mathbf{F}_E = \{-194\mathbf{i} + 291\mathbf{k}\} \text{ N}$

## Capítulo 3

**3-1.** $F_{BA} \text{ sen } 30° - 200(9.81) = 0$ $F_{BA} = 3.92 \text{ kN}$
$F_{BC} = 3.40 \text{ kN}$
**3-2.** $F_{BC} = 2.90 \text{ kN}, y = 0.841 \text{ m}$
**3-3.** $F_{AB} = 29.4 \text{ kN}$
$F_{BC} = 15.2 \text{ kN}, F_{BD} = 21.5 \text{ kN}$
**3-5.** $T = 13.3 \text{ kN}, F_2 = 10.2 \text{ kN}$
**3-6.** $\theta = 36.3°, T = 14.3 \text{ kN}$
**3-7.** $T_{BC} = 22.3 \text{ kN}$
$T_{BD} = 32.6 \text{ kN}$
**3-9.** $F_{AB} \cos 45° - F_{AC}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$
$F_{AC} = 294.63 \text{ lb}$
$W = 412 \text{ lb}$
**3-10.** $T = 7.20 \text{ kN}$
$F = 5.40 \text{ kN}$
**3-11** $T = 7.66 \text{ kN}$
$\theta = 70.1°$
**3-13.** $W_C \cos 30° - 275 \cos \theta = 0$
$\theta = 40.9°$ $W_C = 240 \text{ lb}$
**3-14.** $x_{AC} = 0.793 \text{ m}$
$x_{AB} = 0.467 \text{ m}$
**3-15.** $m = 8.56 \text{ kg}$
**3-17.** $F_{CB} \cos \theta - F_{CA} \cos 30° = 0$
$\theta = 64.3°$ $F_{CB} = 85.2 \text{ N}$
$F_{CA} = 42.6 \text{ N}$
**3-18.** $F_{AB} = 98.6 \text{ N}$ $F_{AC} = 267 \text{ N}$
**3-19.** $d = 2.42 \text{ m}$
**3-21.** Nodo $D$, $\Sigma F_x = 0$,
$F_{CD} \cos 30° - F_{BD} \cos 45° = 0$
Nodo $B$, $\Sigma F_x = 0$,
$F_{BC} + 8.7954m \cos 45° - 12.4386m \cos 30° = 0$
$m = 48.2 \text{ kg}$
**3-22.** $\theta = 35.0°$
**3-23.** $40 = 50(\sqrt{12} - l'), l' = 2.66 \text{ pies}$
**3-25.** Nodo $E$, $F_{ED} \cos 30° - F_{EB}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$
Nodo $B$,
$1.3957W \cos 30° - 0.8723W\left(\frac{3}{5}\right) - F_{BA} = 0$
$W = 57.7 \text{ lb}$
**3-26.** $F_{BA} = 80.7 \text{ lb}$
$F_{CD} = 65.9 \text{ lb}$
$F_{BC} = 57.1 \text{ lb}$
$\theta = 2.95°$
**3-27.** $W_F = 123 \text{ lb}$
**3-29.** $100 \cos \theta = W\left(\frac{5}{13}\right)$
$\theta = 78.7°$
$W = 51.0 \text{ lb}$
**3-30.** $T = 53.1 \text{ lb}$
**3-31.** $F = 39.3 \text{ lb}$
**3-33.** $2\,(T \cos 30°) - 50 = 0$
$T = 28.9 \text{ N}$
$F_R = 14.9 \text{ N}, (A \text{ y } D)$
$F_R = 40.8 \text{ N}, (B \text{ y } C)$
**3-34.** $P = 147 \text{ N}$
**3-35.** $l = 19.1 \text{ pulg}$
**3-37.** $-T_{AC} + F_s \cos \theta = 0$
$d = 7.13 \text{ pulg}$
**3-38.** $k = 6.80 \text{ lb/pulg}$
**3-39.** $W_E = 18.3 \text{ lb}$
**3-41.** $-150 + 2\,T \text{ sen } \theta = 0$
$-2(107.1) \cos 44.4° + m(9.81) = 0$
$m = 15.6 \text{ kg}$
**3-42.** $m = 2.37 \text{ kg}$
**3-43.** $y = 6.59 \text{ m}$
**3-45.** $F_{AB} - \frac{2}{3}F_{AD} = 0$
$-F_{AC} + \frac{2}{3}F_{AD} = 0$
$\frac{1}{3}F_{AD} - 981 = 0$
$F_{AD} = 2.94 \text{ kN}$
$F_{AB} = F_{AC} = 1.96 \text{ kN}$
**3-46.** $m = 102 \text{ kg}$
**3-47.** $F_{AB} = 2.52 \text{ kN}$
$F_{CB} = 2.52 \text{ kN}$
$F_{BD} = 3.64 \text{ kN}$
**3-49.** $-\frac{2}{3}F_{AB} - \frac{2}{3}F_{AC} + F_{AD} = 0$
$\frac{1}{3}F_{AB} - \frac{2}{3}F_{AC} = 0$
$\frac{2}{3}F_{AB} + \frac{1}{3}F_{AC} - W = 0$
$F_{AC} = 225 \text{ lb}$ $F_{AD} = 450 \text{ lb}$
$W = 375 \text{ lb}$
**3-50.** $F_{AB} = 1.37 \text{ kip}$
$F_{AC} = 0.744 \text{ kip}$
$F_{AD} = 1.70 \text{ kip}$
**3-51.** $F_{AB} = 1.47 \text{ kip}$
$F_{AC} = 0.914 \text{ kip}$
$F_{AD} = 1.42 \text{ kip}$

**3-53.** $0.1330\,F_C - 0.2182\,F_D = 0$
$0.7682\,F_B - 0.8865\,F_C - 0.8729\,F_D = 0$
$0.6402\,F_B - 0.4432\,F_C - 0.4364\,F_D - 4905 = 0$
$F_B = 19.2$ kN
$F_C = 10.4$ kN
$F_D = 6.32$ kN

**3-54.** $F_{AB} = 1.21$ kN
$F_{AC} = 606$ N
$F_{AD} = 750$ N

**3-55.** $F_{AB} = 1.31$ kN
$F_{AC} = 763$ N
$F_{AD} = 708.5$ N

**3-57.** $\frac{4}{14}F_B - \frac{6}{14}F_C - \frac{4}{14}F_D = 0$
$-\frac{6}{14}F_B - \frac{4}{14}F_C + \frac{6}{14}F_D = 0$
$-\frac{12}{14}F_B - \frac{12}{14}F_C - \frac{12}{14}F_D + W = 0$
$m = 2.62$ Mg

**3-58.** $F_{AB} = 831$ N
$F_{AC} = 35.6$ N
$F_{AD} = 415$ N

**3-59.** $m = 90.3$ kg

**3-61.** $(F_{AB})_x - \frac{3}{7}F_{AB} - \frac{3}{7}F_{AB} = 0$
$(F_{AB})_z + \frac{3}{14}F_{AB} + \frac{3}{14}F_{AB} - 490.5 = 0$
$F_{AB} = 520$ N
$F_{AC} = F_{AD} = 260$ N
$d = 3.61$ m

**3-62.** $y = 0.374$ pie
$z = 2.51$ pies

**3-63.** $F = 831$ lb
$z = 2.07$ pies

**3-65.** $$F_{AD}\left(\frac{0.5\cos 30^\circ}{\sqrt{0.5^2 + z^2}}\right) - F_{AC}\left(\frac{0.5\cos 30^\circ}{\sqrt{0.5^2 + z^2}}\right) = 0$$
$$F_{AB}\left(\frac{0.5}{\sqrt{0.5^2 + z^2}}\right) - 2\left[F\left(\frac{0.5\,\text{sen}\,30^\circ}{\sqrt{0.5^2 + z^2}}\right)\right] = 0$$
$$3F\left(\frac{z}{\sqrt{0.5^2 + z^2}}\right) - 100(9.81) = 0$$
$z = 173$ mm

**3-66.** $d = 1.64$ pies

**3-67.** $F_{AB} = F_{AC} = F_{AD} = 375$ lb

**3-69.** $-0.3873\,F_{OB} + 0.3873\,F_{OC} + 100\,\text{sen}\,\theta = 0$
$\theta = 0^\circ$
$-0.4472\,F_{OA} - 0.2236\,F_{OB}$
$-0.2236\,F_{OC} + 100 = 0$
$0.8944\,F_{OA} - 0.8944\,F_{OB} - 0.8944\,F_{OC} = 0$
$F_{OA} = 149$ lb
$F_{OB} = F_{OC} = 74.5$ lb

**3-70.** $\theta = 11.5^\circ$

**3-71.** $\theta = 4.69^\circ$
$F_1 = 4.31$ kN

**3-73.** $1.699(10)^{-3}\cos 60^\circ - F = 0$
$F = 0.850$ mN

**3-74.** $F_{AB} = 110$ N
$F_{AC} = 85.8$ N $\quad F_{AO} = 319$ N

**3-75.** $P = 639$ lb
$\alpha_3 = 77.2^\circ$
$\beta_3 = 148^\circ$
$\gamma_3 = 119^\circ$

**3-77.** $F_2 + F_1\cos 60^\circ - 800\left(\frac{3}{5}\right) = 0$
$800\left(\frac{4}{5}\right) + F_1\cos 135^\circ - F_3 = 0$
$F_1\cos 60^\circ - 200 = 0$
$F_1 = 400$ lb
$F_2 = 280$ lb
$F_3 = 357$ lb

**3-78.** $F_{CD} = 625$ lb
$F_{CA} = F_{CB} = 198$ lb

**3-79.** $F_1 = 0$
$F_2 = 311$ lb
$F_3 = 238$ lb

## Capítulo 4

**4-5.** $30(\cos 45^\circ)(18) = F\left(\frac{4}{5}\right)(12)$
$F = 39.8$ lb

**4-6.** $M_A = 7.21\ \text{kN}\cdot\text{m}$ ↻

**4-7.** $\theta = 64.0^\circ$

**4-9.** $-500 = -F\cos 30^\circ(18) - F\,\text{sen}\,30^\circ(5)$
$F = 27.6$ lb

**4-10.** $M_O = 120\ \text{N}\cdot\text{m}$ ↺
$M_O = 520\ \text{N}\cdot\text{m}$ ↺

**4-11.** $M_A = 38.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$ ↻

**4-13.** $M_A = (36\cos\theta + 18\,\text{sen}\,\theta)\ \text{kN}\cdot\text{m}$
$$\frac{dM_A}{d\theta} = -36\,\text{sen}\,\theta + 18\cos\theta = 0$$
$\theta = 26.6^\circ$, $(M_A)_{máx} = 40.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$
Donde $M_A = 0$,
$0 = 36\cos\theta + 18\,\text{sen}\,\theta$, $\theta = 117^\circ$

**4-14.** ↺+ $M_A = 123\ \text{lb}\cdot\text{pulg}$ ↻
$F = 23.7$ lb

**4-15.** $(M_R)_A = 2.09\ \text{N}\cdot\text{m}$ ↻

**4-17.** $(M_{F_A})_C = -30\left(\frac{3}{5}\right)(9)$
$= -162 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 162 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowright$
$(M_{F_B})_C = 260 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$
Como $(M_{F_B})_C > (M_{F_A})_C$, la regla girará en *sentido contrario al de las manecillas del reloj*.

**4-18.** $F_A = 28.9$ lb

**4-19.** $M_P = (537.5 \cos\theta + 75 \text{ sen } \theta)$ lb · pie

**4-21.** **a.** $M_A = 400\sqrt{(3)^2 + (2)^2}$
$M_A = 1.44 \text{ kN} \cdot \text{m} \circlearrowleft$
$\theta = 56.3°$

**4-22.** $\circlearrowleft + M_A = 1200 \text{ sen } \theta + 800 \cos\theta$
$M_{\text{máx}} = 1.44 \text{ kN} \cdot \text{m} \circlearrowleft$
$\theta_{\text{máx}} = 56.3°$

**4-23.** $M_{\text{mín}} = 0$
$\theta_{\text{mín}} = 146°$

**4-25.** $BC = 24.57$ pies
$\frac{\text{sen } \theta}{10} = \frac{\text{sen } 105°}{24.57}$ $\theta = 23.15°$
$1500 = F \text{ sen } 23.15°(20)$
$F = 191$ lb

**4-26.** $(M_A)_1 = 118 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \circlearrowright$
$(M_A)_2 = 140 \text{ lb} \cdot \text{pulg} \circlearrowright$

**4-27.** $M_A = 73.9 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$
$F_C = 82.2 \text{ N} \leftarrow$

**4-29.** $\circlearrowleft + M_B = 40 \cos 25°(2.5) = 90.6 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$
$\circlearrowleft + M_C = 141 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$

**4-30.** $\circlearrowleft + M_A = 195 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowleft$

**4-31.** $\circlearrowleft + M_A = 7.71 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowleft$

**4-33.** Momento máximo, $OB \perp BA$
$\circlearrowright + (M_O)_{\text{máx}} = 80.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$\theta = 33.6°$

**4-34.** $F = 115$ N

**4-35.** $F = 84.3$ N

**4-37.** $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_1 = \{110\mathbf{i} - 50\mathbf{j} + 90\mathbf{k}\}$ lb · pie

**4-38.** $\mathbf{M}_O = \{90\mathbf{i} - 130\mathbf{j} - 60\mathbf{k}\}$ lb · pie

**4-39.** $(\mathbf{M}_R)_O = \{200\mathbf{i} - 180\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}$ lb · pie

**4-41.** $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_C = \{1080\mathbf{i} + 720\mathbf{j}\}$ N · m
$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_C = \{1080\mathbf{i} + 720\mathbf{j}\}$ N · m

**4-42.** $\mathbf{M}_O = \{-720\mathbf{i} + 720\mathbf{j}\}$ N · m

**4-43.** $(\mathbf{M}_A)_O = \{-18\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\}$ N · m
$(\mathbf{M}_B)_O = \{18\mathbf{i} + 7.5\mathbf{j} + 30\mathbf{k}\}$ N · m

**4-45.** $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}$
$= \{-5.39\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 11.4\mathbf{k}\}$ N · m

**4-46.** $\mathbf{M}_B = \{10.6\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 29.2\mathbf{k}\}$ N · m

**4-47.** $y = 1$ m
$z = 3$ m
$d = 1.15$ m

**4-49.** $\mathbf{b} = \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{r}_{CB}$
$\mathbf{u}_F = \frac{\mathbf{b}}{b}$
$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F} = \{10\mathbf{i} + 0.750\mathbf{j} - 1.56\mathbf{k}\}$ kN · m

**4-50.** $M_O = 4.27$ N · m
$\alpha = 95.2°$
$\beta = 110°$
$\gamma = 20.6°$

**4-51.** $\mathbf{M}_{AF} = \{9.33\mathbf{i} + 9.33\mathbf{j} - 4.67\mathbf{k}\}$ N · m

**4-53.** $\mathbf{u} = \mathbf{k}$
$\mathbf{r} = 0.25 \text{ sen } 30° \, \mathbf{i} + 0.25 \cos 30° \, \mathbf{j}$
$M_z = 15.5$ N · m

**4-54.** $M_x = 15.0$ lb · pie
$M_y = 4.00$ lb · pie
$M_z = 36.0$ lb · pie

**4-55.** $\mathbf{M}_{AC} = \{11.5\mathbf{i} + 8.64\mathbf{j}\}$ lb · pie

**4-57.** $\mathbf{r}_{OB} = \{0.2 \cos 45°\mathbf{i} - 0.2 \text{ sen } 45°\mathbf{k}\}$ m
$M_y = 0.828$ N · m

**4-58.** $M_x = 73.0$ N · m

**4-59.** $F = 771$ N

**4-61.** $M_{CD} = \mathbf{u}_{CD} \cdot \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}$
$= u_{CD} \cdot \mathbf{r}_{DB} \times \mathbf{F} = -432$ lb · pie

**4-62.** $F = 162$ lb

**4-63.** $M_{y'} = 464$ lb · pie

**4-65.** $\mathbf{u}_y = -\text{sen } 30° \, \mathbf{i}' + \cos 30° \, \mathbf{j}'$
$\mathbf{r}_{AC} = -6 \cos 15° \, \mathbf{i}' + 3 \, \mathbf{j}' + 6 \text{ sen } 15° \, \mathbf{k}$
$M_y = 282$ lb · pie

**4-66.** $M = 282$ lb · pulg

**4-67.** $(M_a)_1 = 30$ lb · pulg
$(M_a)_2 = 8$ lb · pulg

**4-69.** $M_{OA} = \mathbf{u}_{OA} \cdot \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{W} = \mathbf{u}_{OA} \cdot \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{W}$
$W = 56.8$ lb

**4-70.** $M_x = 14.8$ N · m

**4-71.** $F = 20.2$ N

**4-73** $M_2 = 424$ N · m
$0 = 424.26 \cos 45° - M_3$
$M_3 = 300$ N · m

**4-74.** $F = 625$ N

**4-75.** $(M_c)_R = 260 \text{ lb} \cdot \text{pie} \circlearrowright$

**4-77.** $F' = 33.3$ N
$F = 133$ N

**4-78.** $F = 111$ N

**4-79.** $\theta = 56.1°$

**4-81.** $\circlearrowright + M_R = 100 \cos 30° \, (0.3) + 100 \text{ sen } 30° \, (0.3)$
$- P \text{ sen } 15° \, (0.3) - P \cos 15°(0.3) = 15$
$P = 70.7$ N

**4-82.** Para $P$ mínima se requiere $\theta = 45°$
$P = 49.5$ N

**4-83.** $N = 26.0$ N

**4-85.** **a.**
$M_R = 8 \cos 45°(1.8) + 8 \text{ sen } 45°(0.3) + 2 \cos 30°(1.8)$
$- 2 \text{ sen } 30°(0.3) - 2 \cos 30°(3.3) - 8 \cos 45°(3.3)$
$M_R = 9.69$ kN·m ↻
**b.** $M_R = 9.69$ kN· m ↻

**4-86.** $(M_c)_R = 5.20$ kN·m ↻

**4-87.** $F = 14.2$ kN·m

**4-89.** **a.** $\circlearrowleft + M_C = 40 \cos 30°(4) - 60\left(\frac{4}{5}\right)(4)$
$= 53.4$ lb· pie ↻
**b.** $\circlearrowleft + M_C = -53.4$ lb· pie $= 53.4$ lb· pie ↻

**4-90.** **a.** $\circlearrowleft + M_C = 53.4$ lb· pie ↻
**b.** $\circlearrowleft + M_C = 53.4$ lb· pie ↻

**4-91.** $(M_c)_R = 1.04$ kN·m
$\alpha = 120°$
$\beta = 61.3°$
$\gamma = 136°$

**4-93.** $\mathbf{M}_c = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{BA} \times -\mathbf{F}$
$M_c = 40.8$ N·m
$\alpha = 11.3°$
$\beta = 101°$
$\gamma = 90°$

**4-94.** $F = 98.1$ N

**4-95.** $(M_R)_{x'} = 4.84$ kip·pie
$(M_R)_{y'} = 29.8$ kip·pie

**4-97.** $M_C = F(1.5)$
$F = 15.4$ N

**4-98.** $\mathbf{M}_R = \{-12.1\mathbf{i} - 10.0\mathbf{j} - 17.3\mathbf{k}\}$ N·m

**4-99.** $d = 342$ mm

**4-101.** $0 = -M_2 + \frac{2}{3}M_3 + 75$
$0 = M_1 - \frac{2}{3}M_3 - 75$
$0 = \frac{1}{3}M_3 - 106.7$
$M_3 = 318$ lb·pie
$M_1 = M_2 = 287$ lb·pie

**4-102.** $(M_C)_R = 224$ N·m
$\alpha = 153°$
$\beta = 63.4°$
$\gamma = 90°$

**4-103.** $F_1 = 200$ lb
$F_2 = 150$ lb

**4-105.** $F_R = \sqrt{1.25^2 + 5.799^2} = 5.93$ kN
$\theta = 77.8°$
$M_{R_A} = 34.8$ kN·m ↻

**4-106.** $F_R = 5.93$ kN
$\theta = 77.8°$
$M_{R_B} = 11.6$ kN·m ↺

**4-107.** $F_R = 29.9$ lb
$\theta = 78.4°$
$M_{R_O} = 214$ lb·pulg ↺

**4-109.** $F_R = \sqrt{533.01^2 + 100^2} = 542$ N
$\theta = 10.6°$
$(M_R)_A = 441$ N·m ↺

**4-110.** $F_R = 50.2$ kN
$\theta = 84.3°$
$(M_R)_A = 239$ kN·m ↻

**4-111.** $F_R = 461$ N
$\theta = 49.4°$
$(M_R)_O = 438$ N·m ↻

**4-113.** $\mathbf{F}_R = \{2\mathbf{i} - 10\mathbf{k}\}$ kN
$(\mathbf{M}_R)_O = \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_B + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{F}_D$
$= \{-6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\}$ kN·m

**4-114.** $\mathbf{F}_R = \{-210\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{M}_{RO} = \{-15\mathbf{i} + 225\mathbf{j}\}$ N·m

**4-115.** $\mathbf{F}_R = \{6\,\mathbf{i} - 1\,\mathbf{j} - 14\,\mathbf{k}\}$ N
$\mathbf{M}_{RO} = \{1.30\,\mathbf{i} + 3.30\,\mathbf{j} - 0.450\,\mathbf{k}\}$ N·m

**4–117.** $\mathbf{F}_2 = \{-1.768\mathbf{i} + 3.062\mathbf{j} + 3.536\mathbf{k}\}$ kN
$\mathbf{F}_R = \{0.232\mathbf{i} + 5.06\mathbf{j} + 12.4\mathbf{k}\}$ kN
$\mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$
$= \{36.0\mathbf{i} - 26.1\mathbf{j} + 12.2\mathbf{k}\}$ kN·m

**4-118.** $F_R = 10.75$ kip ↓
$M_{R_A} = 99.5$ kip·pie ↺
$d = 13.7$ pies

**4-119.** $F_R = 10.75$ kip ↓
$d = 9.26$ pies

**4-121.** $F_R = \sqrt{(100)^2 + (898.2)^2} = 904$ lb
$\theta = 6.35°$
$\phi = 23.6°$
$d = 6.10$ pies

**4-122.** $F_R = 197$ lb
$\theta = 42.6°$
$d = 5.24$ pies

**4-123.** $F_R = 197$ lb
$\theta = 42.6°$
$d = 0.824$ pie

**4-125.** $F_R = \sqrt{(42.5)^2 + (50.31)^2} = 65.9$ lb
$\theta = 49.8°$
$d = 2.10$ pies

**4-126.** $F_R = 65.9$ lb
$\theta = 49.8°$
$d = 4.62$ pies

**4-127.** $F_R = 542$ N
$\theta = 10.6°$
$d = 0.827$ m

**4-129.** $F_R = 140$ kN$\downarrow$
$-140y = -50(3) - 30(11) - 40(13)$
$y = 7.14$ m
$x = 5.71$ m

**4-130.** $F_R = 140$ kN
$x = 6.43$ m
$y = 7.29$ m

**4-131.** $F_C = 600$ N $\quad F_D = 500$ N

**4-133.** $0 = 200(1.5 \cos 45°) - F_B(1.5 \cos 30°)$
$F_B = 163$ lb
$F_C = 223$ lb

**4-134.** $F_R = 215$ kN
$y = 3.68$ m
$x = 3.54$ m

**4-135.** $F_A = 30$ kN $\quad F_B = 20$ kN $\quad F_R = 190$ kN

**4-137.** $F_R = 26$ kN
$-26(y) = 6(650) + 5(750) - 7(600) - 8(700)$
$y = 82.7$ mm
$x = 3.85$ mm

**4-138.** $F_A = 18.0$ kN $\quad F_B = 16.7$ kN
$F_R = 48.7$ kN

**4-139.** $F_R = 808$ lb
$x = 3.52$ pies $\quad y = 0.138$ pie
$M_W = -1003$ lb · pie

**4-141.** $F_R = 990$ N
$\mathbf{u}_{F_R} = -0.5051\,\mathbf{i} + 0.3030\,\mathbf{j} + 0.8081\,\mathbf{k}$
$M_R = 3.07$ kN · m $\quad x = 1.16$ m
$y = 2.06$ m

**4-142.** $F_R = 75$ kN $\downarrow$
$\bar{x} = 1.20$ m

**4-143.** $F_R = 30$ kN $\downarrow$
$\bar{x} = 3.4$ m

**4-145.** $F_R = \frac{1}{2}w_0 L \downarrow$
$-\frac{1}{2}w_0 L(\bar{x}) = -\frac{1}{2}w_0\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{6}\right) - \frac{1}{2}w_0\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}L\right)$
$\bar{x} = \frac{5}{12}L$

**4-146.** $F_R = 3.90$ kip $\uparrow$
$d = 11.3$ pies

**4-147.** $w_1 = 190$ lb/pie
$w_2 = 282$ lb/pie

**4-149.** $\mathbf{F}_R = \{-108\,\mathbf{i}\}$ N
$\mathbf{M}_{RO} = -\left(1 + \frac{2}{3}(1.2)\right)(108)\,\mathbf{j}$
$-\left(0.1 + \frac{1}{3}(1.2)\right)(108)\,\mathbf{k}$
$\mathbf{M}_{RO} = \{-194\,\mathbf{j} - 54\,\mathbf{k}\}$ N · m

**4-150.** $b = 4.50$ pies
$a = 9.75$ pies

**4-151.** $F_R = 7$ lb
$\bar{x} = 0.268$ pie

**4-153.** $F_R = 107$ kN $\leftarrow$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^z zw\,dz}{\int_0^z w\,dz}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{4\text{ m}} \left[\left(20z^{\frac{3}{2}}\right)(10^3)\right]dz}{\int_0^{4\text{ m}} \left(20z^{\frac{1}{2}}\right)(10^3)\,dz}$$

$h = 1.60$ m

**4-154.** $F_R = 10.7$ kN $\downarrow$
$\bar{x} = 1$ m

**4-155.** $F_R = 577$ lb, $\theta = 47.5°$
$M_{RA} = 2.20$ kip · pie

**4-157.** $F_R = 80.6$ kip $\uparrow$

$$80640\bar{x} = 34560(6) + \int_0^x (x + 12)\,w\,dx$$

$\bar{x} = 14.6$ pies

**4-158.** $F_R = 53.3$ lb
$\bar{x} = 1.60$ pies

**4-159.** $w_{máx} = 18$ lb/pie
$F_R = 53.3$ lb
$x' = 2.40$ pies

**4-161.** $(dF_R)_x = 62.5(1 + \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$
$F_R = 223$ lb $\uparrow$

**4-162.** $F_R = 533$ lb $\downarrow$
$M_{R_A} = 533$ lb · pie

**4-163.** $d = 5.54$ pies

**4-165.** $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = \{298\mathbf{i} + 15.1\mathbf{j} - 200\mathbf{k}\}$ lb · pulg

**4-166.** $M_A = 2.89$ kip · pies

**4-167.** $\mathbf{M}_A = \{-59.7\mathbf{i} - 159\mathbf{k}\}$ N · m

**4-169.** **a.** $\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{AB} \times (25\,\mathbf{k})$
$\mathbf{M}_C = \{-5\mathbf{i} + 8.75\,\mathbf{j}\}$ N · m
**b.** $\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{OB} \times (25\,\mathbf{k}) + \mathbf{r}_{OA} \times (-25\,\mathbf{k})$
$\mathbf{M}_C = \{-5\mathbf{i} + 8.75\,\mathbf{j}\}$ N · m

**4-170.** $F = 992$ N

**4-171.** $\mathbf{F}_R = \{-80\mathbf{i} - 80\mathbf{j} + 40\mathbf{k}\}$ lb
$\mathbf{M}_{RP} = \{-240\mathbf{i} + 720\mathbf{j} + 960\mathbf{k}\}$ lb · pie

**4-173.** $M_z = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}) = -4.03$ N · m

## Capítulo 5

**5-1.** $W$ es el efecto de la gravedad (peso) sobre el rollo de papel.
$N_A$ y $N_B$ son las reacciones de la hoja lisa sobre el rollo de papel.

**5-2.** La fuerza $N_A$ del plano sobre el rodillo.
Las fuerzas $B_x$, $B_y$ del pasador sobre el elemento.

**5-3.** $W$ es el efecto de la gravedad (peso) sobre la caja basculante.
$A_y$ y $A_x$ son las reacciones del pasador $A$ sobre la caja basculante.
$F_{BC}$ es la reacción del cilindro hidráulico $BC$ sobre la caja basculante.

**5-5.** $C_y$ y $C_x$ son las reacciones del pasador $C$ sobre la armadura.
$T_{AB}$ es la tensión del cable $AB$ sobre la armadura.
Las fuerzas de 3 kN y 4 kN son el efecto de las fuerzas externas aplicadas sobre la armadura.

**5-6.** $W$ es el efecto de la gravedad (peso) sobre la pluma.
$A_y$ y $A_x$ son las reacciones del pasador A sobre la pluma.
$T_{BC}$ es la reacción de la fuerza del cable $BC$ sobre la pluma.
La fuerza de 1250 lb es la reacción de la carga suspendida sobre la pluma.

**5-7.** Las fuerzas $A_x$, $A_y$, $N_B$ del cilindro sobre la llave.

**5-9.** Las fuerzas $N_A$, $N_B$, $N_C$ de la madera sobre la barra.
Las fuerzas de 10 lb de la mano sobre la barra.

**5-10.** Las fuerzas $C_x$, $C_y$ del pasador sobre el tambor.
Las fuerzas $F_{AB}$ del trinquete sobre el engrane del tambor.
Las fuerzas de 500 lb del cable sobre el tambor.

**5-11.** $N_B = 245$ N
$N_A = 425$ N

**5-13.** $T_{AB}\cos 30°(2) + T_{AB}\,\text{sen}\,30°(4) - 3(2) - 4(4) = 0$
$T_{AB} = 5.89$ kN
$C_x = 5.11$ kN
$C_y = 4.05$ kN

**5-14.** $T_{BC} = 11.1$ kip
$A_x = 10.2$ kip
$A_y = 6.15$ kip

**5-15.** $N_B = 140$ lb
$A_x = 140$ lb
$A_y = 20$ lb

**5-17.** $N_C = 5.77$ lb
$10\cos 30°(13 - 1.732) - N_A(5 - 1.732)$
$- 5.77(3.464) = 0$
$N_A = 23.7$ lb
$N_B = 12.2$ lb

**5-18.** $F_{AB} = 401$ lb
$C_x = 333$ lb
$C_y = 722$ lb

**5-19.** $(N_A)_r = 98.6$ lb, $(N_B)_r = 21.4$ lb
$(N_A)_s = 100$ lb, $(N_B)_s = 20$ lb

**5-21.** $T\left(\frac{3}{5}\right)(3) + T\left(\frac{4}{5}\right)(1) - 60(1) - 30 = 0$
$T = 34.62$ kN
$A_x = 20.8$ kN
$A_y = 87.7$ kN

**5-22.** $F_B = 4.19$ kip
$A_x = 3.21$ kip
$A_y = 1.97$ kip

**5-23.** $N_C = 213$ N
$A_x = 105$ N
$A_y = 118$ N

**5-25.** $N_B(3) - 300(1.5) = 0$
$N_B = 150$ lb
$A_y = 300$ lb
$A_x = 150$ lb

**5-26.** $F_{CD} = 131$ N
$B_x = 34.0$ N
$B_y = 95.4$ N

**5-27.** $F_{AB} = 0.864$ kN
$C_y = 6.56$ kN
$C_x = 2.66$ kN

**5-29.** $F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right)(1.5) - 700(9.81)(d) = 0$
$F_{BC} = 5722.5d$
$F_A = \sqrt{(3433.5d)^2 + (4578d - 6867)^2}$

**5-30.** $A_y = 50$ lb
$N_B = 1.60$ kip
$A_x = 1.51$ kip

**5-31.** $F = 93.75$ lb
$A_x = 1.42$ kip
$A_y = 46.9$ lb

**5-33.** $40\,000\left(\frac{3}{5}\right)(4) + 40\,000\left(\frac{4}{5}\right)(0.2) - 2000(9.81)(x) = 0$
$x = 5.22$ m
$C_x = 32$ kN
$C_y = 4.38$ kN

**5-34.** $N_B = 1.04$ kN
$A_x = 0$
$A_y = 600$ N

**5-35.** $d = 6$ pies
$w = 267$ lb/pie

**5-37.** $-490.5\,(3.15) + \frac{1}{2}\,w_B\,(0.3)\,(9.25) = 0$
$w_B = 1.11$ kN/m
$w_A = 1.44$ kN/m

**5-38.** $k = 1.33$ kN/m
$A_y = 300$ N
$A_x = 398$ N
**5-39.** $\theta = 23.1°$
$A_y = 300$ N
$A_x = 353$ N
**5-41.** $A_y = 750$ lb
$N_B(4 \text{ sen } 30°) - 300(1) - 450(3)$
$N_B = 825$ lb
$A_x = 825$ lb
**5-42.** $N_B = 1.27$ kN
$A_x = 900$ N
$M_B = 227$ N · m
**5-43.** $T = 9.08$ lb
**5-45.** $2500(1.4 + 8.4) - 500(15 \cos 30° - 8.4)$
$- N_A(2.2 + 1.4 + 8.4) = 0$
$N_A = 1.85$ kip
$N_B = 1.15$ kip
**5-46.** $W = 5.34$ kip
**5-47.** $F_A = 432$ lb $F_B = 0$ $F_C = 432$ lb
**5-49.** $50(9.81) \text{ sen } 20° (0.5) + 50(9.81) \cos 20°(0.3317)$
$- P \cos\theta(0.5) - P \text{ sen } \theta (0.3317) = 0$
For $P_{\text{mín}}$; $\frac{dP}{d\theta} = 0$
$\theta = 33.6°$
$P_{\text{mín}} = 395$ N
**5-50.** $F = 5.20$ kN
$N_A = 17.3$ kN
$N_B = 24.9$ kN
**5-51.** $\theta = 63.4°$
$T = 29.2$ kN
**5-53.** $F_C (6 \cos\theta) - F_A (6 \cos\theta) = 0$
$\theta = 12.8°$
**5-54.** $k = 11.2$ lb/pie
**5-55.** $\alpha = 1.02°$
**5-57.** Para el disco $E$: $-P + N'\left(\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = 0$
Para el disco $D$: $N_A\left(\frac{4}{5}\right) - N'\left(\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = 0$
$N_A = 250$ lb
$N_B = 9.18$ lb
$N_C = 141$ lb
**5-58.** $P_{\text{máx}} = 210$ lb
$N_A = 262$ lb
$N_C = 143$ lb
**5-59.** $\alpha = 10.4°$
**5-61.** $95.35 \text{ sen } 45°(300) - F(400) = 0$
$F = 50.6$ N
$A_x = 108$ N
$A_y = 48.8$ N
**5-62.** $a = \sqrt{(4 r^2 l)^{\frac{2}{3}} - 4 r^2}$
**5-63.** $N_C = 289$ N
$N_A = 213$ N
$N_B = 332$ N
**5-65.** $T_{CD}(2) - 6(1) = 0$
$T_{CD} = 3$ kN
$T_{EF} = 2.25$ kN
$T_{AB} = 0.75$ kN
**5-66.** $y = 0.667$ m, $x = 0.667$ m
**5-67.** $R_D = 22.6$ kip
$R_E = 22.6$ kip
$R_F = 13.7$ kip
**5-69.** $C_y = 450$ N
$C_z(0.9 + 0.9) - 900(0.9) + 600(0.6) = 0$
$C_z = 250$ N
$B_z = 1.125$ kN
$A_z = 125$ N
$B_x = 25$ N
$A_x + 25 - 500 = 0$
$A_x = 475$ N
**5-70.** $T_{BD} = T_{CD} = 117$ N
$A_x = 66.7$ N
$A_y = 0$
$A_z = 100$ N
**5-71.** $F_{DC} = 375$ lb
$E_x = 0$
$E_z = 562.5$ lb
$A_x = 0$
$A_y = 0$
$A_z = 62.5$ lb
**5-73.** $N_B(3) - 200(3) - 200(3 \text{ sen } 60°) = 0$
$N_B = 373$ N
$A_z = 333$ N
$T_{CD} + 373.21 + 333.33 - 350 - 200 - 200 = 0$
$T_{CD} = 43.5$ N
$A_x = 0$
$A_y = 0$
**5-74.** $F_{CD} = 0$
$F_{EF} = 100$ lb
$F_{BD} = 150$ lb
$A_x = 0$

$A_y = 0$
$A_z = 100$ lb

**5-75.** $F = 900$ lb
$A_x = 0$
$A_y = 0$
$A_z = 600$ lb
$M_{Ax} = 0$
$M_{Az} = 0$

**5-77.** $T_{EF}(L) - W\left(\frac{L}{2}\right) - 0.75W\left(\frac{L}{2} - d\cos 45°\right) = 0$
$d = 0.550L$
$T_{EF} = 0.583W$

**5-78.** $T_{AB} = 1.14W$
$T_{EF} = 0.570W$
$T_{CD} = 0.0398W$

**5-79.** $T_B = 16.7$ kN
$A_x = 0$
$A_y = 5.00$ kN
$A_z = 16.7$ kN

**5-81.** $A_x + \left(\frac{3}{\sqrt{54}}\right)F_{CB} = 0$
$-55(3) + \left(\frac{6}{\sqrt{54}}\right)F_{CB}(3) = 0$
$F_{CB} = 67.4$ lb
$A_x = -27.5$ lb
$A_y = -27.5$ lb
$A_z = 0$
$M_{Ay} = 165$ lb · pie
$M_{Az} = 0$

**5-82.** $F_{BC} = 175$ lb
$A_x = 130$ lb
$A_y = -10$ lb
$M_{Ax} = -300$ lb · pie
$M_{Ay} = 0$
$M_{Az} = -720$ lb · pie

**5-83.** $F_{BC} = 105$ lb

**5-85.** $\Sigma M_{AB} = 0; T_C(r + r\cos 60°) - W(r\cos 60°) - P(d + r\cos 60°) = 0$
$d = \frac{r}{2}\left(1 + \frac{W}{P}\right)$

**5-86.** $d = \frac{r}{2}$

**5-87.** $P = 0.5\,W$

**5-89.** $600(6) + 600(4) + 600(2) - N_B\cos 45°(2) = 0$
$N_B = 5.09$ kN
$A_x = 3.60$ kN
$A_y = 1.80$ kN

**5-90.** $F = 354$ N

**5-91.** $N_A = 8.00$ kN
$B_x = 5.20$ kN
$B_y = 5.00$ kN

**5-93.** $5(14) + 7(6) + 0.5(6) - 2(6) - A_y(14) = 0$
$A_y = 7.36$ kip
$B_x = 0.5$ kip
$B_y = 16.6$ kip

**5-94.** $T = 1.01$ kN
$D_y = -507.66$ N
$F_D = 982$ N

**5-95.** $P = 100$ lb
$B_z = 40$ lb
$B_x = -35.7$ lb
$A_x = 136$ lb
$B_y = 0$
$A_z = 40$ lb

## Capítulo 6

**6-1.** Nodo $D$: $600 - F_{DC}\operatorname{sen} 26.57° = 0$
$F_{DC} = 1.34$ kN (C)
$F_{DE} = 1.20$ kN (T)
Nodo $C$: $-F_{CE}\cos 26.57° = 0$
$F_{CE} = 0$
$F_{CB} = 1.34$ kN (C)
Nodo $E$: $900 - F_{EB}\operatorname{sen} 45° = 0$
$F_{EB} = 1.27$ kN (C)
$F_{EA} = 2.10$ kN (T)

**6-2.** $F_{AD} = 849$ lb (C)
$F_{AB} = 600$ lb (T)
$F_{BD} = 400$ lb (C)
$F_{BC} = 600$ lb (T)
$F_{DC} = 1.41$ kip (T)
$F_{DE} = 1.60$ kip (C)

**6-3.** $F_{AD} = 1.13$ kip (C)
$F_{AB} = 800$ lb (T)
$F_{BD} = 0$
$F_{BC} = 800$ lb (T)
$F_{DC} = 1.13$ kip (T)
$F_{DE} = 1.60$ kip (C)

**6-5.** Nodo $A$: $F_{AE}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 166.22 = 0$
$F_{AE} = 372$ N (C)
$F_{AB} = 332$ N (T)
Nodo $B$: $F_{BC} - 332.45 = 0$ $\quad F_{BC} = 332$ N (T)
$F_{BE} = 196$ N (C)
Nodo $E$: $F_{EC}\cos 36.87°$
$- (196.2 + 302.47)\cos 26.57° = 0$

$F_{EC} = 558$ N (T)
$F_{ED} = 929$ N (C)
$F_{DC} = 582$ N (T)

**6-6.** $F_{CB} = 3.00$ kN (T)
$F_{CD} = 2.60$ kN (C)
$F_{DE} = 2.60$ kN (C)
$F_{DB} = 2.00$ kN (T)
$F_{BE} = 2.00$ kN (C)
$F_{BA} = 5.00$ kN (T)

**6-7.** $F_{CB} = 8.00$ kN (T)
$F_{CD} = 6.93$ kN (C)
$F_{DE} = 6.93$ kN (C)
$F_{DB} = 4.00$ kN (T)
$F_{BE} = 4.00$ kN (C)
$F_{BA} = 12.0$ kN (T)

**6-9.** Nodo $A$: $F_{AF}$ sen $45° - P = 0$
Nodo $F$: $F_{FB}$ cos $45° - 1.4142\,P$ cos $45° = 0$
Nodo $E$: $F_{ED} - 2P = 0$
Nodo $B$: $F_{BD}$ sen $45° - 1.4142\,P$ sen $45° = 0$
Nodo $C$: $3P - N_C = 0$
$2P = 800$ lb   $P = 400$ lb
$3P = 600$ lb   $P = 200$ lb (controla)

**6-10.** $F_{BG} = F_{CG} = F_{AG} = F_{DF} = F_{CF} = F_{EF} = 0$
$F_{AB} = F_{DE} = 667$ lb (C)
$F_{BC} = F_{CD} = 667$ lb (C)

**6-11.** $F_{BG} = F_{GC} = F_{GA} = 0$
$F_{DF} = 400$ lb (C)
$F_{FC} = F_{FE} = 333$ lb (T)
$F_{BC} = F_{BA} = 708$ lb (C)
$F_{DC} = F_{DE} = 825$ lb (C)

**6-13.** Nodo $A$: $F_{AC}$ sen $\theta = 0$
Nodo $D$: $2.60\,P_2$ cos $22.62° - F_{DC} = 0$
Nodo $B$: $F_{BC} - 2.60\,P_2$ sen $22.62° = 0$
$P_2 = 135$ lb

**6-14.** $F_{BG} = 0$
$F_{BC} = 2450$ lb (C)
$F_{CG} = 1768$ lb (T)
$F_{CD} = 1250$ lb (C)
$F_{GD} = 1768$ lb (C)
$F_{GF} = 2500$ lb (T)
$F_{AE} = 2450$ lb (C)
$F_{AF} = 0$
$F_{ED} = 1250$ lb (C)
$F_{EF} = 1768$ lb (T)
$F_{FD} = 1768$ lb (C)

**6-15.** $P = 2000$ lb

**6-17.** Nodo $A$: $0.8333P$ cos $73.74° + P$ cos $53.13°$
$- F_{AB} = 0$
Nodo $B$: $0.8333P\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right) = 0$
Nodo $D$: $F_{DE} - 0.8333P - P$ cos $53.13°$
$- 0.8333P$ cos $73.74° = 0$
$P = 1.50$ kN (controla)

**6-18.** $F_{FA} = 1500$ lb (C)
$F_{FE} = 1200$ lb (T)
$F_{ED} = 1200$ lb (T)
$F_{EA} = 0$
$F_{AD} = 1250$ lb (C)
$F_{AB} = 200$ lb (C)
$F_{BC} = 200$ lb (C)
$F_{BD} = 0$
$F_{DC} = 250$ lb (T)

**6-19.** $F_{FA} = 75$ lb (C)
$F_{ED} = 60$ lb (T)
$F_{FE} = 60$ lb (T)
$F_{EA} = 55$ lb (C)
$F_{AD} = 154$ lb (C)
$F_{AB} = 63.3$ lb (T)
$F_{BC} = 63.3$ lb (T)
$F_{BD} = 55$ lb (T)
$F_{DC} = 79.2$ lb (C)

**6-21.** Nodo $D$: $F_{DC}$ sen $45° + F_{DE}$ cos $30.25° - W = 0$
Nodo $A$: $F_{AG} - 1.414\,W$ sen $45° = 0$
$m = 1.80$ Mg

**6-22.** $F_{CD} = 778$ N (C)
$F_{CB} = 550$ N (T)
$F_{DB} = 70.7$ N (C)
$F_{DE} = 500$ N (C)
$F_{EA} = 636$ N (C)
$F_{EB} = 70.7$ N (T)
$F_{BA} = 450$ N (T)

**6-23.** $F_{CD} = 286$ N (C)
$F_{CB} = 202$ N (T)
$F_{DB} = 118$ N (T)
$F_{DE} = 286$ N (C)
$F_{BE} = 118$ N (T)
$F_{BA} = 202$ N (T)
$F_{EA} = 286$ N (C)

**6-25.** Nodo $A$: $1.4142\,P$ cos $45° - F_{AB} = 0$
Nodo $D$: $F_{DC} - 1.4142\,P$ cos $45° = 0$
Nodo $F$: $F_{FE} - 1.4142\,P$ sen $45° = 0$
Nodo $E$: $1.4142\,P$ sen $45° - P - F_{EB}$ sen $45° = 0$

Nodo $C$: $F_{CB} = P$ (C)
$P = 1$ kN (controla)
$1.4142\, P = 1.5$
$P = 1.06$ kN

**6-26.** $F_{CD} = 780$ lb (C)
$F_{CB} = 720$ lb (T)
$F_{DB} = 0$
$F_{DE} = 780$ lb (C)
$F_{BE} = 297$ lb (T)
$F_{BA} = 722$ lb (T)

**6-27.** $F_{FE} = 0.667P$ (T)
$F_{FD} = 1.67P$ (T)
$F_{AB} = 0.471P$ (C)
$F_{AE} = 1.67P$ (T)
$F_{AC} = 1.49P$ (C)
$F_{BF} = 1.41P$ (T)
$F_{BD} = 1.49P$ (C)
$F_{EC} = 1.41P$ (T)
$F_{CD} = 0.471P$ (C)

**6-29.** Nodo $A$: $F_{AF} - 2.404P\left(\frac{1.5}{\sqrt{3.25}}\right) = 0$
Nodo $B$: $2.404P\left(\frac{1.5}{\sqrt{3.25}}\right) - P$
$- F_{BF}\left(\frac{0.5}{\sqrt{1.25}}\right) - F_{BD}\left(\frac{0.5}{\sqrt{1.25}}\right) = 0$
Nodo $F$: $F_{FD} + 2\left[1.863P\left(\frac{0.5}{\sqrt{1.25}}\right)\right]$
$- 2.00P = 0$
$P = 1.25$ kN

**6-30.** $127° \leq \theta \leq 196°$
$336° \leq \theta \leq 347°$

**6-31.** $F_{BH} = 255$ lb (T)
$F_{BC} = 130$ lb (T)
$F_{HC} = 180$ lb (C)

**6-33.** $A_y = 65.0$ kN
$A_x = 0$
$F_{BC}(4) + 20(4) + 30(8) - 65.0(8) = 0$
$F_{BC} = 50.0$ kN (T)
$F_{HI} = 35.0$ kN (C)
$F_{HB} = 21.2$ kN (C)

**6-34.** $F_{JK} = 11.1$ kN (C)
$F_{CD} = 12$ kN (T)
$F_{CJ} = 1.60$ kN (C)

**6-35.** $F_{EF} = 12.9$ kN (T)
$F_{FI} = 7.21$ kN (T)
$F_{HI} = 21.1$ kN (C)

**6-37.** $E_y = 7.333$ kN
$7.333\,(4.5) - 8\,(1.5) - F_{FG}(3 \text{ sen } 60°) = 0$
$F_{FG} = 8.08$ kN (T)
$F_{CD} = 8.47$ kN (C)
$F_{CF} = 0.770$ kN (T)

**6-38.** $F_{HI} = 42.5$ kN (T)
$F_{HC} = 100$ kN (T)
$F_{DC} = 125$ kN (C)

**6-39.** $F_{GH} = 76.7$ kN (T)
$F_{ED} = 100$ kN (C)
$F_{EH} = 29.2$ kN (T)

**6-41.** $A_y = 240$ lb
$A_x = 100$ lb
$240(8) - F_{BC}\cos 14.04°(4) = 0$
$F_{BC} = 495$ lb (T)
$F_{HG} = 420$ lb (C)
$F_{BG} = 200$ lb (C)

**6-42.** $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $HI$ y $GI$ son todos elementos de fuerza cero.
$F_{IC} = 5.62$ kN (C)
$F_{CG} = 9.00$ kN (T)

**6-43.** $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $HI$ y $GI$ son todos elementos de fuerza cero.
$F_{JE} = 9.38$ kN (C)
$F_{GF} = 5.625$ kN (T)

**6-45.** $N_A = 1300$ lb
$F_{KL}(8) + 1000(8) - 900(8) - 1300(24) = 0$
$F_{KL} = 3800$ lb (C)
$F_{CD} = 2600$ lb (T)
$F_{LD} = 424$ lb (T)

**6-46.** $F_{BC} = 3.25$ kN (C)
$F_{CH} = 1.92$ kN (T)

**6-47.** $F_{CD} = 1.92$ kN (C)
$F_{GF} = 1.53$ kN (T)
$F_{FD} = F_{FC} = 0$

**6-49.** $A_x = 0$
$A_y = 15.5$ kN
$F_{KJ} \text{ sen } 33.69°(4) + 5(2) + 3(4) - 15.5(4) = 0$
$F_{KJ} = 18.0$ kN (C)
$F_{KC} = 7.50$ kN (C)
$F_{BC} = 15$ kN (T)

**6-50.** $F_{AB} = 21.9$ kN (C), $F_{AG} = 13.1$ kN (T),
$F_{BC} = 13.1$ kN (C), $F_{BG} = 17.5$ kN (T),
$F_{CG} = 3.12$ kN (T), $F_{FG} = 11.2$ kN (T),
$F_{CF} = 3.12$ kN (C), $F_{CD} = 9.38$ kN (C),
$F_{DE} = 15.6$ kN (C), $F_{DF} = 12.5$ kN (T),
$F_{EF} = 9.38$ kN (T)

**6-51.** $F_{AB} = 43.8$ kN (C), $F_{AG} = 26.2$ kN (T)
$F_{BC} = 26.2$ kN (C), $F_{BG} = 35.0$ kN (T)
$F_{GC} = 6.25$ kN (T), $F_{GF} = 22.5$ kN (T)
$F_{ED} = 31.2$ kN (C), $F_{EF} = 18.8$ kN (T)
$F_{DC} = 18.8$ kN (C), $F_{DF} = 25.0$ kN (T)
$F_{FC} = 6.25$ kN (C)

**6-53.** $G_y = 1.60$ kip
$1.60(40) - F_{JI}(30) = 0$
$F_{JI} = 2.13$ kip (C)
$F_{DE} = 2.13$ kip (T)

**6-54.** $F_{CA} = 833$ lb (T)
$F_{CB} = 667$ lb (C)
$F_{CD} = 333$ lb (T)
$F_{AD} = F_{AB} = 354$ lb (C)
$F_{DB} = 50$ lb (T)

**6-55.** $F_{CA} = 1000$ lb (C)
$F_{CD} = 406$ lb (T)
$F_{CB} = 344$ lb (C)
$F_{AB} = F_{AD} = 424$ lb (T)
$F_{DB} = 544$ lb (C)

**6-57.** Nodo $D$: $-\frac{1}{3}F_{AD} + \frac{5}{\sqrt{31.25}}F_{BD}$
$+ \frac{1}{\sqrt{7.25}}F_{CD} - 200 = 0$
$F_{AD} = 343$ N (T)
$F_{BD} = 186$ N (T)
$F_{CD} = 397$ N (C)
Nodo $C$: $F_{BC} - \frac{1}{\sqrt{7.25}}(397.5) = 0$
$F_{BC} = 148$ N (T)
$F_{AC} = 221$ N (T)
$F_{EC} = 295$ N (C)

**6-58.** $F_{BC} = 1.15$ kN (C)
$F_{DF} = 4.16$ kN (C)
$F_{BE} = 4.16$ kN (T)

**6-59.** $F_{CF} = 0$
$F_{CD} = 2.31$ kN (T)
$F_{ED} = 3.46$ kN (T)
$F_{AB} = 3.46$ kN (C)

**6-61.** $D_x = 100$ lb
$C_y = 650$ lb
$E_x = 550$ lb
$F_x = 150$ lb
$F_y = 650$ lb
$F_z = 700$ lb
Nodo $C$: $F_{CB} = 0$
$F_{CD} = 650$ lb (C)
$F_{CF} = 0$
Nodo $F$: $F_{BF} = 225$ lb (T)
$F_{DF} = 1230$ lb (T)
$F_{EF} = 525$ lb (C)

**6-62.** $F_{AE} = F_{AC} = 220$ N (T)
$F_{AB} = 583$ N (C)
$F_{BD} = 707$ N (C)
$F_{BE} = F_{BC} = 141$ N (T)

**6-63.** $F = 170$ N

**6-65.** Nodo $F$: $F_{FG}$, $F_{FD}$ y $F_{FC}$ descansan en el mismo plano.
$F_{FE}\cos\theta = 0 \quad F_{FE} = 0$
Nodo $E$: $F_{EG}$, $F_{EC}$ y $F_{EB}$ descansan en el mismo plano.
$F_{ED}\cos\theta = 0 \quad F_{ED} = 0$

**6-66.** $F_{GD} = 157$ lb (T)
$F_{GE} = 505$ lb (C)
$F_{FD} = 0$

**6-67.** $P = 12.5$ lb

**6-69.** Aplique la ecuación de equilibrio de fuerzas a lo largo del eje $y$ de cada polea.
$2P + 2R + 2T - 50(9.81) = 0$
$P = 18.9$ N

**6-70.** $P = 5$ lb

**6-71.** $P = 25.0$ lb
$F_A = P = 25.0$ lb $\quad F_B = 60.0$ lb

**6-73.** $N_B(0.8) - 900 = 0$
$N_B = 1125$ N
$A_x = 795$ N
$A_y = 795$ N
$C_x = 795$ N
$C_y = 1.30$ kN
$M_C = 1.25$ kN·m

**6-74.** $A_y = 60$ lb
$C_y = 161$ lb
$C_x = 90$ lb
$A_x = 161$ lb

**6-75.** $C_y = 5.00$ kN
$B_y = 15.0$ kN
$M_A = 30.0$ kN·m
$A_y = 5.00$ kN
$A_x = 0$

**6-77.** $C_x = 100$ lb $\quad B_y = 449$ lb
$C_y = 273.6$ lb $\quad A_x = 92.3$ lb

$A_y = 186$ lb
$M_A = 359$ lb · pie

**6-78.** $A_y = 300$ N
$A_x = 300$ N
$C_x = 300$ N
$C_y = 300$ N

**6-79.** $N_D = 333$ N
$A_x = 333$ N
$A_y = 100$ N

**6-81.** Segmento $BD$: $B_y = 30$ kip
$D_x = 0$
$D_y = 30$ kip
Segmento $ABC$: $C_y = 135$ kip
$A_x = 0$
$A_y = 75$ kip
Segmento $DEF$: $F_y = 135$ kip
$E_x = 0$
$E_y = 75$ kip

**6-82.** $N_C = 12.7$ kN
$A_x = 12.7$ kN
$A_y = 2.94$ kN
$N_D = 1.05$ kN

**6-83.** $A_x = 167$ N
$A_y = 1.17$ kN
$C_x = 1.33$ kN
$C_y = 833$ N

**6-85.** Elemento $AB$, $F_{BG} = 264.9$ N
Elemento $EFG$, $F_{ED} = 158.9$ N
Elemento $CDI$, $m_s = 1.71$ kg

**6-86.** $m_L = 106$ kg

**6-87.** $F_{FB} = 1.94$ kN
$F_{BD} = 2.60$ kN

**6-89.** Elemento $AB$: $F_{BD} = 162.4$ lb
$B_x = 97.4$ lb
$B_y = 130$ lb
$A_x = 52.6$ lb
$A_y = 130$ lb

**6-90.** $E_x = 945$ lb
$E_y = 500$ lb
$D_x = 945$ lb
$D_y = 1000$ lb

**6-91.** $N_A = 4.60$ kN
$C_y = 7.05$ kN
$N_B = 7.05$ kN

**6-93.** Polea $E$: $T = 350$ lb
Elemento $ABC$: $A_y = 700$ lb
Elemento $DB$: $D_x = 1.82$ kip
$D_y = 1.84$ kip
$A_x = 2.00$ kip

**6-94.** $W_s = 3.35$ lb

**6-95.** $F = 562.5$ N

**6-97.** $80 - N_G \cos 36.03° - N_C \cos 36.03° = 0$
$N_B - N_C = 49.5$ N

**6-98.** $M = 2.43$ kN · m

**6-99.** $F = 5.07$ kN

**6-101.** Elemento $ABC$
$A_y = 245$ N
Elemento $CD$
$D_y = 245$ N
$D_x = 695$ N
$A_x = 695$ N

**6-102.** $F_{CD} = 1.01$ kN
$F_{ABC} = 319$ N

**6-103.** $A_y = 183$ N
$E_x = 0$
$E_y = 417$ N
$M_E = 500$ N · m

**6-105.** Elemento $BC$
$C_y = 1.33$ kN
$B_y = 549$ N
Elemento $ACD$
$C_x = 2.98$ kN
$A_y = 235$ N
$A_x = 2.98$ kN
$B_x = 2.98$ kN

**6-106.** $F_{AC} = 2.51$ kip
$F_{AB} = 3.08$ kip
$F_{AD} = 3.43$ kip

**6-107.** $F = 175$ lb
$N_C = 350$ lb
$F = 87.5$ lb
$N_C = 87.5$ lb

**6-109.** Tenaza
$C_x = 1175$ N
Mango
$F = 370$ N
$F_{BE} = 2719.69$ N

**6-110.** $N_A = 284$ N

**6-111.** $W_C = 0.812W$

**6-113.** $\Sigma M_E = 0; \quad W(x) - N_B\left(3b + \frac{3}{4}c\right) = 0$

$\Sigma M_A = 0; \quad F_{CD}(c) - \dfrac{Wx}{\left(3b + \frac{3}{4}c\right)}\left(\frac{1}{4}c\right) = 0$

$\frac{Wx}{12b + 3c}(4b) + W\left(1 - \dfrac{x}{3b + \frac{3}{4}c}\right)(b) - W_1(a) = 0$

$W_1 = \frac{b}{a}W$

**6-114.** $F_{IJ} = 9.06$ kN (T)
$F_{BC} = 15.4$ kN (C)

**6-115.** $N_E = 187$ N

**6-117.** $l_{AB} = 861.21$ mm, $L_{CAB} = 76.41°$,
$F_{AB} = 9.23$ kN
$C_x = 2.17$ kN
$C_y = 7.01$ kN
$D_x = 0$
$D_y = 1.96$ kN
$M_D = 2.66$ kN·m

**6-118.** $A_x = 120$ lb
$A_y = 0$
$N_C = 15.0$ lb

**6-119.** $A_x = 80$ lb
$A_y = 80$ lb
$B_y = 133$ lb
$B_x = 333$ lb
$C_x = 413$ lb
$C_y = 53.3$ lb

**6-121.** $N_c = \frac{4P \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \phi}$
$M = \frac{4PL \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \phi}[\cos(\phi - \theta)]$

**6-122.** $W_1 = 3$ lb
$W_2 = 21$ lb
$W_3 = 75$ lb

**6-123.** $P = 283$ N
$B_x = D_x = 42.5$ N
$B_y = D_y = 283$ N
$B_z = D_z = 283$ N

**6-125.** $-\frac{6}{9} F_{DE}(3) + 180(3) = 0$
$F_{DE} = 270$ lb
$B_z + \frac{6}{9}(270) - 180 = 0$
$B_z = 0$
$B_x = -30$ lb
$B_y = -13.3$ lb

**6-126.** $A_z = 0$
$A_x = 172$ N
$A_y = 115$ N
$C_x = 47.3$ N
$C_y = 61.9$ N
$C_z = 125$ N
$M_{Cy} = -429$ N · m
$M_{Cz} = 0$

**6-127.** $F_B = 133$ lb

**6-129.** $F_{DB} = F_{BE} = 0$
Nodo $C$: $F_{CB} = 17.9$ kN (C)
$F_{CD} = 8.00$ kN (T)
Nodo $D$: $F_{DE} = 8.00$ kN (T)
Nodo $B$: $F_{BA} = 17.9$ kN (C)
Nodo $A$: $F_{AE} = 8.00$ kN (T)

**6-130.** $F_{BF} = 0$
$F_{BC} = 0$
$F_{BE} = 500$ lb (T)
$F_{AB} = 300$ lb (C)
$F_{AC} = 583$ lb (T)
$F_{AD} = 333$ lb (T)
$F_{AE} = 667$ lb (C)
$F_{DE} = 0$
$F_{EF} = 300$ lb (C)
$F_{CD} = 300$ lb (C)
$F_{CF} = 300$ lb (C)
$F_{DF} = 424$ lb (T)

**6-131.** $F_{BF} = 0$
$F_{BC} = 0$
$F_{BE} = 500$ lb (T)
$F_{AB} = 300$ lb (C)
$F_{AC} = 972$ lb (T)
$F_{AD} = 0$
$F_{AE} = 367$ lb (C)
$F_{DE} = 0$
$F_{EF} = 300$ lb (C)
$F_{CD} = 500$ lb (C)
$F_{CF} = 300$ lb (C)
$F_{DF} = 424$ lb (T)

**6-133.** Elemento $AC$: $C_x = 402.6$ N
$C_y = 97.4$ N
Elemento $AC$: $A_x = 117$ N
$A_y = 397$ N
Elemento $CB$: $B_x = 97.4$ N
$B_y = 97.4$ N

**6-134.** $P = \frac{kL}{2 \tan \theta \operatorname{sen} \theta}(2 - \csc \theta)$

**6-135.** $A_x = 8.31$ kip
$A_y = 0.308$ kip
$E_x = 8.31$ kip
$E_y = 5.69$ kip

## Capítulo 7

**7-1.** $B_y = 1.00$ kip
$A_y = 7.00$ kip
$A_x = 0$
$N_C = 0$
$V_C = -1.00$ kip
$M_C = 56.0$ kip · pie
$N_D = 0$
$V_D = -1.00$ kip
$M_D = 48.0$ kip · pie

**7-2.** $N_C = 0$
$V_C = -386$ lb
$M_C = -857$ lb · pie
$N_D = 0$
$V_D = 300$ lb
$M_D = -600$ lb · pie

**7-3.** $N_C = -1804$ lb
$V_C = -125$ lb
$M_C = 9750$ lb · pie

**7-5.** $A_x = 400$ N
$A_y = 96$ N
$N_C = 400$ N
$V_C = -96$ N
$M_C = -144$ N · m

**7-6.** $N_C = 0$
$V_C = -1$ kN
$M_C = 9$ kN · m

**7-7.** $N_C = 0$
$V_C = \dfrac{3w_0L}{8}$
$M_C = -\frac{5}{48}w_0L^2$

**7-9.** $N_C + 80 = 0$
$N_C = -80$ lb
$V_C = 0$
$M_C + 80(6) = 0$
$M_C = -480$ lb · pulg

**7-10.** $N_C = 0$
$V_C = 0$
$M_C = 1.5$ kN · m

**7-11.** $N_C = 0$
$V_C = 3.25$ kN
$M_C = 9.375$ kN · m
$N_D = 0$
$V_D = 1$ kN
$M_D = 13.5$ kN · m

**7-13.** Elemento $AB$: $B_y = 500$ N
Elemento $BC$: $B_x = 1258.33$ N
$N_D = 1.26$ kN
$V_D = 0$
$M_D = 500$ N · m

**7-14.** $N_E = -1.48$ kN
$V_E = 500$ N
$M_E = 1000$ N · m

**7-15.** $N_D = 0$
$V_D = 800$ lb
$M_D = -1.60$ kip · pie
$N_C = 0$
$V_C = 0$
$M_C = 800$ lb · pie

**7-17.** $A_y = \frac{w}{6b}(2a + b)(b - a)$
$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

**7-18.** $N_D = 4$ kN
$V_D = -9$ kN
$M_D = -18$ kN · m
$N_E = 4$ kN
$V_E = 3.75$ kN
$M_E = -4.875$ kN · m

**7-19.** $a = \frac{2}{3}L$

**7-21.** $D_x = 0$
$F_{BC} = 560$ lb
$D_y = 540$ lb
$E_y = 580$ lb
$A_x = 0$
$A_y = 520$ lb
$N_F = 0$
$V_F = 20$ lb
$M_F = 1040$ lb · pie
$N_G = 0$
$V_G = -580$ lb
$M_G = 1160$ lb · pie

**7-22.** $N_D = 0$
$V_D = -10.6$ kN
$M_D = 42.5$ kN · m

**7-23.** $N_D = 0$
$V_D = 26.0$ N
$M_D = 19.0$ N · m
$V_E = 0$
$N_E = 86.0$ N
$M_E = 0$

**7-25.** Utilice el segmento superior del bastidor.
$N_D = 200$ lb
$V_D = 0$
$M_D = 900$ lb · pie
$N_E = 360$ lb
$V_E = 120$ lb
$M_E = 1140$ lb · pie

**7-26.** $N_C = -\frac{wL}{2} \csc \theta$
$V_C = 0$
$M_C = \frac{wL^2}{8} \cos \theta$

**7-27.** $N_C = -1.91$ kN
$V_C = 0$
$M_C = 382$ N · m

**7-29.** Reacción de la viga
$R = 700$ lb
$M_C = -17.8$ kip · pie

**7-30.** $N_C = 1.75$ kip
$V_C = -844$ lb
$M_C = -844$ lb · pie

**7-31.** $N_D = 844$ lb
$V_D = 1.06$ kip
$M_D = 1.06$ kip · pie

**7-33.** $B_x = 29.39$ N
$B_y = 37.5$ N
$N_D = -29.4$ N
$V_D = 37.5$ N
$M_D = 8.89$ N · m

**7-34.** $(N_C)_y = 0$
$(V_C)_x = 104$ lb
$(V_C)_z = 10.0$ lb
$(M_C)_x = 20.0$ lb · pie
$(M_C)_y = 72.0$ lb · pie
$(M_C)_z = -178$ lb · pie

**7-35.** $(N_C)_y = -350$ lb
$(V_C)_x = -150$ lb
$(V_C)_z = 700$ lb
$(M_C)_x = 1.40$ kip · pie
$(M_C)_y = -1.20$ kip · pie
$(M_C)_z = -750$ lb · pie

**7-37.** $B_z = 550$ N
$B_x = 900$ N
$(N_C)_y = 0$
$(V_C)_x = 450$ N
$(V_C)_z = -550$ N
$(M_C)_x = -825$ N · m
$T_C = 30$ N · m
$(M_C)_z = 675$ N · m

**7-38.** $(V_D)_x = 116$ kN
$(N_D)_y = -65.6$ kN
$(V_D)_x = 0$
$(M_D)_x = 49.2$ kN · m
$(M_D)_y = 87.0$ kN · m
$(M_D)_z = 26.2$ kN · m

**7-39.** $(N_E)_x = 0$
$(V_E)_y = 53.6$ kN
$(V_E)_z = -87.0$ kN
$(M_E)_x = 0$
$(M_E)_y = -43.5$ kN · m
$(M_E)_z = -26.8$ kN · m

**7-41.** $0 \leq x < 4$ m
$V = 3$kN
$M = \{3x\}$ kN · m
4 m $< x \leq 6$ m
$V = -6$kN
$M = \{36 - 6x\}$ kN · m
$M|_{x=4} = 12$ kN · m

**7-42.** $x = 8^+, V = -833, M = 1333$
$x = 12^+, V = -333, M = 0$

**7-43.** $x = 0, V = 4$ kN
$M = -10$ kN · m

**7-45.** Para $V_{\text{máx}} = M_0/L$, $M_0 = 45$ kN · m
Para $M_{\text{máx}} = M_0/2$, $M_0 = 44$ kN · m
$M_0 = 44$ kN m·

**7-46.** $x = \left(\frac{3}{8}\right)L$
$M = \frac{9}{128} w_0 L^2$
$x = L/2$
$M = \dfrac{w_0 L^2}{16}$

**7-47.** $x = 1.75$ m
$M = 759$ N · m

**7-49.** $0 \leq x < 5$ m
$V = 2.5 - 2x$
$M = 2.5x - x^2$
5 m $< x < 10$ m
$V = -7.5$
$M = -7.5x + 75$

**7-50.** $V = 250(10 - x)$
$M = 25(100x - 5x^2 - 6)$

**7-51.** $x = 1.732$ m
$M_{\text{máx}} = 0.866$ kN · m

**7-53.** $0 \leq x < 9$ pies
$V = 25 - 1.667x^2$
$V = 0$ en $x = 3.87$ pies

$M = 25x - 0.5556x^3$
$M_{máx} = 64.5$ lb · pie
9 pies $< x <$ 13.5 pies
$V = 0$
$M = -180$

**7-54.** $w = 22.2$ lb/pie

**7-55.** $V = \left\{48.0 - \frac{x^2}{6}\right\}$ kip
$M = \left\{48.0x - \frac{x^3}{18} - 576\right\}$ kip · pie
$V = \left\{\frac{1}{6}(24 - x)^2\right\}$ kip
$M = \left\{-\frac{1}{18}(24 - x)^3\right\}$ kip · pie

**7-57.** $0 \leq x < 3$ m
$V = \left\{-\frac{2}{3}x^2 - 4\right\}$ kN
$M = \left\{-\frac{2}{9}x^3 - 4x\right\}$ kN · m
3 m $< x \leq$ 6 m
$V = \{24 - 4x\}$ kN
$M = \{-2(6 - x)^2\}$ kN · m
$V|_{x=3\text{ m}-} = -10$ kN
$V|_{x=3\text{ m}+} = 12$ kN
$M|_{x=3\text{ m}} = -18$ kN · m

**7-58.** $w_0 = 21.8$ lb/pie

**7-59.** $w_0 = 8.52$ kN/m

**7-61.** $V = \{3000 - 500x\}$ lb
$M = \{3000x - 250x^2 - 6750\}$ lb · pie
$x = 6$ pies
$M|_{x=7.5\text{ pies}} = 2250$ lb · pie

**7-62.** $V = \dfrac{\pi\gamma r_0^2}{3L^2}\left[(L + x)^3 - L^3\right]$
$M = -\dfrac{\pi\gamma r_0^2}{12L^2}\left[(L + x)^4 - L^3(4x + L)\right]$

**7-63.** $V_x = 0$
$V_z = \{24.0 - 4y\}$ lb
$M_x = \{2y^2 - 24y + 64.0\}$ lb · pie
$M_y = 8.00$ lb · pie
$M_z = 0$

**7-65.** $x = 2^-, V = 675, M = 1350$
$x = 4^-_+, V = 275, M = 1900$
$x = 6, V = -625, M = 1250$

**7-66.** $x = 2^+, V = 5, M = -10$
$x = 6^-, V = -5, \text{M} = -10$

**7-67.** $x = 2^+, V = -14.5, M = 7$
$x = 4^+, V = 6, M = -22$

**7-69.** $x = 2^-, V = 7.5, M = 15$
$x = 4^+, V = -12.5, M = 10$

**7-70.** $x = \left(\frac{L}{3}\right)^+, V = -P, M = PL$
$x = \left(2\frac{L}{3}\right)^+, V = -2P, M = \left(\frac{2}{3}\right) PL$

**7-71.** $x = 0.2^+, V = 96.7, M = -31$

**7-73.** $x = 0, V = 1.76, M = 0$
$x = 0.8^-, V = 0.16, M = 0.708$
$x = 1, V = -3.84, M = 0$

**7-74.** $x = 1^+, V = -9.17, M = -1.17$
$x = 3^+, V = 15, M = -7.50$

**7-75.** $x = 1.5^-, V = 250, M = 712.5$

**7-77.** $x = 1^+, V = 175, M = -200$
$x = 5^-, V = -225, M = -300$

**7-78.** $x = 8^-, V = 1017, M = -1267$
$x = 14.1, V = 0, M = 334$

**7-79.** $x = 6, V = -900, M = -3000$

**7-81.** $x = 0, V = 5.12, M = 0$
$x = 9^-, V = 0.625, M = 25.9$
$x = 9^+, V = -1.375, M = 25.9$
$x = 18, V = -3.625, M = 0$

**7-82.** $x = L^-, V = \frac{-2wL}{3}, M = -\frac{wL^2}{6}$

**7-83.** $x = 3, V = -12, M = 12$

**7-85.** $V_{máx} = 4w$
$w = 2$ kip/pie
$M_{máx} = -6w$
$w = 5$ kip/pie
Utilice $w = 2$ kip/pie
$x = 6^+, V = 4\,w, M = -120$ m

**7-86.** $x = 3^+, V = 11.5, M = -21$
$x = 6, V = 2.5, M = 0$

**7-87.** $x = 300, V = 722, M = 277$
$x = 900, V = -487, M = 350$

**7-89.** Todo el cable
$T_{BD} = 78.2$ lb
Nodo $A$: $T_{AC} = 74.7$ lb
Nodo $D$: $T_{CD} = 43.7$ lb
$L = 15.7$ pies

**7-90.** $P = 72.0$ lb

**7-91.** $x_B = 3.98$ pies

**7-93.** $y_B = 3.53$ m
$T_{AB} = 6.05$ kN
$T_{BC} = 4.53$ kN
$T_{CD} = 4.60$ kN
$T_{máx} = T_{DE} = 8.17$ kN

**7-94.** $y_B = 2.43$ m
$T_{máx} = 157$ N

**7-95.** $y_B = 8.67$ pies
$y_D = 7.04$ pies

**7-97.** Nodo $B$: $\dfrac{13x_B - 15}{\sqrt{(x_B - 3)^2 + 64}} T_{BC} = 200$

Nodo $C$: $\dfrac{30 - 2x_B}{\sqrt{(x_B - 3)^2 + 64}} T_{BC} = 102$

$x_B = 4.36$ pies

**7-98.** $P = 71.4$ lb

**7-99.** $w_0 = 0.846$ kN/m

**7-101.** $15 = \dfrac{w_0}{2\,F_H} x^2$

$10 = \dfrac{w_0}{2\,F_H}(25 - x)^2$

$w_0 = 264$ lb/pie

**7-102.** 4.42 kip

**7-103.** $h = 2.68$ pies

$L = 13.4$ pies

**7-105.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{w_0}{2F_H}x$

$y = \dfrac{w_0}{4F_H}x^2$

$y = 75$ m en $x = x_0$

$y = 150$ m en $x = -(1000 - x_0)$

$w_0 = 77.8$ kN/m

**7-106.** $y = 46.0(10^{-6})x^3 + 0.176x$

$T_{máx} = 48.7$ kip

**7-107.** $T_{máx} = 5.36$ kN

$L = 51.3$ m

**7-109.** $y = \dfrac{F_H}{49.05}\left[\cosh\left(\dfrac{49.05}{F_H}x\right) - 1\right]$ m

$L = 45 = 2\left\{\dfrac{F_H}{49.05}\operatorname{senh}\left(\dfrac{49.05}{F_H}(20)\right)\right\}$

$F_H = 1153.41$ N

$y = 23.5[\cosh 0.0425x - 1]$ m

$T_{máx} = 1.60$ kN

**7-111.** $L = 15.5$ m

**7-113.** $\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} 7.3575(10^{-3})x$

$y = 135.92\left[\cosh 7.3575(10^{-3})x - 1\right]$

$h = 1.47$ m

**7-114.** Longitud total $= 55.6$ pies

$h = 10.6$ pies

**7-115.** $x = 2^-, V = 4.86, M = 9.71$

$x = 5^+, V = -1.14, M = 2.29$

**7-117.** $F_{BC} = 310.58$ N

Segmento $CE$

$N_E = 80.4$ N

$V_E = 0$

$M_E = 112.5$ N·m

Segmento $CD$

$N_D = -220$ N

$V_D = -220$ N

$M_D = -54.9$ N·m

**7-118.** $a = 0.366L$

**7-119.** $T_{máx} = 76.7$ lb

**7-121.** $F_{CD} = 6.364$ kN

$A_y = 1.50$ kN

$0 \le x < 3$ m

$V = 1.50$ kN

$M = \{1.50x\}$ kN·m

$3 \text{ m} < x \le 6$ m

$V = -4.50$ kN

$M = \{27.0 - 4.50x\}$ kN·m

**7-122.** $0 \le x < 2$ m

$V = \{5.29 - 0.196x\}$ kN

$M = \{5.29x - 0.0981x^2\}$ kN·m

$2 \text{ m} < x \le 5$ m

$V = \{-0.196x - 2.71\}$ kN

$M = \{16.0 - 2.71x - 0.0981x^2\}$ kN·m

**7-123.** $0° \le \theta \le 180°$

$V = 150 \operatorname{sen}\theta - 200\cos\theta$

$N = 150\cos\theta + 200\operatorname{sen}\theta$

$M = 150\cos\theta + 200\operatorname{sen}\theta - 150$

$0 \le y \le 2$ pies

$V = 200$ lb

$N = -150$ lb

$M = -300 - 200y$

**7-125.** $F_{CD} = 86.6$ lb

$V_D = M_D = 0$

$N_D = F_{CD} = -86.6$ lb

$N_E = 0$

$V_E = 28.9$ lb

$M_E = 86.6$ lb·pie

**7-126.** $s = 18.2$ pies

**7-127.** $l = 238$ pies

$h = 93.75$ pies

## Capítulo 8

**8-1.** $P\cos 30° + 0.25N - 50(9.81)\operatorname{sen} 30° = 0$

$P = 140$ N

$N = 494.94$ N

**8-2.** $P = 474$ N

**8-3.** $\mu_s = 0.256$

**8-5.** $180(10\cos\theta) - 0.4(180)(10\operatorname{sen}\theta) - 180(3) = 0$

$\theta = 52.0°$

**8-6.** $\mu_s = 0.231$
**8-7.** Sí, el poste permanecerá estático.
**8-9.** $30\,(13\cos\theta) - 9\,(26\,\text{sen}\,\theta) = 0$
$d = 13.4$ pies
**8-10.** $P = 15$ lb
**8-11.** $P = 1$ lb
**8-13.** $F_B = 280$ N
$N_B = 700$ N
$P = 350$ N
**8-14.** $\mu_s = 0.577$
**8-15.** $F_B = 200$ N
**8-17.** $N_D = 95.38$ lb
El muchacho no se desliza.
$F_D = 36.9$ lb
$A_y = 468$ lb
$B_x = 34.6$ lb
$B_y = 228$ lb
**8-18.** $\mu_s = 0.595$
**8-19.** $\theta = 10.6°$ $x = 0.184$ pie
**8-21.** $N_A = 200\cos\theta$
$N_B = 150\cos\theta$
$\theta = 16.3°$
$F_{CD} = 8.23$ lb
**8-22.** $n = 12$
**8-23.** $P = 0.990$ lb
**8-25.** Suponga que $P = 100$ lb
$N = 160$ lb
$x = 1.44$ pies $< 1.5$ pies
$P = 100$ lb
**8-26.** $P = 45.0$ lb
$\mu_s' = 0.300$
**8-27.** El hombre es capaz de mover el refrigerador, el refrigerador se desliza.
**8-29.** $P = 29.5$ N
$N_A = 12.9$ N $N_B = 72.4$ N
**8-30.** El tractor puede mover el tronco.
**8-31.** $W = 836$ lb
**8-33.** $F_A = 17.32$ lb
$N_A = 130$ lb
La barra no se deslizará.
**8-34.** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \mu_A\mu_B}{2\mu_A}\right)$
**8-35.** $P = 0.127$ lb
**8-37.** $N = wa\cos\theta$
$b = 2a\,\text{sen}\,\theta$
**8-38.** $h = 0.48$ m
**8-39.** $\theta = 33.4°$
$\mu_s = 0.3$
**8-41.** $F_A = 0.3714\,F_{CA}$
$N_A = 0.9285\,F_{CA}$
$\mu_s = 0.4$
**8-42.** Puede mover el embalaje.
**8-43.** $\mu_s' = 0.376$
**8-45.** $N_A = 551.8$ N
$B_x = 110.4$ N
$B_y = 110.4$ N
$M = 77.3$ N·m
**8-46.** $F_A = 71.4$ N
**8-47.** $P = 589$ N
**8-49.** $T = 11\,772$ N
$N_l = 9.81m_l$
$m_l = 1500$ kg
**8-50.** $m_l = 800$ kg
**8-51.** $P = 1.02$ kN
**8-53.** $N = 48.6$ lb
Deslizamiento de la tabla sobre la mesa de trabajo $P_x = 24.3$ lb
Deslizamiento en el suelo $P_x = 19.08$ lb.
Volcadura $P_x = 21.2$ lb.
La mesa de trabajo comenzará a deslizarse.
**8-54.** La mesa de trabajo comenzará a deslizarse.
**8-55.** $\mu_s = 0.304$
**8-57.** $P = 60$ lb
$N' = 150$ lb
$F' = 60$ lb
**8-58.** $P = 90$ lb
**8-59.** $\theta = 16.0°$
**8-61.** $N_C = 377.31$ N
$N_D = 188.65$ N
$M = 90.6$ N·m
$N_A = 150.92$ N
$N_B = 679.15$ N
$F_B = 37.73$ N
**8-62.** $P = 45$ lb
**8-63.** $P = 49.0$ N
**8-65.** $N_B = 82.57$ lb $N_C = 275.23$ lb
$P = 90.7$ lb
**8-66.** $P = 1.98$ N
**8-67.** $P = 863$ N
**8-69.** $N_A = 1212.18$ N
$N_C = 600$ N
$P = 1.29$ kN
**8-70.** Todos los bloques se deslizan al mismo tiempo; $P = 625$ lb.
**8-71.** $P = 574$ N

**8-73.** $N_A = 0.5240W$
$N_B = 1.1435W$
$F_B = 0.05240W$
$P = 0.0329W$
**8-74.** $P = 1.38W$
**8-75.** $P = 1.80$ kN
**8-77.** $\theta = 7.768°$
$\phi_s = 11.310°$
$F = 620$ N
**8-78.** $M = 5.69$ lb · pulg
**8-79.** $M = 145$ lb · pie
**8-81.** $\theta = 5.455°$
$\phi_s = 14.036°$
$F = 678$ N
**8-82.** $F = 71.4$ N
**8-83.** $F = 49.2$ N
**8-85.** $F_{CA} = F_{CB}$
$F = 1387.34$ N
$F_{BD} = 1387.34$ N
$F_{AB} = 1962$ N
$\theta = 5.455°$
$\phi_s = 14.036°$
$F = 74.0$ N
**8-86.** $F = 174$ N
**8-87.** $N_C = 123$ N
$N_A = 42.6$ N
**8-89.** $T_B = 13.678$ lb
$F_C = 13.7$ lb
$N_B = 65.8$ lb
$F_B = 38.5$ lb
**8-90.** $F = 1.31$ kN
$F = 372$ N
**8-91.** $F = 4.60$ kN
$F = 16.2$ kN
**8-93.** $N = 185$ lb
$F = 136.9$ lb
Sí, lo logra por poco.
**8-94.** $T_1 = 57.7$ lb
**8-95.** $\theta = 24.2°$
**8-97.** $F = 4.75P$
$F' = 19.53P$
$P = 42.3$ N
**8-98.** $M = 187$ N · m
$T_A = 616.67$ N
$T_C = 150.00$ N
**8-101.** $T_2 = 1767.77$ N
$T_1 = 688.83$
$(\mu_s)_{req} = 0.3$
$M = 216$ N · m
**8-102.** $P = 17.1$ lb
**8-103.** Como $F < F_{máx} = 54$ lb, el hombre no se deslizará, y logrará detener a la vaca.
**8-105.** $T = 486.55$ N   $N = 314.82$ N
$\beta = (2n + 0.9167)\pi$ rad
Por lo tanto, la cantidad requerida de vueltas completas es $n = 2$.
**8-106.** El hombre puede mantener el embalaje en equilibrio.
**8-107.** $T_1 = 1.85$ N
$T_2 = 1.59$ N
**8-109.** Para que ocurra el movimiento, el bloque $A$ tendrá que deslizarse.
$P = 223$ N
$F_B = T = 36.79$ N
**8-110.** $F = 2.49$ kN
**8-111.** $W = 39.5$ lb
**8-113.** $T = 20.19$ N
$F_A = 16.2$ N
$N_A = 478.4$ N
$x = 0.00697 \text{ m} < 0.125 \text{ m}$
No ocurre volcadura.
**8-114.** $M = 304$ lb · pulg
**8-115.** $\mu_k = 0.0568$
**8-117.** Aplique la ecuación 8-7.
$F_{sp} = 1.62$ kip
**8-118.** $M = 270$ N · m
**8-119.** $M = \dfrac{\mu_s PR}{2}$
**8-121.** $N = \frac{P}{\cos\theta}$
$A = \frac{\pi}{4\cos\theta}(d_2^2 - d_1^2)$
$M = \dfrac{\mu_s P}{3\cos\theta}\left(\dfrac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2}\right)$
**8-122.** $p_0 = 0.442$ psi
$F = 573$ lb
**8-123.** $M = \dfrac{2\mu_s PR}{3\cos\theta}$
**8-125.** $\tan\phi_k = \mu_k$
$\operatorname{sen}\phi_k = \dfrac{\mu_k}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}$
$M = \left(\dfrac{\mu_k}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}\right)pr$
**8-126.** $P = 215$ N
**8-127.** $P = 179$ N
**8-129.** $\phi_s = 16.699°$
$m_B = 13.1$ kg

**8-130.** $(r_f)_A = 0.2$ pulg
$(r_f)_B = 0.075$ pulg

**8-131.** $(r_f)_A = 7.50$ mm
$(r_f)_B = 3$ mm

**8-133.** $r_f = 2.967$ mm
$R = \sqrt{P^2 + (833.85)^2}$
$P = 814$ N (exacto)
$P = 814$ N (aproximado)

**8-134.** $P = 42.2$ lb

**8-135.** $\mu_s = 0.411$

**8-137.** $\theta = 5.74°$
$P = 96.7$ N

**8-138.** $P = 299$ N

**8-139.** $P = 266$ N

**8-141.** $P = \frac{(1200)(9.81)(0.2 + 0.4)}{2(15)} = 235$ N

**8-142.** $P = 40$ lb

**8-143.** $s = 0.750$ m

**8-145.** **a)** $N_A = 5573.86$ N $T = 2786.93$ N
$W = 6.97$ kN
**b)** $N_A = 6376.5$ N
$N_B = 5886.0$ N
$T = 6131.25$ N
$W = 15.3$ kN

**8-146.** **a)** $W = 1.25$ kN
**b)** $W = 6.89$ kN

**8-147.** $m_B = 1.66$ kg

**8-149.** $N_A = 1000$ lb
$N_B = 2500$ lb
$T = 1250$ lb
$M = 2.50$ kip · pie

**8-150.** $M = 2.21$ kip · pie

**8-151.** $\theta = 35.0°$

**8-153.** $N = 7878.5$ lb
$F = 1389.2$ lb
Las cuñas no se deslizan en la superficie de contacto $AB$.
$N_C = 8000$ lb
$F_C = 0$
Las cuñas son autobloqueantes.

## Capítulo 9

**9-1.** $dL = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 4}\,dy$
$dm = \sqrt{y^2 + 4}\,dy$
$m = 11.8$ kg
$\bar{x} = 1.64$ m
$\bar{y} = 2.29$ m

**9-2.** $A_x = 0$
$A_y = 26.6$ lb
$M_A = 32.7$ lb · pie

**9-3.** $\bar{x} = 0.546$ m
$O_x = 0$
$O_y = 7.06$ N
$M_O = 3.85$ N · m

**9-5.** $dm = m_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)dx$
$m = \frac{3}{2}m_0L$
$\bar{x} = \frac{5}{9}L$

**9-6.** $\bar{x} = 0$
$\bar{y} = 1.82$ pies

**9-7.** $\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$

**9-9.** $dA = x^{3/2}\,dx$
$\tilde{x} = x$
$\tilde{y} = \frac{x^{3/2}}{2}$
$A = 0.4\text{ m}^2$
$\bar{x} = 0.714$ m
$\bar{y} = 0.3125$ m

**9-10.** $A = 2.25\text{ pies}^2$
$\bar{x} = 2.4$ pies
$\bar{y} = 0.857$ pie

**9-11.** $A = \frac{4}{3}a^{1/2}b^{3/2}$
$\bar{x} = \frac{3}{5}b$
$\bar{y} = \frac{3}{4}\sqrt{ab}$

**9-13.** $dA = x^2\,dx$
$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2$
$\bar{y} = 1.33$ pulg

**9-14.** $A = c^2 \ln\frac{b}{a}$
$\bar{x} = \frac{b - a}{\ln\frac{b}{a}}$
$\bar{y} = \frac{c^2(b - a)}{2ab \ln\frac{b}{a}}$

**9-15.** $A = \frac{1}{3}ah$
$\bar{x} = \frac{3}{4}a$
$\bar{y} = \frac{3}{10}h$

**9-17.** $dA = \frac{a}{h^{1/2}}y^{1/2}\,dy$
$\tilde{x} = \frac{a}{2h^{1/2}}y^{1/2}$ $\tilde{y} = y$
$A = \frac{2}{3}ah$
$\bar{x} = \frac{3}{8}a$
$\bar{y} = \frac{3}{5}h$

**9-18.** $F_{BC} = 2.64$ kN
$A_x = 0$
$A_y = 1.98$ kN

**9-19.** $\bar{x} = -0.833a$

**9-21.** $dA = 2k\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) dx$
$\tilde{x} = x$
$\bar{x} = \frac{5a}{8}$

**9-22.** $\bar{x} = 1.08$ pulg

**9-23.** $\bar{y} = 0.541$ pulg

**9-25.** $dA = \left(x - \frac{x^3}{9}\right) dx$
$\tilde{x} = x$
$\tilde{y} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{9}\right)$
$A = 2.25$ pies$^2$
$\bar{x} = 1.6$ pies
$\bar{y} = 1.14$ pies

**9-26.** $\bar{x} = 0.45$ m

**9-27.** $\bar{y} = 0.45$ m

**9-29.** $dA = y\, dx$
$\bar{y} = \frac{y}{2}$
$\bar{y} = \frac{n + 1}{2(2n + 1)} h$

**9-30.** $\bar{x} = 1.20$ m
$\bar{y} = 0$
$N_B = 55.1$ kN
$A_x = 24.6$ kN
$A_y = 73.9$ kN

**9-31.** $\bar{x} = 0.914$ m
$\bar{y} = 0.357$ m

**9-33.** $dA = \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy$
$\tilde{y} = y$
$\bar{y} = 1$ pie

**9-34.** $m = \frac{3}{2}\rho_0 abt$
$\bar{x} = \frac{5}{9} a$

**9-35.** $\bar{y} = \frac{a}{2(10 - 3\pi)}$

**9-37.** $dV = \frac{\pi}{16} y^3\, dy$
$\tilde{y} = y$
$\bar{y} = 3.2$ m

**9-38.** $\bar{z} = \frac{2}{9} h$

**9-39.** $\bar{y} = 4.36$ pies

**9-41.** $dm = \pi\rho_0\left(a^2 - y^2 + ay - \frac{y^3}{a}\right) dy$
$\tilde{y} = y$
$\bar{y} = \frac{23}{55} a$

**9-42.** $V = \frac{\pi a^2 h}{6}$
$\bar{y} = \frac{3}{4} h$
$\bar{z} = \frac{a}{\pi}$

**9-43.** $m = \frac{\pi k r^4}{4}$
$\bar{z} = \frac{8}{15} r$

**9-45.** $\bar{x} = \frac{164.72(10^3)}{1361.37} = 121$ mm
$\bar{y} = \frac{60(10^3)}{1361.37} = 44.1$ mm
$\bar{z} = \frac{169.44(10^3)}{1361.37} = 124$ mm

**9-46.** $\bar{x} = -0.590$ pulg
$\bar{y} = 1.07$ pulg
$\bar{z} = 2.14$ pulg

**9-47.** $\bar{x} = 0.0740$ pulg
$\bar{y} = 0.0370$ pulg
$\bar{z} = 0.157$ pulg

**9-49.** $\bar{x} = -50$ mm
$\bar{y} = 88.6$ mm
$\theta = \tan^{-1}\frac{50}{400 \text{ sen } 60° - 88.60} = 10.89°$
$\phi = 30° - 10.89° = 19.1°$

**9-50.** $\bar{x} = 1.65$ m
$\bar{y} = 9.24$ m
$E_y = 342$ N
$A_y = 1.32$ kN
$A_x = 0$

**9-51.** $\bar{x} = 2.64$ pulg
$\bar{y} = 12$ pulg

**9-53.** $\bar{y} = \frac{3[2(6)(1)] + 5.5(6)(1) + 9(6)(1)}{2(6)(1) + 6(1) + 6(1)}$
$= 5.125$ pulg

**9-54.** $\bar{y} = 2.00$ pulg

**9-55.** $\bar{y} = 2.57$ pulg

**9-57.** $\bar{x} = \frac{15.192}{6.84} = 2.22$ m
$\bar{y} = \frac{9.648}{6.84} = 1.41$ m

**9-58.** $\bar{x} = \dfrac{4\left(r_o^3 - r_i^3\right)}{3\pi\left(r_o^2 - r_i^2\right)}$

**9-59.** $\bar{x} = 4.83$ pulg
$\bar{y} = 2.56$ pulg

**9-61.** $\bar{x} = 0$
$\bar{y} = \dfrac{441.2(10^4)}{81(10^4)} = 544$ mm

**9-62.** $\bar{x} = \dfrac{W_1}{W} b$
$\bar{y} = \dfrac{b(W_2 - W_1)\sqrt{b^2 - c^2}}{cW}$

**9-63.** $\bar{y} = 293$ mm

**9-65.** $\Sigma m = 16.4$ kg
$\bar{x} = \dfrac{2.4971(10^{-3})}{16.347(10^{-3})} = 153$ mm

$\bar{y} = -15$ mm

$\bar{z} = \dfrac{1.8221(10^{-3})}{16.347(10^{-3})} = 111$ mm

**9-66.** $\bar{x} = 5.07$ pies
$\bar{y} = 3.80$ pies

**9-67.** $\bar{x} = \frac{L + (n - 1)d}{2}$

**9-69.** $\bar{x} = \frac{216\,000}{16\,485.84} = 13.1$ mm
$\bar{z} = \frac{371\,433.63}{16\,485.84} = 22.5$ mm
$\theta = 30.2°$

**9-70.** $\bar{x} = 4.56$ m
$\bar{y} = 3.07$ m
$B_y = 4.66$ kN
$A_y = 5.99$ kN

**9-71.** $\bar{x} = 19.0$ pies
$\bar{y} = 11.0$ pies

**9-73.** $\bar{z} = \frac{1.0333\pi}{9.3333\pi} = 111$ mm

**9-74.** $\bar{z} = 754$ mm

**9-75.** $\bar{x} = 2.19$ pulg
$\bar{y} = 2.79$ pulg
$\bar{z} = 1.67$ pulg

**9-77.** $\bar{x} = \dfrac{11.02(10^6)\pi}{172(10^3)\pi} = 64.1$ mm

**9-78.** $h = 80$ mm o $h = 48$ mm

**9-79.** $\bar{z} = 122$ mm

**9-81.** $A = 2\pi(184) = 1156$ pies$^2$

**9-82.** $V = 3485$ pies$^3$

**9-83.** $V = 101$ pies$^3$

**9-85.** $V = 2\pi\left[\left(\frac{4(3)}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi(3^2)}{4}\right) + 0.5(1.5)(1) + 1.667\left(\frac{2(1.5)}{2}\right)\right]$
$= 77.0$ m$^3$

**9-86.** $A = 1365$ m$^2$

**9-87.** $A = 141$ pulg$^2$

**9-89.** $V = 2\pi[(112.5)(75)(375) + (187.5)(325)(75)]$
$= 0.0486$ m$^3$

**9-90.** $A = 116$ pulg$^2$
$V = 50.6$ pulg$^3$

**9-91.** $A = 1.06$ m$^2$
$V = 0.0376$ m$^3$

**9-93.** $V_h = 2\pi[0.75(6) + 0.6333(0.780) + 0.1(0.240)]$
$V_c = 20.5$ m$^3$

**9-94.** $R = 29.3$ kip

**9-95.** 2.26 galones

**9-97.** $V = 2\pi\left[\left(\frac{4(4)}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{4}\pi\,(4)^2\right) + (2)(8)(4)\right]$
$= 536$ m$^3$

**9-98.** $V = 25.5$ m$^3$

**9-99.** $A = 43.18$ m$^2$
14.4 litros

**9-101.** $A = 2\pi[7.5(\sqrt{241}) + 15(30)] = 3.56(10^3)$ pies$^2$

**9-102.** $V = 22.1(10^3)$ pies$^3$

**9-103.** $h = 106$ mm

**9-105.** $-176\,580(2) + 73\,575d\left(\frac{2}{3}d\right) = 0$
$d = 2.68$ m

**9-106.** $d = 3.65$ m

**9-107.** $F_{CDEF} = 750$ lb
$F_{ABDC} = 1800$ lb

**9-109.** $h = 2.7071 - 0.7071y$
$dF_R = \left(26.5567\sqrt{1 - y^2} - 6.9367y\sqrt{1 - y^2}\right) dy$
$F_R = 41.7$ kN

**9-110.** $F_R = 225$ lb

**9-111.** $F_R = 450$ lb

**9-113.** $w_B = 39.24$ kN
$w_C = 58.86$ kN
$N_C = 13.1$ kN

**9-114.** $L = 2.31$ m

**9-115.** $m_A = 5.89$ Mg

**9-117.** $F_v = 39.24$ kN
$F_h = 176.58$ kN
$(W_{con})_p = 188.35$ kN
$(W_{con})_r = 282.53$ kN
F.S. = 2.66

**9-118.** $x = 1.51$ m

**9-119.** $F_R = 170$ kN

**9-121.** $dA = x^2\,dx$
$\tilde{y} = \frac{x^2}{2}$
$\bar{y} = 1.33$ pulg

**9-122.** $\bar{y} = 87.5$ mm

**9-123.** $\bar{x} = \bar{y} = 0$
$\bar{z} = \frac{2}{3}a$

**9-125.** $\bar{x} = \frac{76.50}{27.998} = 2.73$ pulg
$\bar{y} = \frac{39.833}{27.998} = 1.42$ pulg

**9-126.** $\bar{x} = 0$
$\bar{y} = 1.63$ pulg

**9-127.** $\bar{y} = -0.262a$

**9-129.** $dF_R = 6\left(-\frac{240}{x + 1} + 340\right) dx$
$F_R = 7.62$ kN
$\bar{x} = 2.74$ m
$\bar{y} = 3.00$ m

## Capítulo 10

**10-1.** $dA = [2 - (4y)^{1/3}]\,dy$
$I_x = 0.533\ \text{m}^4$
**10-2.** $I_y = 2.67\ \text{m}^4$
**10-3.** $I_x = 0.0606\ \text{m}^4$
**10-5.** $dA = \left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy$
$I_x = 2.13\ \text{m}^4$
**10-6.** $I_y = 4.57\ \text{m}^4$
**10-7.** $I_x = 0.205\ \text{m}^4$
**10-9.** $dA = \left[1 - \left(\frac{y}{2}\right)^{1/4}\right] dy$
$I_x = 0.2051\ \text{m}^4$
$dA = 2x^4\,dx$
$I_y = 0.2857\ \text{m}^4$
$J_O = 0.491\ \text{m}^4$
**10-10.** $I_x = 307\ \text{pulg}^4$
**10-11.** $I_y = 10.7\ \text{pulg}^4$
**10-13.** $dA = (2 - 2x^3)\,dx$
$I_y = 0.333\ \text{pulg}^4$
**10-14.** $I_x = 19.5\ \text{pulg}^4$
**10-15.** $I_y = 1.07\ \text{pulg}^4$
**10-17.** $dA = \left(h - \frac{h}{b}x\right) dx$
$I_y = \frac{1}{12}hb^3$
**10-18.** $I_x = \frac{2}{7}bh^3$
**10-19.** $I_y = \frac{2}{15}hb^3$
**10-21.** $dA = x^{1/3}\,dx$
$I_y = 307\ \text{pulg}^4$
**10-22.** $I_x = 9.05\ \text{pulg}^4$
**10-23.** $I_y = 30.9\ \text{pulg}^4$
**10-25.** $dA = (r d\theta)\,dr$
$I_y = \dfrac{\pi r_0^{\,4}}{8}$
**10-26.** $J_0 = \dfrac{\pi r_0^{\,4}}{4}$
**10-27.** $\bar{y} = 2.20\ \text{pulg}$
$I_{x'} = 57.9\ \text{pulg}^4$
**10-29.** $I_y = \frac{1}{12}(2)(6)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(4)(1)^3 + 1(4)(1.5)^2\right]$
$= 54.7\ \text{pulg}^4$
**10-30.** $I_x = 76.6(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-31.** $I_y = 45.5(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-33.** $(I_y)_{\text{triángulo}} = \left[\frac{1}{36}(200)(300^3) + \frac{1}{2}(200)(300)(200)^2\right]$
$+ \left[\frac{1}{12}(200)(300)^3 + 200(300)(450)^2\right.$
$+ \left[-\frac{\pi}{4}(75)^4 + (-\pi(75)^2(450)^2\right]$
$= 10.3(10^9)\ \text{mm}^4$
**10-34.** $\bar{y} = 22.5\ \text{mm}$
$I_{x'} = 34.4(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-35.** $I_{y'} = 122(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-37.** $I_y = \left[\frac{1}{12}(2)(6^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(3)(1^3) + 3(1)(2.5)^2\right]$
$= 74\ \text{pulg}^4$
**10-38.** $\bar{y} = 170\ \text{mm}$
$I_{x'} = 722(10)^6\ \text{mm}^4$
**10-39.** $I_x = 2.17(10^{-3})\ \text{m}^4$
**10-41.** Considere un rectángulo grande y un agujero.
$I_x = 52.7(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-42.** $I_y = 2.51(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-43.** $\bar{y} = 2.00\ \text{pulg}$, $I_{x'} = 64.0\ \text{pulg}^4$
**10-45.** Considere tres segmentos.
$I_x = 548(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-46.** $I_y = 548(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-47.** $I_y = 914(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-49.** Considere tres segmentos.
$I_{x'} = 124(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-50.** $I_{y'} = 1.21(10^9)\ \text{mm}^4$
**10-51.** $I_x = 2.51(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-53.** $\bar{y} = \frac{61.75}{13} = 4.75\ \text{pulg}$
$I_{x'} = 15.896 + 36.375 = 52.3\ \text{pulg}^4$
**10-54.** $I_x = 388\ \text{pulg}^4$
**10-55.** $I_x = 22.9(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-57.** Considere segmentos rectangulares, 226 mm × 12 mm, 100 mm × 12 mm y 150 mm × 12 mm
$I_x = 115(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-58.** $I_y = 153(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-59.** $I_{x'} = 30.2(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-61.** $\bar{x} = \frac{x}{2}$
$\bar{y} = y$
$dA = x\,dy$
$I_{xy} = 0.667\ \text{pulg}^4$
**10-62.** $I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}$
**10-63.** $I_{xy} = 48\ \text{pulg}^4$
**10-65.** $dA = \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 + 4x)\,dx$
$\tilde{x} = x$
$\tilde{y} = \frac{y}{2}$
$I_{xy} = 3.12\ \text{m}^4$

**10-66.** $I_{xy} = 0.333\ \text{m}^4$
**10-67.** $I_{xy} = \frac{3}{16}b^2h^2$
**10-69.** $dA = x^{1/2}dx,\ \widetilde{x} = \text{x},\ \widetilde{y} = \frac{y}{2}$
$I_{xy} = 10.7\ \text{pulg}^4$
**10-70.** $I_{xy} = 35.7\ \text{pulg}^4$
**10-71.** $I_{xy} = 36.0\ \text{pulg}^4$
**10-73.** Considere tres segmentos.
$I_{xy} = 17.1(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-74.** $I_{xy} = -110\ \text{pulg}^4$
**10-75.** $\overline{x} = 48.2\ \text{mm}$
$I_u = 112(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_v = 258(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{uv} = -126(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-77.** Considere tres segmentos.
$I_{xy} = -13.05(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-78.** $I_u = 43.9\ \text{pulg}^4$
$I_v = 23.6\ \text{pulg}^4$
$I_{uv} = 17.5\ \text{pulg}^4$
**10-79.** $\overline{y} = 8.25\ \text{pulg}$
$I_u = 109\ \text{pulg}^4$
$I_v = 238\ \text{pulg}^4$
$I_{uv} = 111\ \text{pulg}^4$
**10-81.** $I_x = 107.83(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_y = 9.907(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{xy} = -22.4(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{\text{máx}} = 113(10^6)\ \text{mm}^4,\ (\theta_p)_1 = 12.3°$
$I_{\text{mín}} = 5.03(10^6)\ \text{mm}^4,\ (\theta_p)_2 = -77.7°$
**10-82.** $\overline{y} = 82.5\ \text{mm}$
$I_u = 43.4(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_v = 47.0(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{uv} = -3.08(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-83.** $\overline{x} = 48.2\ \text{mm}$
$I_u = 112(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_v = 258(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{uv} = -126(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-85.** $\overline{y} = 8.25\ \text{pulg}$
$I_{\text{prom}} = 173.72\ \text{pulg}^4$
$R = 128.72\ \text{pulg}^4$
$I_u = 109\ \text{pulg}^4$
$I_v = 238\ \text{pulg}^4$
$I_{uv} = 111\ \text{pulg}^4$
**10-86.** $\overline{x} = 1.68\ \text{pulg}$
$\overline{y} = 1.68\ \text{pulg}$
$I_{\text{máx}} = 31.7\ \text{pulg}^4$
$I_{\text{mín}} = 8.07\ \text{pulg}^4$
$(\theta_p)_1 = 45°$ ↺
$(\theta)_p)_2 = 45°$ ↻
**10-87.** $I_{\text{máx}} = 113(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{\text{mín}} = 5.03(10^6)\ \text{mm}^4$
$(\theta_p)_1 = 12.3°$ ↺
$(\theta_p)_2 = 77.7°$ ↻
**10-89.** $dm = \rho\pi\left(r_0 - \frac{r_0}{h}z\right)^2 dz$
$dI_z = \frac{1}{2}\rho\pi\left(r_0 - \frac{r_0}{h}z\right)^4 dz$
$I_z = \frac{3}{10}mr_0^2$
**10-90.** $I_x = \frac{3}{10}mr^2$
**10-91.** $I_z = \frac{7}{18}ml^2$
**10-93.** $dm = \rho\pi(50x)\ dx$
$dI_x = \frac{\rho\pi}{2}(2500\ x^2)\ dx$
$k_x = 57.7\ \text{mm}$
**10-94.** $I_y = \frac{2}{5}mb^2$
**10-95.** $I_x = \frac{93}{10}mb^2$
**10-97.** $dI_z = \frac{\rho\pi}{8192}z^8\ dz$
$I_z = 87.7(10^3)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-98.** $I_z = 63.2\ \text{slug}\cdot\text{pie}^2$
**10-99.** $I_y = 1.71(10^3)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-101.** $0.5 = \frac{1.5(6) + 0.65[1.3(2)] + 0[L(2)]}{6 + 1.3(2) + L(2)}$
$L = 6.39\ \text{m}$
$I_O = 53.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-102.** $I_z = 0.150\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-103.** $I_y = 0.144\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-105.** $\widetilde{y} = \frac{1(3) + 2.25(5)}{3 + 5} = 1.78\ \text{m}$
$I_G = 4.45\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-106.** $I_z = 2.25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-107.** $I_x = 3.25\ \text{g}\cdot\text{m}^2$
**10-109.** $I_O = 84.94\ \text{slug}\cdot\text{pie}^2$
$I_A = 222\ \text{slug}\cdot\text{pie}^2$
**10-110.** $I_O = 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-111.** $I_O = 0.113\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
**10-113.** Considere cuatro triángulos y un rectángulo.
$I_y = 0.187d^4$
**10-114.** $I_x = \frac{1}{12}a^4$
**10-115.** $\overline{y} = 0.875\ \text{pulg},\ I_{x'} = 2.27\ \text{pulg}^4$
**10-117.** $dA = \frac{1}{4}(4 - x^2)\ dx$
$I_y = 2.13\ \text{pies}^4$
**10-118.** $I_x = 0.610\ \text{pie}^4$

**10-119.** $I_x = 914(10^6)\ \text{mm}^4$
$I_{x'} = 146(10^6)\ \text{mm}^4$
**10-121.** $dA = y^{1/3}\,dy$
$dI_{xy} = \frac{1}{2}y^{5/3}\,dy$
$I_{xy} = 0.1875\ \text{m}^4$

## Capítulo 11

**11-1.** $y_D = 2.4 \operatorname{sen}\theta$
$y_J = 2(2.4 \operatorname{sen}\theta) + b$
$F_{AD} = 3.92$ kN
**11-2.** $\theta = 0°$ y $\theta = 73.1°$
**11-3.** $\theta = 41.2°$
**11-5.** $x_B = 6\cos\theta$
$y_C = 3 \operatorname{sen}\theta$
$F_{sp} = 10.0$ lb
**11-6.** $F_S = 15$ lb
**11-7.** $\theta = 24.9°$
**11-9.** $y_D = 2(0.2\cos\theta)$
$\delta y_A = 0.5\,\delta\theta$
$F_E = 177$ N
**11-10.** $F = 60$ N
**11-11.** $P = 2k\tan\theta\,(2l\cos\theta - l_0)$
**11-13.** $y_C = 1 \operatorname{sen}\theta$
$y_A = 3 \operatorname{sen}\theta$
$\theta = 13.9°$
$\theta = 90°$
**11-14.** $m_l = m\left(\frac{s}{a}\right)$
**11-15.** $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{2L}\right)^{\frac{1}{3}}$
**11-17.** $y_{G_b} = 0.25 \operatorname{sen}\theta + b$
$y_{G_t} = 0.25 \operatorname{sen}\theta + a$
$x_C = 0.25\cos\theta$
$k = 166$ N/m
**11-18.** $F = 200$ N
**11-19.** $\theta = 38.8°$
**11-21.** $y_G = 0.5\cos\theta$
$y_A = 1\cos\theta$
$x_A = 1 \operatorname{sen}\theta$
$F_{sp} = 4.961$ lb
$k = 10.8$ lb/pie
**11-22.** $W_G = 2.5$ lb
**11-23.** $x = 16$ pulg
**11-25.** $5^2 = y_C^2 + 3^2 - 2(y_C)(3)\cos(90° - \theta)$
$F = 259$ lb
**11-26.** $x = 0.590$ pie
$\frac{d^2V}{dx^2} = 12.2 > 0$ continuo
$x = -0.424$ pie
$\frac{d^2V}{dx^2} = -12.2 < 0$ inestable
**11-27.** $\theta = 90°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 16 > 0$ estable
$\theta = 36.9°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -25.6 < 0$ inestable
**11-29.** $V = 5886\cos\theta + 9810 \operatorname{sen}\theta + 39\,240$
$\theta = 59.0°$
**11-30.** $W_D = 275$ lb
**11-31.** $h = 8.71$ pulg
$\frac{d^2V}{dh^2} = 70 > 0$ estable
**11-33.** $V = 6.25\cos^2\theta + 7.3575 \operatorname{sen}\theta$
$+ 24.525a + 4.905b$
$\theta = 36.1°$
**11-34.** $x = 1.23$ m
**11-35.** $\theta = 70.9°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 1777 > 0$ estable
$\theta = 17.1°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -1764 < 0$ inestable
**11-37.** $V = -4.415\,m_E \operatorname{sen}\theta$
$+ 202.5\cos^2\theta - 405\cos\theta - 9.81\,m_E b + 202.5$
$m_E = 7.10$ kg
**11-38.** $\theta = 64.8°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 135 > 0$ estable
$\theta = 0°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -72 < 0$ inestable
**11-39.** $\theta = 20.2°$
$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 17.0 > 0$ estable
**11-41.** $V = mg(r + a\cos\theta)$
Por lo tanto, el cilindro se encuentra en equilibrio inestable en $\theta = 0°$ (*Q.E.D.*)
**11-42.** $h = 0$
**11-43.** $h = \sqrt{3}\,r$
**11-45.** $\bar{y} = \frac{1}{4}(h + d)$
$V = \frac{W(h - 3d)}{4}\cos\theta$
$d = \frac{h}{3}$

**11-46.** $\theta = 0°, \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = -12.6 < 0$ inestable

**11-47.** $h = 1.35$ pulg

**11-49.** $\bar{y} = \frac{6h^2 - d^2}{4(3h - d)}$

$V = W\left[\frac{6h^2 - 12hd + 3d^2}{4(3h - d)}\right] \cos\theta$

$d = 0.586\, h$

**11-50.** $F = 512$ N

**11-51.** $\theta = 90°$ y $\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{W}{2kL}\right)$

**11-53.** $V = 50\,\text{sen}^2\theta - 100\,\text{sen}\,\theta - 50\cos\theta + 50$

$\theta = 37.8°$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 125.7 > 0$ estable

**11-54.** $P = \left(\frac{b - a}{2c}\right) mg$

**11-55.** $\theta = 90°$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 1524 > 0$ estable

$\theta = 9.47°$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = -1775 < 0$ inestable

**11-57.** $V = 25\,\text{sen}^2\theta + 15\cos\theta$

$\theta = 0°$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 35 > 0$ estable

$\theta = 72.5°$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} = -45.5 < 0$ inestable

**11-58.** $h = \frac{2kl^2}{W}$

# Índice

## R



## S



## T

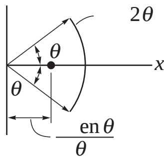
## U



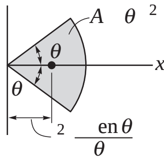
## V

# Propiedades geométricas de elementos lineales y de área

Ubicación del centroide | Ubicación del centroide | Momento de inercia de área



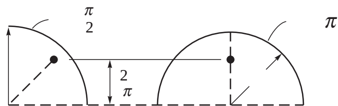

Se en de r ir l r



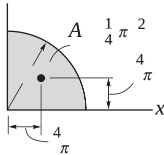

re de n e r ir l r

$x \quad \frac{1}{4} \quad ^4 \theta \quad \frac{1}{2}$ en $2\theta$

$x \quad \frac{1}{4} \quad ^4 \theta \quad \frac{1}{2}$ en $2\theta$



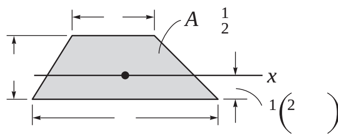

Ar de n r de r l de n e i ir l r



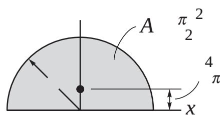

re de n r de r l

$x \quad \frac{1}{1}\pi \quad ^4$

$\frac{1}{1}\pi \quad ^4$



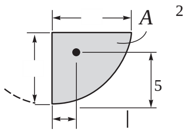

re r e id l



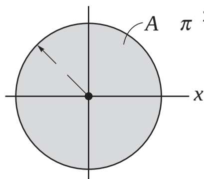

re e i ir l r

$x \quad \frac{1}{8}\pi \quad ^4$

$\frac{1}{8}\pi \quad ^4$



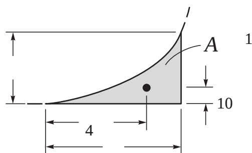

re e i r li



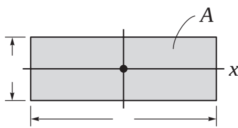

re ir l r

$x \quad \frac{1}{4}\pi \quad ^4$

$\frac{1}{4}\pi \quad ^4$



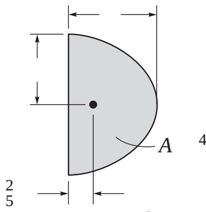

re ex r li



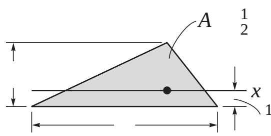

re re n l r

$x \quad \frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}$




re r li




re ri n l r

$x \quad 1$

## Ecuaciones fundamentales de la estática

**Vector cartesiano**

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

*Magnitud*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

*Direcciones*

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$
$$= \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

**Producto punto**

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

**Producto cruz**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

**Vector cartesiano de posición**

$$\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

**Vector cartesiano de fuerza**

$$\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

**Momento de una fuerza**

$$M_o = Fd$$
$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

**Momento de una fuerza alrededor de un eje específico**

$$M_a = \mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

**Simplificación de un sistema de fuerza y par**

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$$
$$(\mathbf{M}_R)_O = \Sigma\mathbf{M} + \Sigma\mathbf{M}_O$$

**Equilibrio**

*Partícula*

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0$$

*Cuerpo rígido-dos dimensiones*

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M_O = 0$$

*Cuerpo rígido-tres dimensiones*

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_{x'} = 0,\ \Sigma M_{y'} = 0,\ \Sigma M_{z'} = 0$$

**Fricción**

*Estática (máxima)* $F_s = \mu_s N$

*Cinética* $F_k = \mu_k N$

**Centro de gravedad**

*Partículas o partes discretas*

$$\bar{r} = \frac{\Sigma\tilde{r}W}{\Sigma W}$$

*Cuerpo*

$$\bar{r} = \frac{\int \tilde{r}\,dW}{\int dW}$$

**Momentos de inercia de área y masa**

$$I = \int r^2\,dA \qquad I = \int r^2\,dm$$

*Teorema de los ejes paralelos*

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad I = \bar{I} + md^2$$

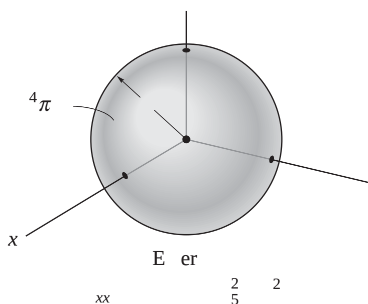
*Radio de giro*

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

**Trabajo virtual**

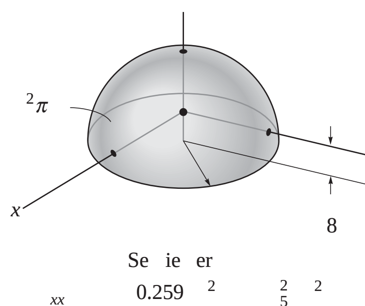
$$\delta U = 0$$

## Centro de gravedad y momento de inercia de masa de sólidos



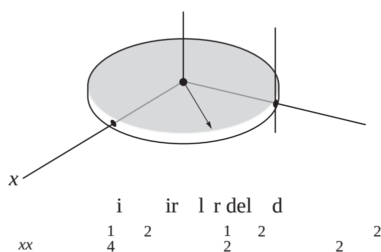

E er

xx 2 2 5



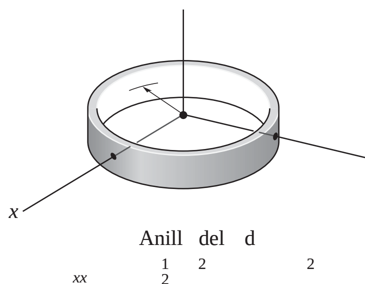

Se ie er

xx 0.259 2 2 2 5



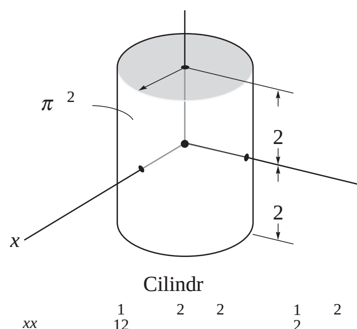

i ir l r del d

xx 1 2 4 1 2 2 2 2



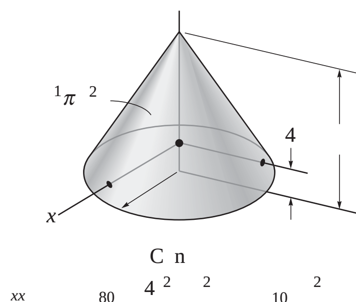

Anill del d

xx 1 2 2 2



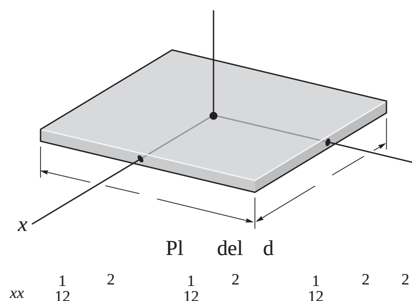

Cilindr

xx 1 12 2 2 1 2 2



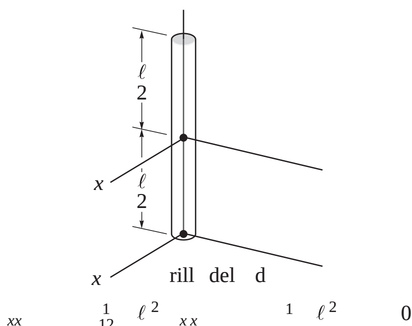

C n

xx 80 4 2 2 10 2




Pl del d

xx 1 12 2 1 12 2 1 12 2 2




rill del d

xx 1 12 ℓ 2 x x 1 ℓ 2 0